ALGEBRA I. HOJA 4

Con frecuencia usaremos n-tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ para denotar vectores (columna) por razones tipográficas.

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

comprobar que no existe una matriz B tal que $AB = I = BA$.

2. Siendo A y B las matrices dadas a continuación, calcular los productos AB y BA cuando sea posible y comparar los resultados.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 86 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. ¿Es cierta para matrices cuadradas la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Probar la relación, o suministrar un contraejemplo. Determinar que sucede en el caso especial de las matrices 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. ¿Es el producto de tales matrices conmutativo? Si son distintas de la matriz 0 ¿tienen siempre un inverso multiplicativo?

4. Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando AB, donde A y B son las matrices dadas a continuación:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Siendo A, B y C las matrices dadas a continuación, calcular $(AB)C$ y $A(BC)$. En general, ¿es el producto de matrices 2×2 asociativo?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. ¿Es el producto de matrices asociativo? No suponemos que las matrices son cuadradas, pero si que los productos están bien definidos. Por ejemplo, si A es 2×1, B es 1×2 y C es 2×2, ¿se cumple siempre que $(AB)C = A(BC)$?

7. Hallar las matrices 2×2 reales tales que su cuadrado es $-I$.

8. Calcular CD y DC, donde

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son las matrices diagonales que conmutan con todas las demás?

9. Demostrar que una matriz cuadrada que no es diagonal no conmuta con todas las demás. Deducir de este ejercicio y del anterior la forma de las matrices que conmutan con todas las demás.

10. ¿Es cierto que $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$?

(**Los dos ejercicios siguientes son más bien teóricos**)

11. Se llaman matrices elementales a las obtenidas de la matriz identidad, haciendo alguna de las siguientes transformaciones:

a) Permutación de dos filas.

b) Suma de una fila por otra (distinta), multiplicada por un número.

c) Multiplicación de una fila por un número distinto de cero.

Escribir todas las matrices elementales 3×3.

Escoger una matriz cualquiera de números y comprobar que al multiplicar esta matriz por otra elemental por la izquierda, se realiza en la matriz escogida, la transformación que había tenido lugar para obtener la matriz elemental. Generalizar el resultado.

12. Usar las ideas del ejercicio anterior para observar que el método de Gauss para obtener la inversa por la izquierda de una matriz cuadrada muestra que, cuando existe, ésta es también la inversa por la derecha.

13. Una matriz *simétrica* (respectivamente, *antisimétrica*) es aquella que cumple $A = A^T$ (respectivamente, $A = -A^T$).

Probar que una matriz antisimétrica tiene nulos todos los elementos en la diagonal principal.

14. Una matriz que es simétrica y antisimétrica ha de ser la matriz nula (todos sus elementos son 0).

15. Probar que:

1. Dada una matriz cuadrada A, la matriz $(A + A^T)/2$ es simétrica.
2. Dada una matriz cuadrada A, la matriz $(A - A^T)/2$ es antisimétrica.
3. Toda matriz cuadrada se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

16. Entre las matrices cuadradas complejas se definen las matrices *hermíticas* como aquellas que verifican $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todo par ij (o bien, $A = \overline{A^T}$). Respectivamente, las *antihermíticas* como aquellas que verifican $A = -\overline{A^T}$.

Probar que:

1. Una matriz hermítica tiene todos los elementos de la diagonal principal reales.
2. Una matriz antihermítica tiene todos los elementos de la diagonal principal imaginarios puros.
3. Una matriz a la vez hermítica y antihermítica ha de ser la matriz nula.
4. Toda matriz cuadrada compleja se puede escribir como suma de una matriz hermítica y otra antihermítica.