ALGEBRA I. HOJA 3

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} x+2y-z &=& 7\\ 2x+y+z &=& 6\\ x-y+3z &=& -1\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y-5z-2 &=& 0\\ 3x-y+2z+1 &=& 0\\ 5x+4y-6z-3 &=& 0\end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+4z+8t &=& -1\\ x+3y-6z+2t &=& 3\\ 3x-2y+2z-2t &=& 8\\ 2x-\ y+2z &=& 4\end{array}\right.$$

Sol: a)(5/3,8/3,0), b)(-1/5,14/5,6/5), c)(2,-3,-3/2,1/2).

2. Hallar los valores de a para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados.

$$a)\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{array}\right\} \qquad b)\left.\begin{array}{r} ax+y+2z=-2\\ 2x+y+az=3\\ x+ay+2z=-2\end{array}\right\} \qquad c)\left.\begin{array}{r} -x+ay+az=0\\ ax-y+az=0\\ ax+ay-z=0\end{array}\right\}$$

Sol: a) $a=1$ b) $a=-3$ ó $a=1$ c) $a=-1$ ó $a=\frac{1}{2}$

3. Hallar los valores de a y b que hagan compatibles los sistemas

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} bx-ay-az &=& a\\ -bx\qquad -az &=& a\\ -bx-by-bz &=& b\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcl} bx-ay-az-at &=& a\\ -bx\qquad -az-at &=& a\\ -bx-by\qquad -at &=& a\\ -bx-by-bz &=& a\\ -bx-by-bz-bt &=& b\end{array}\right.$$

Sol: a) Para cualesquiera valores de a y b, b) Si $a=0$ o si $a=-b$.

4. Aplica el método de Gauss para discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5\\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 7\\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 10x_2 & - & x_3 & = & -15\\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6\\ x_1 & + & 14x_2 & + & 7x_3 & = & -1\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2\\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 9\\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 4\\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 9\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 7\\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1\\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 6\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 5 \\ x & + & & & z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 2y & & & & & = & 0 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & 9x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$

Soluciones: i) $\left(\frac{67}{11}, -\frac{28}{11}, \frac{9}{11}\right)$; ii) incompatible; iii) $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\alpha, \alpha\right) | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; iv) $(1, 13, 33)$; v) $(2, 8, 21)$; vi) $(0, 0, 0)$; vii) $(-8, 4, -1, 5)$; viii) $(-1, 0, 1)$; ix) $\{(59\alpha, -22\alpha, -17\alpha, 9\alpha) \, | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

5. Cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene dos términos independientes. Resuélvelos a la vez mediante el método de Gauss.

1. $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr|r} 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & 10 & -8 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -4 & -2 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & 9 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -11 & -15 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{rcrcrcr|r} 2x_1 & - & 4x_2 & & & = & 10 & -8 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 & -2 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 4 & 9 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & - & x_3 & = & 10 & -15 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr|r} 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & 10 & -8 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -4 & -2 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & 9 \end{array}\right\}$

Soluciones: i) $\left(\frac{97}{13}, \frac{16}{13}, -\frac{157}{13}, -\frac{101}{13}\right)$ y $(0, 2, -1, 4)$; ii) $(23, 9, 19)$ e incompatible;
iii) $\{(23 + 2\alpha, 9 + \alpha, 19 + 4\alpha, \alpha) \, | \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $\{(-8 + 2\alpha, -2 + \alpha, -17 + 4\alpha, \alpha) \, | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular AB y A^n, $n \in \mathbb{N}$.

7. Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular, si existe, la inversa (por la derecha) de las siguientes matrices.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

8. Definiendo el rango de una matriz como el número de pivotes en cualquier forma escalonada de dicha matriz, estudiar los rangos de las siguientes matrices como función de λ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$