ÁLGEBRA I. HOJA 2

1. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{1+i}, \qquad \sqrt{-2+2i}.$$

   Comparando las expresiones determinar el valor de $\cos(\pi/8)$ y $\cos(3\pi/8)$.

   Comprobar que $\cos^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) = 1$. ¿Porqué?

2. Expresar las siguientes raíces en forma binómica utilizando la forma trigonométrica correspondiente.

$$\sqrt[4]{-16}, \qquad \sqrt[3]{-8}, \qquad \sqrt[3]{-27i}, \qquad \sqrt[4]{16i}.$$

3. Hallar las raíces cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.

4. Hallar las raíces quintas de la unidad. Señalar cuáles son las raíces que son conjugadas entre sí.

5. Hallar las siguientes raíces:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt[6]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

   ¿Cómo están relacionadas entre sí?

6. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

   $x^6 + 1 = 0, \qquad x^6 + 2x^3 + 1 = 0.$

7. Habiendo comprobado que $(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)(x-1) = x^n - 1$, demostrar que

   a) Las soluciones complejas y las soluciones reales de $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ son raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad.
   b) La ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real.
   c) La ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿Cuál es la solución real si n es impar?
   d) Las raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$.

8. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

   $x^6 + x^5 - x - 1 = 0, \qquad x^7 + x^6 - x - 1 = 0.$

9. Demostrar las fórmulas:

   (i) $|z+1|^2 - |z-1|^2 = 4\Re z$; (ii) $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 2 + 2\,|z|^2$.

10. Deducir de la fórmula de De Moivre $(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)$

   a) Las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple.
   b) Las fórmulas análogas para el ángulo quíntuple.

11. La igualdad $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ es más fácil de recordar que las fórmulas para los cosenos y los senos de las sumas y diferencias de ángulos. Derivad dichas fórmulas usando $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.

12. Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$.

13. Usando como definición

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc,$$

resolver las ecuaciones

(a) $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0;$ **(b)** $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$

Losos números λ obtennidos se llaman **autovalores** de las matrices correspondientes.

14. Encontrar todos los autovalores de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix};$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$