ÁLGEBRA I. HOJA 1

1. Resolver $iz + (2 - 10i)z = 3z + 2i$.

   Solución: $-9/41 - i/41$.

2. Resolver el sistema $(i+1)z + (2-i)w = -3i, (2i+1)z + (3+i)w = 2 + 2i$.

   Solución: $z = -1 + 5i, w = 19/5 - 8i/5$.

3. Hallar los siguientes números complejos en forma binómica $a + bi$:

$$(1+2i)(1-2i),\ \frac{1+2i}{1-2i}, \qquad \left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2, \qquad \frac{(1+2i)^3}{(2-i)^3},\ \frac{(1+2i)^3}{(2-2i)^3}.$$

4. De los números complejos enunciados a continuación calcular su módulo y su argumento y escribirlos en forma trigonométrica o polar.

$$1+i,\ 1-i, \qquad -1-i, \qquad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

5. Demostrar utilizando la forma binómica y la forma polar de los números complejos que:

   a) El producto de un número por su conjugado es un número real.

   b) El cociente de un número por su conjugado es de módulo 1. Observar que la demostración usando la forma polar es más corta.

   c) Comprobar los resultados anteriores en los cálculos siguientes:

$$(1+2i)(1-2i), \qquad \frac{3+4i}{3-4i},$$

   d) Utilizar los resultados anteriores para calcular:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

6. Probar la asociatividad de la multiplicación de números complejos usando su expresión en forma polar y comparar la simplicidad del cálculo respecto del que hay que hacer para demostrarla en forma binómica.

7. Calcular en forma polar y en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{-4}, \qquad \sqrt{i}, \qquad \sqrt{-i}.$$

   Comprobar que los resultados son los mismos.

8. Comprobar que $(1+i)^{12} = -64$, y $((1-i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

9. Demostrar a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, y b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

10. Demostrar que para todo polinomio $p(z)$ con coeficientes reales, $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

11. Demostrar:

    a) $|\overline{z}| = |z|$.

    b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ usando coordenadas rectangulares.

    c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

12. Escribir en coordenadas polares $4+i, -3/2-i/2, -1+2i$. (Recordatorio: las coordenadas rectangulares, o cartesianas, o binómicas, son de la forma $a+ib$; las polares, $re^{i\alpha}$).

13. Resolver $z^3 = i$ en coordenadas polares y rectangulares.

    Solución (parcial): $\sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2, -i$.

14. Resolver $z^2 = -8 - 6i$.

15. Resolver $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.

    Solución: $2-i, 1+2i$.

16. Escribir $\sum_{n=0}^{99}(i+1)^n$ en coordenadas rectangulares y polares. Solución: $(1+2^{50})i$.

17. Resolver las siguientes ecuaciones i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; ii) $z^4 = i$; iii) $z^3 = -8i$.

    Soluciones a iii): $z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

18. Usando $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, donde x es un número real, demostrar que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

19. Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

20. Resolver la ecuación $z^2 - (1+i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos.