Algebra I (Segunda prueba parcial)

APELLIDOS: ______________________________
NOMBRE: ______________________________ DNI/NIE: ______________________________

Ejercicio 1 (9 puntos). Sea $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cualquier matriz tal que $B \neq I$, $(B-I)^2 = 0$. Elegimos cualquier vector $\vec{v}_1$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $B\vec{v}_1 \neq \vec{v}_1$ y ponemos $\vec{v}_2 = B\vec{v}_1 - \vec{v}_1$.

a) (2 puntos) Demostrar que $B\vec{v}_2 = \vec{v}_2$. Demostrar que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes y que, por tanto, $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que $[B]_{VV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) (3 puntos). Sea $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar que $(B-I)^2 = 0$. Definir $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y comprobar las afirmaciones del apartado a) para este caso concreto. Haciendo un cambio de bases, encontrar una matriz K tal que

$$K^{-1}BK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) (2 puntos). Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentra una fórmula para A^n y decide si existen los límites $\lim_{n\to\infty} A^n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} A^n$.

d) (2 puntos). Calcular los límites $\lim_{n\to\infty} B^n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} B^n$ (si existen).

Ejercicio 2 (6 puntos). Se consideran 4 matrices $A \in M_{m\times m}$, $B \in M_{m\times n}$, $C \in M_{n\times m}$ y $D \in M_{n\times n}$ tales que A es invertible. Demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

Aplicar esta fórmula para calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Indicación: Utilizando las operaciones matriciales por bloques, calcular la matriz $(m+n)\times(m+n)$

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

y pasar a determinantes.