

Clase 6: sigue Secciones 3.2, 3.3 de apuntes  
de F. Quiro's

Clase 7

\*) Comentarios adicionales sobre  
espacios de Hilbert.

A) Como vimos, en cualquier  
espacio pre-Hilbert se cumple  
la identidad del paralelogramo. Es  
cierta también la afirmación inversa?

Teorema de Jordan-von Neumann-Frechet  
Si en un espacio normado  $X$   
se cumple la identidad del paralelo-  
gramo para cualquier par de  
vectores, entonces la norma está  
generada por un producto interno, es  
decir,  $X$  es pre-Hilbert.

Es cierto tanto en caso real como  
en caso complejo.

Referencia: P. Jordan, J. von Neumann,  
On inner products in linear, metric spaces,

Ann. Math. Second ser., 36 No 3 (1935),  
719-723.

B) No daremos la prueba de este teorema.

B) Una fácil observación consiste en que si tenemos un sistema ortonormal  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  y una serie (ortogonal) convergente  $y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$  en nuestro espacio de Hilbert  $H$ , entonces esta suma es no condicional, es decir, no depende del orden de los sumandos.

Lo dejo como ejercicio.

C) Los conceptos del sistema ortonormal y de base ortonormal se extienden a sistemas no numerables. Esto permite extender resultados anteriores a espacios de Hilbert no separables.

Recomiendo mirar los apuntes de J. García-Cuerva para profundizar en este tema. Aquí solo haremos su breve resumen.

C1) Sea  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert  $H$ , donde el conjunto de índices  $A$  puede tener cualquier cardinalidad. Entonces la desigualdad de Bessel implica que  $\forall x \in H$ , el conjunto de índices

$$\{\alpha \in A : \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0\}$$

es numerable. (Recordamos que  $\langle x, e_\alpha \rangle$  son coef'tes de Fourier de  $x$ ).

Se dice que un sistema ortonormal  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  ( $\subset H$ ) es una base ortonormal

Si

$$\forall x \in H, \quad x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha.$$

(es, según lo anterior, una suma numerable, aunque  $A$  fuese no numerable).

Si un sistema ortonormal  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es maximal (es decir, no se incluye en ningún sistema ortonormal mayor), entonces es una base ortonormal. Aplicando el lema de Zorn, deducimos de aquí la existencia de bases ortonormales en cualquier espacio de Hilbert.

(2) Se tienen las mismas caracterizaciones equivalentes de bases ortonormales que en el caso de sistemas numerables

(Teor 24, p. 49 de los apuntes de F. Quiro's).

Por ejemplo,  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una base ortonormal de  $H$  (siendo  $A$  de cualquier cardinalidad)  $\Leftrightarrow$

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \quad \forall x \in H.$$

(la igualdad de Parseval).

Ver apuntes de Pepe García-Cuerva, Teor. 1.4.8, p. 35-36.

(3) Si  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una base ortonormal de  $H$ , entonces

$$T: x \in H \mapsto \{\langle x, e_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$$

es un isomorfismo (lineal) isométrico de  $H$  sobre el espacio

$$l_K^2(A) = \{c = \{c_\alpha\}_{\alpha \in A} : c_\alpha \in K,$$

$$\|c\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 < \infty\}.$$

Por supuesto, cada elemento  $c \in l_{\mathbb{K}}^2(A)$ , que es, básicamente, una función  $c: A \rightarrow \mathbb{K}$ , solo tiene un número numerable de coeficientes  $c_\alpha$  no nulos.

Si  $A = \mathbb{N}$ ,  $l_{\mathbb{K}}^2(A)$  es simplemente  $l_{\mathbb{K}}^2$ .

C4) Dos espacios de Hilbert  $H_1$  y  $H_2$  sobre  $\mathbb{K}$  son isomorfos si y solo si sus bases ortonormales tienen el mismo cardinal.

En particular, dos bases ortonormales en el mismo espacio de Hilbert tienen siempre el mismo cardinal.

El menor cardinal infinito es  $\aleph_0$  (alef-sub-cero); le corresponde,

Como sabemos, espacios de Hilbert separables.

Lo anterior es un teorema de clasificación de espacios de Hilbert.

Ejemplo Sea  $1 \leq p < \infty$ .

Consideremos el espacio  $AP^p$ , que consiste de funciones complejas en  $\mathbb{R}$ , que están en  $L^p_{loc}(\mathbb{R})$  y pueden ser aproximadas por polinomios trigonométricos en la

Seminorma

$$\|f\|_{B^p} = \limsup_{l \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Por polinomios trigonométricos, entendemos sumas finitas

$$g(x) = \sum_{k=1}^m c_k e^{i\lambda_k x}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Dos funciones en  $B^p$  se consideran iguales si coinciden en c.t.p. Entonces  $B^p$  es un espacio de Banach para todo  $p \in [1, +\infty)$  y es un espacio de Hilbert para  $p=2$ . El sistema  $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  es una base ortonormal (no numerable) de  $B^2$ .

Se dice que funciones en  $B^p$  son casi periódicos en el sentido de Besicovitch.

Referencia: A.S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge Univ. Press, 1954.

Observación: Si  $H$  es un espacio pre-Hilbert y hacemos su completación como un espacio normado, obtendremos un espacio



de Hilbert. No es difícil de demostrar, lo dejo como ejercicio a los interesados.

§. La distancia de un punto a un conjunto.

El plan de la exposición sigue los apuntes de F. Quirós. Sin embargo, lo haremos no solo para espacios de Hilbert, sino para una amplia clase de espacios de Banach, que juega un papel importante en la teoría.

Definición Un espacio de Banach  $X$  se dice que es uniformemente convexo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x, y \in \overline{B}_1(0) \subset X, \quad (*)$$

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

## Ejemplos

1)  $l^\infty$  no es uniformemente convexo.

Efectivamente, la condición no se cumple para ningún  $\varepsilon > 0$  (poner

$$x = (1, 1, 0, 0, \dots), \quad y = (1, -1, 0, 0, \dots),$$

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1).$$

2)  $l^1$  no es uniformemente convexo (¡comprobar!).

Proposición Todo espacio de Hilbert (real o complejo) es uniformemente convexo.

Demostración Si los vectores  $x, y$  cumplen las hipótesis (\*) de la página anterior, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 < \\ &< \frac{1}{2} (1+1) - \frac{\varepsilon^2}{4} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

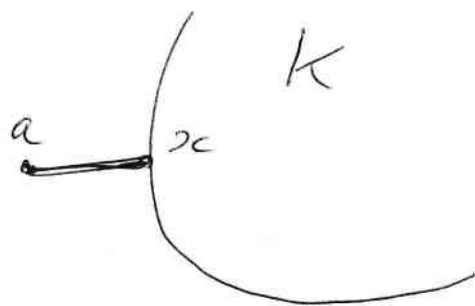
Por tanto, podemos poner  $1-\delta = \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}} < 1$ . □

Teorema Sean  $X$  un espacio de Banach uniformemente convexo,  $K$  un subconjunto de  $X$  cerrado y convexo y  $a \notin K$  un punto. Entonces  $\exists!$  punto  $x \in K$  tal que

$$\|x - a\| = \min_{y \in K} \|y - a\|$$

(es decir,  $x$  es el punto de  $K$ , más cercano al punto  $a$ ).

En particular, esto es cierto para espacios de Hilbert.



Idea de la demostración:

Denotamos por  $d$  la distancia de  $a$  a  $K$ :

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in K} \|y - a\|.$$

Ahora mismo no sabemos si se alcanza el mínimo. Pero, obviamente, va a existir una sucesión minimizante  $\{y_n\} : y_n \in K \forall n$ , y además,

$$\|y_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d.$$

Demostar ahora, utilizando la convexidad uniforme de  $X$ , que  $\{y_n\}$  es una sucesión de Cauchy:  $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$  si  $n, m \rightarrow \infty$ . (Para ello hay que reescribir primero la condición (\*), pág 82, para bolas de un radio  $r$  arbitrario). Siendo  $X$  de Banach, concluimos que  $\exists x \in \bar{X} : y_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ . Es fácil ver que  $x \in K$  y que  $x$  es el punto que buscábamos.

La convexidad uniforme

implica también fácilmente que tal punto  $x$  es único.  $\square$

Por si acaso, os recuerdo que un subconjunto  $K$  de un espacio vectorial  $X$  sobre  $\mathbb{K}$  se dice que es convexo si  $[x, y] \subset K$  para todo par de puntos  $x, y \in K$ . Aquí  $[x, y]$  es el intervalo en  $X$  con extremos en  $x$  e  $y$ :

$$[x, y] = \{ tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1 \}.$$

La razón por la que he definido espacios de Banach uniformemente convexos es el siguiente

Teorema de Milman - Pettis

(aprox. 1939) Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

Se puede demostrar que el espacio  $L^p(\mu)$ , donde  $\mu$  es cualquier medida, es uniformemente convexo si  $1 < p < \infty$ . Es el contenido de las dos desigualdades de Clarkson. Por lo tanto,  $L^p(\mu)$  es reflexivo para toda medida  $\mu$  si  $1 < p < \infty$ .

Como regla, si  $p=1$  o  $p=\infty$  y  $L^p(\mu)$  es infinito dimensional, entonces no es reflexivo.

Volveremos a este tema más tarde.

CLOSE 8: sigue los apuntes de F. Quirós (Teor. 28, p. 52 - el final de la pág. 54).