

Obs: Alternativamente,  $P_n$  se

define por

$$P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in X.$$

Es deajo la demostración de este lema. La idea es que para toda base de Schauder  $\{e_n\}$ ,

$$P_n \xrightarrow{\text{SOT}} I.$$

Clase 4

Propiedades de la convergencia

fuerza de operadores

1) Sean  $T_n, S_n: X \rightarrow Y$  operadores

lineales continuos,  $T, S \in L(X, Y)$ ,

$$T_n \xrightarrow{\text{SOT}} T, S_n \xrightarrow{\text{SOT}} S. \text{ Sean } \lambda, \mu \in \mathbb{K},$$

Entonces

$$\lambda T_n + \mu S_n \xrightarrow{\text{SOT}} \lambda T + \mu S.$$

Se sigue de la definición de la con. fuerte de operadores.

2) (el comportamiento respecto del producto). Supongamos que tenemos,

$$X \xrightarrow{T_n} Y \xrightarrow{S_n} Z$$

donde  $X, Y, Z$  son espacios de Banach, y  $S_n \xrightarrow{SOT} S, T_n \xrightarrow{SOT} T$  (donde  $S \in L(Y, Z)$ ,

$T \in L(X, Y)$ ). Entonces

$$\boxed{S_n T_n \xrightarrow{SOT} ST.}$$

Demostración.

Para cualquier  $x \in X$ , estimamos:

$$\|S_n T_n x - STx\| \leq \|S_n T_n x - S_n T x\|$$

$$+ \|S_n T x - STx\| \leq$$

$$\|S_n\| \|T_n x - T x\| + \|S_n T x - STx\|.$$

Por un lema anterior (pág 41),

$$\|S_n\| \leq C < \infty. \text{ Como } T_n x \rightarrow T x$$

y  $S_n T x \rightarrow S T x$  (en norma), vemos

que

$$S_n T_n x \rightarrow S T x \text{ en norma.}$$

□

Notese que el lema que hemos usado utiliza el Teo Banach-Steinhaus,

Capítulo 4 Dualidad de espacios normados

y de operadores

§ 1. El dual de  $C(X)$ .

Referencia: J.B Conway, A course in Functional Analysis, Second edition. Springer 1990. Appendix C.

En esta sección, nos dedicaremos al siguiente resultado.

# Teor (Teorema de representaci3n de

F. Riesz).

Sea  $X$  un subconjunto

compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $M(X)$  el conjunto de todas las medidas finitas de Borel  $\mathbb{R}$ -valuedas.

Dada cualquier medida  $\mu \in M(X)$ , consideramos el funcional lineal

$$F_{\mu} : C(X) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F_{\mu}(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C(X).$$

Entonces  $F_{\mu} \in C(X)'$ , y el mapa

$\mu \mapsto F_{\mu}$  es un isomorfismo lineal isom3rico de  $M(X)$  sobre el espacio dual  $C(X)'$ .

De forma m3s precisa, se

puede demostrar que

el espacio dual a  $C_{||\cdot||}(X)$  es isométricamente isomorfo a  $M_{||\cdot||}(X)$ .

Obs: En este tema, asumiremos que una medida de Borel sobre  $X$  (o sobre  $\mathbb{R}^n$ ) está definida solo sobre conjuntos borelianos.

He optado por no dar una demostración completa de este teorema, tomando en cuenta las restricciones de tiempo. Demostraremos solo una parte, intentando con ello dar unas ideas claras sobre este destacable resultado.

Tenemos que recordar primero

Teorema de Nicolai Luzin (1883-1950)

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un compacto,  $\mu \in M_+(X)$  una medida no negativa boreliana finita,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  medible (respecto del  $\sigma$ -alg. de conjuntos de Borel) y acotada. Entonces  $\forall \varepsilon > 0$  existe una función  $g_\varepsilon \in C_K(X)$

y un subconjunto cerrado  $E \subset X$  tal que

$$\mu(X \setminus E) < \varepsilon, \quad f|_E = g_\varepsilon|_E.$$

En otras palabras, cualquier función medible y acotada puede ser aproximada en el sentido de convergencia en medida por una función continua.

Referencia: Evans, Gariepy, Measure theory and fine properties of functions,

CRC Press, 1992.

Heck's miso en un curso avanzado de variable real alguna versión del Teorema de Luzin.

## Recordatorios

(1.) El  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos Borelianos de  $\mathbb{R}^n$  es el mínimo  $\sigma$ -álgebra generado por todos los abiertos,

(2) Sea  $X$  como antes y  $\mathcal{R} =$  subconjuntos Borelianos de  $X$ . Dada cualquier medida finita con signo (si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) o cualquier medida finita compleja (si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), definimos

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_1^m |\mu(A_i)| : \right.$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \\ \left. \text{(una unión disjunta)} \right\}.$$

Entonces  $|\mu| \in M_+(X, \mathcal{R})$  (es decir,  $|\mu|$  es una medida no negativa finita).

Se conoce que  $\exists$  una función  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,

$|f|=1$  para  $|x|$  - casi todo punto

tal que  $\mu = f |d\mu|$ ,

(Lo que significa simplemente

que  $\mu(A) = \int_A f |d\mu| \quad \forall A \in \mathcal{R}$ ).

— 0 — 0 — 0 — 0 —

Observamos que, análogamente al

teorema sobre el dual de  $L^p$ , el  
Teorema de representación de Riesz consiste  
de 2 afirmaciones:

Afirmación 1 La aplicación

$$\mu \in M(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \in C_b(\mathbb{R})'$$

es una isometría;

Afirmación 2 La imagen de esta



aplicación lineal es todo el espacio dual a  $C_K(\bar{X})$ .

Es decir,  $\forall \varphi \in C_K(\bar{X})'$

$\exists \mu \in M_K(X) : \varphi = F_\mu$ .

Demonstración de la Afiración 1:

Primero observamos que:

$\forall f \in C(\bar{X})$

$$|F_\mu(f)| = \int_X |f| d|\mu| \leq \|f\|_{C(X)} \|\mu\|_{M(X)}$$

Luego  $\|F_\mu\| \leq \|\mu\|_{M(X)}$ .

Para demostrar la igualdad:

$$\text{Sea } \varphi = \frac{d\mu}{|d\mu|}, \quad |\varphi| = 1 \quad |\mu| - a.e.$$

Tomando  $L_{\varphi, \mu} \Rightarrow$

$\exists \varphi \in C(X)$  continua:

$$\|\varphi\|_\infty \leq 1, \\ |\mu| \{ t \in \bar{X} : \varphi(t) \neq \varphi(t) \} = \varepsilon$$

Luego

$$\int_X |\varphi - \bar{\varphi}| |d\mu| < 2\varepsilon$$

(¿por qué?).

Por consiguiente,

$$\|\mu\| = \int_X \varphi \bar{\varphi} |d\mu| = \int_X \bar{\varphi} d\mu =$$

$$= \left| \int_X \bar{\varphi} d\mu \right| \leq \left| \int_X (\bar{\varphi} - \bar{\varphi}) d\mu \right| + \left| \int_X \bar{\varphi} d\mu \right|$$

$$\leq \int_X |\bar{\varphi} - \bar{\varphi}| |d\mu| + |F_\mu(\bar{\varphi})| \\ \leq 2\varepsilon + \|F_\mu\|.$$

Así que

$$\|\mu\| \leq 2\varepsilon + \|F_\mu\| \quad \forall \varepsilon > 0,$$

Conclusión:  $\|\mu\| \leq \|F_\mu\|$ ;  $\|\mu\| = \|F_\mu\|$ .  $\square$

La idea de esta prueba es que

Sólo podemos testar el funcional  $F_n$  en funciones continuas, pues resulta que  $F_n$  casi siempre se reduce en la función continua  $\bar{\varphi}$ .

Podéis mirar el mencionado Libro de Conway para ver la demostración de la Afirmación 2.

De hecho, Conway da un enunciado más general del  $\mathcal{T}_m$  de Representación de Riesz, que se aplica a cualquier compacto topológico  $X$ .

Def Sea  $X$  un espacio topológico

compacto, y sea  $\mathcal{R} = \{ \text{conjuntos Borelianos} \subset X \}$ ,

Sea  $\mu \in M_+(X) = M_+(X, \mathcal{R})$  una medida de Borel finita no negativa.

Decimos que  $\mu$  es regular si

$$1) E \in \mathcal{R} \Rightarrow$$

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto} \};$$

$$2) E \in \mathcal{R} \Rightarrow$$

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \supset E, U \text{ abierto} \}.$$

Def Una medida  $\mu$  con signo ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) o compleja ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) <sup>finita</sup> se dice que es regular si  $|\mu|$  es regular.

Teorema de representaci3n de F. Riesz,

versi3n general. Sea  $X$  un compacto

topol3gico. Denotamos por  $M(X)$  el conjunto de todas las medidas finitas de Borel con valores en  $\mathbb{K}$ .  
Regulares  
Definimos  $F_\mu$  ( $\mu \in M(\mathbb{K})$ ) como antes.

Enonces el mapa  $\mu \mapsto F_\mu$  es un isomorfismo lineal isométrico de  $M(X)$  sobre el espacio  $C_{\mathbb{R}}(X)$ .

Hay que añadir que, según se conoce, toda medida finita sobre  $\mathbb{R}^n$  es regular. Luego estas dos versiones del Tma de Representación de Riesz son lo mismo en el contexto de un compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

Obs.: Siempre se supone que el espacio  $X$  es de Hausdorff, El teorema que hemos discutido lleva también el nombre más largo:

Teorema de representación de Riesz - Markov - Kakutani. Los autores son: el matemático húngaro Frigyes Riesz,

quien en 1909 lo demostró para el caso cuando  $X \subset \mathbb{R}$  es un intervalo, Andrei Markov, quien en 1938 extendió este resultado a algunos espacios no compactos, y Shizuo Kakutani, quien demostró el teorema en 1941 para espacios compactos de Hausdorff.

## § 2 El operador dual.

En esta sección, dado un operador  $T: X \rightarrow Y$ , definiremos el operador dual

$$T': Y' \rightarrow X',$$

y discutiremos sus propiedades.

Def Sea  $X \xrightarrow{T} Y$ .

Dado cualquier funcional lineal