

$Q \subset P$ tiene una cota superior. Entonces P tiene (al menos) un elemento maximal.

Recordamos también que $Q \subset P$ es una cadena si (Q, \leq) es un orden lineal: $\forall a, b \in Q$ $(a \leq b)$ o $(b \leq a)$.

Mirad por favor este lema y sus corolarios usuales, si no lo recordáis.

Pasamos ahora a la demostración del T^{ma} H-B. En esta demostración, se van a usar funcionales lineales

$h: D(h) \xrightarrow{\subset E} \mathbb{R}$, donde $D(h)$ es un subespacio (¡otra vez sólo en el sentido algebraico!) de E .

Obs: Funcionales lineales (y operadores lineales), definidos sólo sobre un subespacio de un espacio vectorial o normado E , son muy comunes en la Teoría de operadores lineales no acotados. Típicamente, la expresión para h contiene diferencia-

ción, con lo cual h no está definido sobre todo E . La notación $D(h)$ se usa en este (y en otros) contextos. Un ejemplo:

$E = C_{\mathbb{R}}[0,1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $h(f) = f'(1)$
(donde $f \in E$). Entonces h no está definido sobre todo E , pero sí está definido sobre
 $D(h) = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0,1] : \exists f'(1)\}.$

Pues ya es hora de pasar a la demostración de H-B. Repito que en el contexto de (esta versión del) Tma H-B, E es simplemente un espacio vectorial y no tiene asociada ninguna norma.

Demo Tma H-B Definimos el conjunto ordenado

$$P = \{ h: D(h) \xrightarrow{C \in E} \mathbb{R} :$$

$D(h)$ es un subesp. vectorial de E ,
 h lineal, $G \subset D(h)$, h extiende a g ,
 $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(h)$.

Primero observamos que $P \neq \emptyset$, porque
 $g \in P$.

Queremos aplicar a P el lema de Zorn.
 Introducimos el orden \leq en P :

Def $h_1 \leq h_2$ si h_2 extiende h_1

[esto significa que $D(h_1) \subset D(h_2)$ y que,
 además, $h_2|_{D(h_1)} = h_1$].

Paso 1: Veamos que el orden P
 es inductivo.

Efectivamente; sea $Q \subset P$ una cadena.

Podemos escribir:

$$Q = \{ h_i \}_{i \in I}$$

[el conjunto de índices I puede ser
 muy grande, más grande que \mathbb{N}].

Definimos ahora

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i), \text{ y}$$

$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$ para algún índice i .

Esta definición es correcta [miradlo].

Además, h es una cota superior de Q .

Por el Lema de Zorn, el orden definido en P tiene un elemento maximal.

Paso 2 Sea f un elemento maximal de (P, \leq) . Afirmamos que $D(f) = E$.

Supongamos que, por el contrario, $D(f) \neq E$. Vamos a definir entonces, partiendo del funcional lineal f , un nuevo funcional lineal $h \in P$ con $D(h) \supsetneq D(f)$. Esto daría una contradicción.

Escogemos un $x_0 \notin D(f)$.

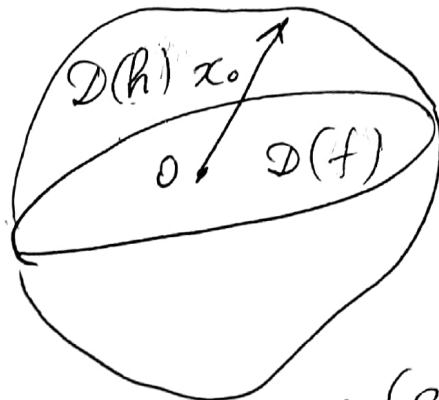
Ponemos $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$.

Está claro que todos los valores de h sobre este espacio vectorial se determinan, en cuanto fijemos el valor de $h(x_0)$. Pues llamamos

$$h(x_0) := \alpha (\in \mathbb{R}).$$

Queremos demostrar que este α puede ser elegido de tal manera que

$$h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \quad (2.1) \\ (\forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R})$$



Observamos primero que $(2.1) \Leftrightarrow$

$$\checkmark \quad f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0), \quad x \in D(f), t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Consideremos 2 casos.

1) $t > 0$.

$$(2.2) \Leftrightarrow t\alpha \leq p(x+tx_0) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \alpha &\leq \frac{1}{t} p(x+tx_0) - \frac{1}{t} f(x) \\ &= p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) - f\left(\frac{x}{t}\right) \\ &= p(u+tx_0) - f(u), \end{aligned}$$

donc $u = \frac{x}{t} \in \mathcal{D}(f)$.

2) $t < 0$.

$$(2.2) \Leftrightarrow t\alpha \leq p(x+tx_0) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\alpha &\leq \frac{1}{-t} p(x+tx_0) - \frac{1}{-t} f(x) \\ &= p\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) - f\left(\frac{x}{-t}\right) \end{aligned}$$

$$= p(w - x_0) - f(w)$$

$$[\text{prenons } w = \frac{x}{-t} \in \mathcal{D}(f)]$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq f(w) - p(w - x_0).$$

Entonces basta satisfacer:

$$\boxed{f(w) - p(w - x_0) \leq \alpha \leq p(u + x_0) - f(u)} \quad (2.3)$$
$$\forall u, w \in \mathcal{D}(f).$$

Sabemos:

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Luego $\forall u, w \in \mathcal{D}(f)$

$$\begin{aligned} f(u) + f(w) &= f(u+w) \leq p(u+w) \\ &= p((u+x_0) + (w-x_0)) \\ &\leq p(u+x_0) + p(w-x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall u, w \in \mathcal{D}(f)$

$$f(w) - p(w-x_0) \leq p(u+x_0) - f(u).$$

De esta manera, se puede escoger

$$\alpha = \sup_{w \in \mathcal{D}(f)} (f(w) - p(w-x_0)).$$

Es decir, f no es un elemento maximal. Esta contradicción nos dice que en realidad, $\mathcal{D}(f) = E$. \square

Observad que en el Teorema de Hahn-Banach, E se suponía un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (y no se dotaba de ninguna norma asociada).

Caso complejo del T^{ma} H-B.
~~~~~

En esta Sección, adoptamos la siguiente notación. Sea  $X$  un espacio normado sobre  $\mathbb{C}$ . Entonces por  $X_{\mathbb{R}}$  entendemos el mismo espacio, considerado sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ .  
Empezamos con el siguiente

Comentario Supongamos que tenemos un funcional lineal  $\ell \in (X_{\mathbb{R}})^{\#}$ , donde

Recordatorio:  $Y^{\#}$  es el espacio vectorial de todos los funcionales lineales  $Y \rightarrow \mathbb{K}$ , definidos sobre  $Y$ .



$X$  es un espacio vectorial complejo  
(seguimos considerando espacios vectoriales  
sin ninguna norma o topología).

Afirmamos que entonces existe un único  
funcional lineal  $L \in X_{\mathbb{C}}^{\#}$  tal que

$$\boxed{l = \operatorname{Re} L.} \quad (2.4)$$

Efectivamente, el funcional  $L(x)$  se  
escribe como

$$\begin{aligned} L(x) &= \operatorname{Re} L(x) + i \operatorname{Im} L(x) \\ &= \operatorname{Re} L(x) + i \operatorname{Re}(-ix) \quad (2.5) \\ &= l(x) - i l(ix). \end{aligned}$$

Así que no habrá más que un  
funcional  $L \in (X_{\mathbb{C}})^{\#}$  que satisfaga  
(2.4). Por otro lado, dado un  $l$ ,  
la fórmula (2.5) sí define funcional  
 $L$ , lineal en el sentido complejo.  
Para verlo, basta comprobar que  
 $L(ix) = i L(x)$ . Es un cálculo:

$$L(ix) = l(ix) - il(-x) = iL(x).$$

Teor (Hahn-Banach, forma compleja).

Sea  $E$  un espacio vectorial complejo,  
 $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  sublineal,  $G \subset E$  un subespacio,  
 $L: G \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal complejo  
 sobre  $G$  tal que

$$\operatorname{Re} L(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Entonces  $\exists$  un funcional lineal complejo

$F: E \rightarrow \mathbb{C}$  que extiende  $L$ , tal que

$$\operatorname{Re} F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Demo Ponemos  $l = \operatorname{Re} L \in G^\#$ . Según lo anterior,  $L(x) = l(x) - il(ix)$ . Por T<sup>ma</sup> HB, forma real,  $\exists$  una extensión  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  de  $l$ ,  $f \in E^\#$ , tal que  $f(x) \leq p(x)$ ,  $\forall x \in E$ .

Ahora ponemos

$$F(x) = f(x) - i f(ix), \quad x \in E.$$

Tenemos:  $f|_G = l \Rightarrow F|_G = L.$

Además,  $f = \operatorname{Re} F.$

Luego  $\operatorname{Re} F(x) = f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E. \quad \square$

Recordamos la notación:

Dado un espacio vectorial  $X$  (posiblemente normado),  $X^\#$  son todos los funcionales  $\mathbb{K}$ -lineales. Si  $X$  es normado,  $X'$  consiste de funcionales  $\mathbb{K}$ -lineales continuos.

Corol. Sea  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ,  $X$  un espacio normado,  $U \subset X$  su subespacio. Entonces  $\forall$  funcional lineal continuo  $g: U \rightarrow \mathbb{K}$   
 $\exists f \in X'$  tal que  $f|_U = g$ ,  $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X'}.$

Prueba Caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (caso real)

Definimos

$$p(x) = \|g\| \|x\|. \quad (2.6)$$

Es una seminorma  $\Rightarrow$  es sublineal.

$T^{ma}$  HB, caso real  $\Rightarrow$

$\exists f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ -lineal, extiende  $g$ ,  
 $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$ .

Podemos escribir

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x), \quad x \in X.$$

(mirar (2.6)).

$$\text{Luego } |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

De aquí se deduce que  $\|f\| \leq \|g\|$ .

Como  $f|_U = g$ ,  $\|f\| \geq \|g\|$ .

Conclusión:  $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X'}$ .  $\square$

Caso complejo:  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Aplicando

el caso real, encontramos  $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\operatorname{Re} F|_U = \operatorname{Re} g, \quad \|\operatorname{Re} F\| = \|\operatorname{Re} g\|.$$

$$\text{Luego } F|_U = g.$$

$$\text{Pero } \|\operatorname{Re} F\|_{(X_{\mathbb{R}})'} = \|F\|_{X'}.$$

Efectivamente:

$$x \in X \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1 \text{ y } F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad \in \mathbb{R}.$$

Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} |F(x)| &= |F(\lambda x)| = |\operatorname{Re} F(\lambda x)| \leq \\ &\leq \|\operatorname{Re} F\| \|\lambda x\| = \|\operatorname{Re} F\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Recordando la definición de la norma, obtenemos:

$$\|\operatorname{Re} F\| = \|F\|.$$

Corol 2 Sea  $X$  un espacio normado,  
Entonces  $\forall x_0 \in X \exists$  un funcional lineal  
 $f \in X'$ :  $\|f\|_{X'} = 1, f(x_0) = \|x_0\|.$   
En particular,  $X'$  separa puntos de  $\bar{X}$ .

Demo Consideramos

$$g: \|x_0\| \rightarrow \mathbb{K}, \quad g(\lambda x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \|x_0\|, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{|g(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Luego  $\|g\|_{X'} = 1$ . Sea  $f$  la continuación del funcional lineal  $g$  a  $\bar{X}$  (existe por los T<sup>mas</sup> HB), ya está:

$$f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|. \quad \square$$

Corol 3  $\forall x \in X$ ,

$$\|x\|_X = \sup \{ |f(x)| : f \in X', \quad \|f\|_{X'} = 1 \}.$$

Demo 1)  $\sup \{ \dots \} \leq \|x\|$ .

$$2) \exists f \in X': |f(x)| = \|x\|.$$

Luego  $\sup \{ \dots \} = \|x\|_X. \quad \square$