

## Clase 2

[Lo contaba hasta aquí fue §1: T-ma de Baire]

### § 2. Teorema de Hahn-Banach.

Def Sea  $E$  un espacio vectorial

(sobre  $\mathbb{R}$  o sobre  $\mathbb{C}$ ). Una aplicación

$p: E \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es sublineal si

$$(1) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \alpha \geq 0, \quad x \in E$$

$$(2) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in E.$$

Ejemplos (a) Cualquier seminorma es sublineal;

(b) Cualquier funcional lineal

es sublineal;

(c) Sea  $E$  un espacio normado

y sea  $C \subset E$  convexo, abierto, con  $0 \in C$ .

Ponemos

$$p(x) = \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C \}, \quad x \in E.$$

Consideramos el infimo de un conjunto no vacío, con lo cual  $0 \leq p(x) < +\infty$  para todo vector  $x$ .

Entonces  $P$  es sublineal (comprobar a partir de la definición de conjuntos convexos).

Teo (Hahn-Banach) Sean  $E$  un espacio vectorial sobre  $K = \mathbb{R}$ ,  $G \subseteq E$  un subespacio (en el sentido algebraico),  $P : E \rightarrow \mathbb{R}$  sublineal,  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  funcional lineal tal que

$$g(x) \leq P(x), \quad \forall x \in G.$$

Entonces  $\exists$  un funcional lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que extiende  $g$  (es decir,  $f|_G = g$ ), tal que

$$f(x) \leq P(x) \quad \forall x \in E.$$

Obs. No tal ~~que~~ (de momento) no hallando de ninguna manera en nuestro espacio vectorial  $E$ .

Recordando: lema de Zorn

Sea  $(P, \leq)$  un conjunto inductivo,  
no vacío

Lo que significa que toda cadena