

(34) Teo X esp de Banach

$A: X \rightarrow X$ compacto, $\delta > 0$

$\Rightarrow$ el espacio generado por los autoespacios

$\ker(A - \lambda I)$, $|\lambda| > \delta$,
es finito dimensional.

Demo Si es falso, entonces
 $\exists$ una sucesión $\{x_n\}$
de autovectores de A ,

$$Ax_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| > \delta.$$

$\{x_n\}$ linealm. independientes

ponemos $E_n = \text{Lin}(x_1, \dots, x_n)$,
 $\dim E_n = n$.

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$$

Lema de Riesz:

$$\exists y_1, y_2, \dots, y_n, y_n \in E_n, \\ \|y_n\| = 1, \quad d(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

$$AE_n \subset E_n \Rightarrow Ay_n \in E_n.$$

$$y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \Rightarrow$$

$$(Ay_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k x_k = \underbrace{\lambda_n y_n}_{\in E_{n-1}} + z_n$$

$$z_n \in E_{n-1}.$$

$$n > m \Rightarrow$$

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n + \underbrace{z_n - Ay_m}_{\in E_{n-1}}\|$$

$$> \lambda_n d(y_n, E_{n-1}) =$$

$$= |\lambda_n| d(y_n, E_{n-1}) > \frac{\delta}{2}.$$

35) Esto contradice a la compacidad de A . $\square$

Teor (s/d) $A: X \rightarrow X$ (Banach)

Compacto, $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$
 $\Rightarrow \lambda$ es un autovalor de A .

Además, $\exists L, M \subset X$,
 $L + M = X$, $M \cap L = \{0\}$,
 $\dim L < \infty$, $AL \subset L$,
 $AM \subset M$, $\sigma(A|L) = \{\lambda\}$,
 $\sigma(A|M) = \sigma(A) \setminus \{\lambda\}$.

Corolarios 1) $\lambda \neq 0 \Rightarrow$
 $\bigcup_{n \geq 1} \text{Ker}(A - \lambda I)^n = L$

2) $\text{Ran}(A - \lambda I)$ cerrado.
 $(\lambda \neq 0)$

3) $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) =$
 $= \dim \text{Ker}(A^n - \lambda I)$.

4) (La alternativa de Fredholm) $\lambda \neq 0$.

$$(A - \lambda I)x = v$$

tiene solución $\Leftrightarrow v \perp \text{Ker}$
 $\text{Ker}(A' - \lambda I)$.
 $\subset X'$

Def $A: X \rightarrow Y$ es

completamente continuo si

$\forall \{x_n\} \subset X$, $x_n \xrightarrow{w} x$,
 $n \rightarrow \infty$.

$$\|Ax_n - Ax\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

96) Prop 1) A compacto $\Rightarrow$

A es compl. continuo.

2) A compl. continuo,
 X es reflexivo $\Rightarrow A$ compacto.

Demo 1): $x_n \in \bar{X}, x_n \xrightarrow{w} 0$.

$\Rightarrow \sup_n \|x_n\| < \infty$ Podemos

suponer que $\sup \|x_n\| \leq 1$.

Entonces $\{Ax_n\} \subset \overline{AB_X}$.

A compacto $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}, y \in Y:$

$$\|Ax_{n_k} - y\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$$x_{n_k} \xrightarrow{w} 0. \quad A: (X, \text{weak}) \rightarrow (Y, \text{weak})$$

continuo (ejerc).

$$Ax_{n_k} \xrightarrow{w} A0 = 0 \in Y.$$

Luego $y = 0$.

Vemos que 0 es el
único punto de acumula-
ción de $\{Ax_n\}$,
se contienen en $\overline{AB_X}$,
que es un compacto.

Conclusión: $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

en norma. A es compl.
continuo.

2): sin demostración.

37) § Operadores autoadjuntos compactos en un espacio de Hilbert.

H un esp de Hilbert.

Obs $A = A^* \in L(H) \Rightarrow$

$\sigma(A)$ es real.

$\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$ (alg. lineal).

Idea:

$$1) \lambda \notin \mathbb{R} \Rightarrow \| (A - \lambda I)x \|^2 \geq |\operatorname{Im} \lambda|^2 \|x\|^2.$$

2) $(A - \lambda I)H$ cerrada.

$$((A - \lambda I)H)^\perp = \ker(A^* - \bar{\lambda}I) =$$

$$= \ker(A - \bar{\lambda}I) = 0.$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)H = H.$$

$(A - \lambda I): H \rightarrow H$ biyectivo

$$\Rightarrow \lambda \notin \sigma(A).$$

Teor (s/d) Hilbert-Schmidt

A compacto autoadjunto $\Rightarrow$ $\exists$ sistema ortogonal ^{normal} $\{\varphi_n\}$

$\subset H$ tal que $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$,

$$H = \operatorname{Lin}(\varphi_n) \oplus \ker A$$

$$x = \sum_k c_k \varphi_k + x', \quad Ax' = 0$$

$$\Rightarrow Ax = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k.$$

(38)

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{un } A \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{un } A \\ 0 \end{array} & 0 \end{array}$$

$\lambda_n \rightarrow 0$.

Puede haber un número finito o infinito de $\{\varphi_k\}$

Obs: $A: L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$
 $Af(x) = xf(x)$.

Autoadjunto, no compacto.
 no tiene autovalores.