

(22) Lema X un esp de Banach, X reflexivo $\Rightarrow X'$ es reflexivo.

Lema (s/d)

1) $M \subset X$ un subesp cerrado, X refl $\Rightarrow M$ es reflexivo.

2) $\bar{X}$ reflexivo $\Leftrightarrow M$ y X/M son reflexivos.

Teor X reflexivo $\Leftrightarrow X'$ es reflexivo.

Demo $\Leftarrow X'$ reflexivo

$\Rightarrow X''$ reflexivo $\Rightarrow X \subset X''$ reflexivo. $\square$

Obs X refl $\Leftrightarrow \bar{B}_1^X$ (cerrado) es débilmente compacta.

$\Rightarrow$ por el Teor de Banach-Alaughu

$\Leftarrow$ sin demo.

Teor (Milman - Pettis)
Todo esp de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

23) $L^p(\mu)$ es unif. convexo
 si $1 < p < \infty$. Des. de
Clarkson: 1ª des

$$2 \leq p < \infty \Rightarrow$$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

2ª des: $1 < p \leq 2$

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^{p'} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \|f\|_p^p + \frac{1}{2} \|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$\Rightarrow L^p(\mu)$ es unif. convexo.

Obs La convergencia
 SOT es más débil que
 la conv. en norma.

$$\frac{\|T_n - T\| \rightarrow 0}{T_n \xrightarrow{\text{SOT}} T} \Rightarrow$$

$$T_n x \rightarrow T x$$

$$\|T_n x - T x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \rightarrow 0.$$

$$T_n \xrightarrow{\text{WOT}} T \text{ si}$$

$$\langle T_n x, y \rangle \rightarrow \langle T x, y \rangle$$

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X'$$

$$\Leftrightarrow T_n x \xrightarrow{w} T x \quad \forall x \in X.$$

24) El espectro y la resolvente

Sea $\dim X < \infty$, $A \in L(X)$,

$K = \mathbb{C}$. $X \cong \mathbb{C}^n$

$\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A

si $\ker(A - \lambda I) \neq 0$, es
decir, $Ax = \lambda x$

tiene soluciones $x \neq 0 \Rightarrow$
 $\lambda \in \sigma(A)$. Todos los demás

puntos: regulares.

$\Rightarrow$ Hay 2 posibilidades

1) $\ker(A - \lambda I) \neq 0$,
 $\nexists (A - \lambda I)^{-1}$.

2) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$ y es
acotado.

Si $\dim X = \infty$
(X de Banach) $\Rightarrow$

hay posibilidad

3) $\exists (A - \lambda I)^{-1}$, es
decir, no hay autovectores
que corresponden a λ ,
pero $(A - \lambda I)^{-1}$ no está
definido en todo X y
es posiblemente no acotado.

Def El conjunto resol-
vente de un operador
 $A : X \rightarrow X$ acotado:

14) 25

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ definido en todo } X \}$$

(luego está acotado, T^{-1} aplic. inversa).

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{ \lambda : \nexists (A - \lambda I)^{-1} : X \rightarrow X \}$$

$$\sigma_p(A) = \{ \text{autovalores de } A \}.$$

$$\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$$

↖ espectro puntual.

Teor $\|A\| < 1 \Rightarrow$
 $\exists (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$

(convergencia en norma).

Teor $A: X \rightarrow X$ ($K = \mathbb{C}$),
 $\exists A^{-1}$, $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow$

$$\exists B^{-1}.$$

Demo Ponemos $\Delta A = B - A$.

Dado un vector $v \in X$ arbitrario, queremos resolver

$$Bx = v.$$

$\Downarrow$

$$Ax + (\Delta A)x = v$$

(26)

$$x + A^{-1} \Delta A x = A^{-1} v.$$

$\Downarrow$

$$x = F(x)$$

$$F(x) = A^{-1} v - \underbrace{(A^{-1} \Delta A)}_{\Delta A} x.$$

$$x, y \in X \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &\leq \\ &\leq \underbrace{\|A^{-1}\| \|\Delta A\|}_a \|x - y\| \end{aligned}$$

$a < 1$, por la hipótesis.

Luego $\exists B^{-1} : X \rightarrow X$.

$A \in L(X)$, X de Banach.

Teor 1) El conjunto resolvente $\rho(A)$ es abierto;

$$2) |\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

$\Rightarrow$ Es decir, $\sigma(A) \subset \{|\lambda| \leq \|A\|\}$.

$$3) \sigma(A) \neq \emptyset.$$

Demostración 1) $\lambda_0 \in \rho(A)$

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|} \Rightarrow$$

$$A - \lambda I = \underbrace{A - \lambda_0 I}_{A_0} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0) I}_{\Delta A}$$

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$$

$\text{Teor anterior} \Rightarrow A - \lambda I$ invertible.

~~2.6~~ 2) $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

(2.7)

$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} A)^{-1}$$

$$|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \|\lambda^{-1} A\| < 1 \Rightarrow$$

$$\exists (I - \lambda^{-1} A)^{-1} \in L(X).$$

Se ve también:

$$\|(\lambda I - A)^{-1} \| \rightarrow 0 \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

3) $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Sea $x \in X$, $y \in X'$.

$$f(\lambda) = \langle \underline{(A - \lambda I)^{-1} x}, y \rangle$$

$\sigma(A) = \emptyset \Rightarrow f$ es entera

$$|f(\lambda)| \leq \|(A - \lambda I)^{-1}\| \|x\| \|y\| \rightarrow 0, |\lambda| \rightarrow \infty$$

T^{ma} Liouville $\Rightarrow$

$$f = \text{const} \Rightarrow f \equiv 0.$$

$$\Rightarrow \forall x \quad (A - \lambda I)^{-1} x = 0.$$

¡Contradicción!

Obs El radio espectral:

$$\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Se demuestra que:

$$\rho(A) = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

$$\rho(A) \geq \|A\|.$$

$$|\lambda| > \rho(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$