1. Sean $S_{\rm d} : \ell^2 \to: \ell^2$ y $S_{\rm i} : \ell^2 \to: \ell^2$ los operadores de desplazamiento hacia la derecha y hacia la izquierda, que ya hemos definido en la Hoja 4. Decidir si $S_{\rm d}^n \to 0$ y si $S_{\rm i}^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, respecto a las topología de la norma y las topologías WOT y SOT.

2. Sea E un espacio vectorial normado y $A, B \in L(E)$.

   (i) Si AB es invertible, ¿se deduce que A y B son invertibles?

   (ii) Demostrar que A y B son invertibles si y solo si tanto AB como BA son invertibles.

   (iii) Demostrar que si $I-AB$ es invertible, entonces $I-BA$ es invertible, con inversa $I+B(I-AB)^{-1}A$.

Sentido geométrico del Teorema de Hahn-Banach

3. Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{R}$ un funcional $\mathbb{R}$-lineal no nulo sobre X.

   a) Si $X \setminus \ker f$ contiene una bola $B_r(x_0)$ de radio positivo, entonces $f(B_r(x_0))$ se contiene en $(0, +\infty)$ o en $(-\infty, 0)$.

   b) Si $X \setminus \ker f$ contiene una bola $B_r(x_0)$ de radio positivo, entonces f está acotado sobre esta bola.

   c) Demostrar que f es continuo si y solo si $\ker f$ es cerrado.

4. Sea X un espacio normado y sean A, B sus subconjuntos. Suponiendo que A es cerrado y B es compacto, demostrar que $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es cerrado.

   ¿Es cierto que la suma de dos subconjuntos cerrados de X es un cerrado?

Espacios reflexivos etc.

5. Sea A un operador de X a Y, donde X e Y son espacios de Banach. Demostrar que A es continuo si y solo si es continuo respecto de las topologías débiles en X e Y.

6. Demostrar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

7. Comprobar que c_0 no es reflexivo.

8. Sean X e Y espacios vectoriales normados que son isomorfos mediante una aplicación que conserva las normas. Si Y es reflexivo, demostrar que X es reflexivo.

9. Si un espacio normado X es reflexivo, demostrar que X' es reflexivo.

10. Demostrar que un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si X' es reflexivo.

    Sugerencia: Puede demostrarse que un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo es reflexivo; utilizar esto, sin demostrarlo.

11. Demostrar que los espacios $L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, donde μ es una medida, son reflexivos. En particular, son reflexivos espacios ℓ^p con $1 < p < \infty$.

12. **(a)** Demostrar que

    $$c = \left\{ (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty : \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n \right\}$$

    es un subespacio cerrado de ℓ^∞.

    (b) Demostrar que existe un funcional lineal $\Phi : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ de norma 1 tal que $\Phi\big((x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} x_n$ para todo vector $x = (x_n)$ en c.

    (c) Deducir que ℓ^1 no es reflexivo.

13. **(continuación: límite de Banach)** Consideremos el caso de ℓ^∞ real. Demostrar que el funcional $\Phi : \ell^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del ejercicio 12 puede ser elegido de tal forma que para toda sucesión (x_n) en $\ell^\infty_\mathbb{R}$, se cumplan las propiedades

    (i) $\liminf x_n \le \Phi\big((x_n)\big) \le \limsup x_n$ (en particular, $\Phi\big((x_n)\big) \ge 0$ si $x_n \ge 0$);

    (ii) $\Phi\big((x_{n+1})\big) = \Phi\big((x_n)\big)$.

14. Demostrar que para cualquier límite de Banach $\Phi = (B)\lim$ (que ha de satisfacer las propiedades del ejercicio anterior), existe un par de sucesiones reales $(x_n), (y_n)$ en $\ell^\infty_\mathbb{R}$ tales que
$(B)\lim(x_n y_n) \neq (B)\lim(x_n) \cdot (B)\lim(y_n)$.

15. (Convergencia en L^2 y convergencia puntual)

    (i) Demostrar que existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^\infty$ de funciones de $L^2(0,1)$ tal que g_n tiende a cero en la norma de $L^2(0,1)$ pero no tiende a cero puntualmente.

    (ii) Demostrar que existe una sucesión $(h_n)_{n=1}^\infty$ de funciones de $L^2(0,1)$ tal que h_n tiende a cero puntualmente pero no tiende a cero en la norma de $L^2(0,1)$.

Convergencia débil y débil-$*$.

16. Demostrar lo siguente. Sea X un espacio de Banach, y sean $x_n \in X$, $f_n \in X'$. Si $x_n \to x$ débilmente y $f_n \to f$ en norma, entonces
$$\langle x_n, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle.$$

17. **(a)** Sean $\{e_n\}$ la base canónica de ℓ^p, $1 < p < \infty$. Demostrar que e_n tienden a 0 en la topología débil.

    (b) ¿Es cierta esta afirmación para $p = \infty$? ¿Y para $p = 1$?

18. Sea H un espacio de Hilbert separable, y sea $S = \{x \in H : \ \|x\| = 1\}$ **la esfera unidad** en H. Demostrar que S no es cerrada en la topología débil y que su cierre en esta topología es **la bola unidad cerrada** $\bar{B}_1(0)$ (centrada en 0).

    Indicación: Elegir una base ortonormal $\{e_n\}$ en H. Dado cualquier vector $x \in \bar{B}_1(0)$, buscar una sucesión acotada de escalares $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $x + \alpha_n e_n \in S$ para todo n y $x + \alpha_n e_n \to x$ débilmente cuando $n \to \infty$.

19. Demostrar que la suma de dos subconjuntos compactos de un espacio normado X es un conjunto compacto.

20. Dados unos espacios normados X, Y, demostrar que la suma de dos operadores compactos en $L(X,Y)$ es compacta.

Problemas adicionales

21. Demostrar que la convergencia débil en ℓ^1 de una sucesión de vectores equivale a la convergencia en norma.

22. Sea $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión infinita de espacios de Banach. Hay diferentes formas no equivalentes de definir su suma directa. de una sucesión infinita de espacios de Banach. Si todos ellos son iguales a Podemos definir, por ejemplo, la ℓ_∞-*suma directa*
$$\big(\oplus_{n\ge1}\big)_\infty X_n := \big\{x = (x_n) : x_n \in X_n \ \ \forall n, \quad \|x\| := \sup_n \|x_n\|_{X_n} < \infty.\big\}$$
Demostrar que la ℓ_∞-suma directa es un espacio de Banach.

23. *En este ejercicio se pretende demostrar que los funcionales lineales $\{f_n\}$, asociados de una forma natural a una base de Schauder $\{e_n\}$ en un espacio de Banach X, son siempre continuos. Este hecho se utilizó en el Ejercicio 25 de la Hoja 3.*

Sea $\{e_n\}n \geq 1$ una base de Schauder en un espacio de Banach X. Esto significa que todo vector $y \in X$ se desarrolla de una manera única en una serie

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) e_n,$$

donde para cualquier y, $f_n(y) \in \mathbb{K}$ y la serie converge en norma.

(a) Sean $X_n = \mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Definimos operadores lineales $P_n : X \to X_n$ (que apriori pueden ser no acotados), poniendo

$$P_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

Observar que los operadores $P_n | X_{n+1}$ son acotados. Deducir que

$$\widetilde{X} = \big\{x = (x_n) \in \big(\oplus_{n\geq 1}\big)_\infty X_n : P_n x_{n+1} = x_n \;\; \forall n\big\}$$

es un subespacio vectorial cerrado de la ℓ_∞-suma directa $\big(\oplus_{n\geq 1}\big)_\infty X_n$ (ver el ejercicio anterior).

(b) Comprobar que

$$\widehat{X} = \big\{x = (x_n) \in \widetilde{X} : \lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\|_X = 0\big\}$$

es también un subespacio vectorial cerrado de $\big(\oplus_{n\geq 1}\big)_\infty X_n$.

(c) Verificar que la aplicación

$$\pi : \widehat{X} \to X, \quad \text{definida por} \quad \pi\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := \lim_{n\to\infty} x_n,$$

es biyectiva. Utilizar el teorema de isomorfismos de Banach para demostrar que π es invertible (lo que significa que π, π^{-1} son acotados).

(d) Expresar π^{-1} en términos de las proyecciones P_n. Deducir que todos los funcionales lineales $f_n : X \to \mathbb{K}$, definidos antes, son acotados.