Funcionales lineales y el Teorema de Hahn-Banach

1. Consideramos $\mathbb{N}$ con la relación de orden parcial $m \leq n$ si m divide a n. Encontrar todos los elementos maximales de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y del conjunto de todos los números primos.

2. Sea X un espacio de Banach complejo, y sea $f \in X'$. Dadas unas constantes reales a, b, expresar la norma del funcional $\mathbb{R}$-lineal $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ en términos de $\|f\|$.

3. Sea $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal, es decir, p satisface **(a)** $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$; **(b)** $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \geq 0$. Demostrar que:

   (i) $p(0) = 0$;

   (ii) $p(-x) \geq -p(x)$ para todo $x \in X$;

   (iii) $M_\gamma = \{x \in X : p(x) \leq \gamma\}$ es convexo para cada $\gamma > 0$.

4. Demostrar que si un funcional sublineal p en un espacio normado X es continuo en 0, entonces es continuo para todo $x \in X$.

5. Si p es un funcional sublineal en un espacio vectorial real X, demostrar que existe un funcional lineal f en X tal que $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$.

6. Sea X un espacio normado y X' su dual. Si $X \neq \{0\}$, demostrar que $X' \neq \{0\}$.

Espacios de Hilbert y operadores lineales acotados entre ellos.

7. En un espacio pre-Hilbert H, si $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle$ para todo $y \in H$, demostrar que $x_1 = x_2$.

8. Dar un ejemplo de una sucesión $x \in \ell^2$ y un sistema ortonormal en ℓ^2 para los que la desigualdad de Bessel sea una desigualdad estricta.

9. En el espacio vectorial $C[a, b]$ de las funciones continuas definidas en $[a, b]$ con valores complejos, definimos $\|f\|_\infty = \text{máx}_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Demostrar que es imposible definir un producto escalar en $C[a, b]$ de manera que $\|f\|_\infty^2 = \langle f, f\rangle$.

10. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma $\|(x_1, x_2)\| = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$. ¿Puede definirse en $\mathbb{R}^2$ un producto escalar $\langle\cdot, \cdot\rangle$ de manera que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, donde $x = (x_1, x_2)$?

11. Demostrar que en un espacio vectorial complejo con un producto escalar $x \perp y$ si y solo si $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

12. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador con matriz (a_{ij}) con respecto a la base ortonormal de H dada por $\{e_j\}_{j=1}^\infty$. Demostrar que la matriz de A^*, el operador adjunto hilbertiano, en esta misma base ortonormal es $(\overline{a}_{ji})$.

13. Sea $k \in L^2([c, d] \times [a, b])$. Hallar el adjunto del operador $K : L^2[a, b] \to L^2[c, d]$ definido por

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

14. Demostrar que el operador S_d de desplazamiento hacia la derecha, definido por $S_\mathrm{d}(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$, es un operador lineal y acotado de ℓ^2 en ℓ^2. Calcular su norma.

    Hacer lo mismo con el operador S_i de desplazamiento a la izquierda, definido por $S_\mathrm{i}(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$.

15. Demostrar que $S_\mathrm{d}^* = S_\mathrm{i}$. Calcular el conjunto de autovalores de los operadores S_i y S_d.

16. (i) Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Demostrar que $T = 0$ si y solo si $\langle Tx, y\rangle = 0$ para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$

    (ii) Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, siendo H un espacio de Hilbert complejo. Demostrar que si $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$, entonces $T = 0$.

    (iii) Demostrar que el resultado del apartado anterior no es cierto si H es un espacio de Hilbert real.

17. Sea H un espacio de Hilbert y $T_n \in \mathcal{L}(H)$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si la sucesión $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en norma a un operador T y cada operador T_n es autoadjunto, entonces T es también un operador autoadjunto.

18. Sea $U \in \mathcal{L}(H)$ un operador unitario. Demostrar que U es una isometría, esto es, que $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in H$.

19. (i) Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que T es unitario si y solo si T es una isometría suprayectiva.

    (ii) Dar un ejemplo de un operador que sea una isometría pero que no sea unitario.

20. Sea $P \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que P es una proyección ortogonal sobre un subespacio M de H si y solo si $P^2 = P$ y P es autoadjunto.

Distancia de un punto a un conjunto y proyecciones ortogonales

21. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$. Demostrar que existen infinitos puntos del conjunto convexo y cerrado $A = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 1\}$ cuya distancia al origen es mínima.

22. Demostrar que el conjunto de vectores en ℓ^2 de la forma $x = (x_1, x_1, x_3, x_4, \dots)$ es el complemento ortogonal del subespacio generado por $(1, -1, 0, 0, \dots)$. Dado $x \in \ell^2$, encontrar $y \in L(\{(-1, 1, 0, 0, \dots)\})$ y $z \perp y$ tal que $x = y + z$.

Teoremas de la función inversa y de la gráfica cerrada

23. Sea X un espacio de Banach y sean L y M sus subespacios (cerrados), cuya intersección es $\{0\}$. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    (i) $L + M$ es cerrado;

    (ii) La proyección paralela $P_{\|} : L + M \to L$, definida por

    $$P_{\|}(\ell + m) := \ell, \qquad \ell \in L, m \in M,$$

    es continua.

    Indicación: Aplicar el Teorema de los isomorfismos de Banach.

24. Dar un ejemplo de espacios normados E y F y un operador biyectivo $T \in \mathcal{B}(E, F)$ que no sea invertible (esto es, T^{-1} es un operador no acotado).

    Sugerencia. Tomar $E = C[0, 1]$ y $T = V|_E$, siendo V el operador de Volterra, o, alternativamente, usar el operador de diferenciación entre espacio normados adecuados (no completos).

25. Sean X, Y espacios de Banach y sea $A \in L(X, Y)$. Demostrar que existe una constante $c > 0$ tal que $\|Ax\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in X$ si y solo si $\ker A = 0$ y $\operatorname{Ran} A$ es un subespacio cerrado de Y.

26. Demostrar que el operador $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ dado por $T\Big((x_k)_{k=1}^{\infty}\Big) = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ es lineal y acotado. Demostrar que $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado en ℓ^∞.

27. Dar un ejemplo de un operador acotado $T : X \to X$, donde X es un espacio de Banach tal que $\ker T = 0$, pero $T^{-1} : \operatorname{Ran} T \to X$ no es acotado (respecto de la norma de X en $\operatorname{Ran} T$).

    Sugerencia. Usar el operador T del problema anterior.

28. **(a)** Sean X e Y espacios de Banach. Sea F un subconjunto del dual Y' que separa puntos de Y, es decir, cumple

$$y \in Y,\ \langle y, f\rangle = 0 \quad \forall f \in F \qquad \Longrightarrow\ y = 0.$$

(En particular, se puede escoger $F = Y'$.) Demostrar que entonces un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si y solo si $f \circ T$ es continuo para todo funcional lineal $f \in F$.

Indicación: Utilizar el Teorema de la Gráfica cerrada.

(b) Sea $T : \ell^p \to \ell^q$ un operador lineal acotado, donde $p, q \in (1, +\infty)$, y sea $(t_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ su matriz, definida respecto de las bases canónicas en ℓ^p y ℓ^q.

Demostrar que cada fila de la matriz pertenece a $\ell^{p'}$ (donde $1/p + 1/p' = 1$), y que sus normas en $\ell^{p'}$ son uniformemente acotadas.

(c) Ahora supongamos que $(t_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ es una matriz arbitraria de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$, tal que todas sus filas pertenecen a $\ell^{p'}$. Poniendo

$$(Tx)_j = \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} x_k, \quad x = \{x_k\} \in \ell_p,$$

definimos correctamente un operador lineal T de ℓ_p al espacio vectorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, que consiste de todas las sucesiones, cuyos términos están en $\mathbb{K}$ (estas sumas convergen absolutamente). Supongamos que la imagen de T se contiene en ℓ^q. Aplicando la parte (a), demostrar que T es un operador acotado de ℓ^p a ℓ^q.

Problema adicional

29. Consideramos las funciones $x_n(t) = t^n$ como vectores en el espacio de Banach $C[0,1]$. Observar que, por el Teorema de Weierstrass, es una familia completa en $C[0,1]$. Demostrar que, sin embargo, se cumple lo siguiente.

Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, que contiene 0, con la siguiente propiedad. Sea $g(t) \in C[0,1]$ cualquier función que admite una representación

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n(t),$$

que converge en la norma de $C[0,1]$. Entonces g se extiende a una función holomorfa en Ω.

En particular, no toda función $g \in C[0,1]$ se desarrolla en una serie de este tipo, lo que significa que las funciones t^n, $n \geq 0$, están lejos de ser una base de Schauder.

En una de las primeras hojas de ejercicios, se proponía un ejemplo concreto de una base de Schauder en el espacio $C[0,1]$.