Hoja de problemas 3

El Teorema de Baire. Problemas antiguos

1A **(a)** Demostrar que en un espacio métrico sin puntos aislados, cualquier conjunto formado por un solo punto es un cerrado con interior vacío.

(b) Usar el apartado (a) junto con el teorema de Baire para ver que ni $\mathbb{R}$, ni el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, ni ningún G_δ denso de un espacio métrico completo sin puntos aislados, son numerables.

2A En cada caso, dar un ejemplo de un conjunto delgado (de primera categoría en la terminología de Baire) en $\mathbb{R}$, que sea

(a) denso en $\mathbb{R}$;
(b) no numerable;
(c) denso y no numerable.

3A **(a)** Encontrar un ejemplo de un conjunto delgado (de primera categoría) en $\mathbb{R}$ que tenga medida de Lebesgue mayor que 0.

(b) Encontrar un ejemplo de un conjunto grueso (de segunda categoría) en $\mathbb{R}$ que tenga medida de Lebesgue 0.

4A Demostrar que la conclusión del Teorema de Baire sigue siendo cierta si, en vez de un espacio métrico completo, se considera espacio localmente compacto Hausdorff.

5A En la clase 1 online, di un ejemplo, cuando el Lema de bolas encajadas falla si no se pide que los radios tiendan a cero.

En este ejercicio, se pide encontrar un ejemplo en un subconjunto del espacio de Hilbert. Más precisamente, sea H un espacio de Hilbert, que tiene una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (es decir, es una base de Schäuder, que satisface $\langle e_n, e_k\rangle = \delta_{nk}$). Dada una sucesión de números $b_k > 0$, consideramos el conjunto

$$M = \{b_k e_k : \quad k = 1, 2, \dots\},$$

con la métrica inducida de H. Encontrar los números $b_k > 1$, que tienden a 1, y los radios R_k de forma que las bolas cerradas

$$B_k := B^M_{R_k}(b_k e_k) = \{m \in M : \|m - b_k e_k\| \le R_k\} \subset M$$

formen una familia encajada: $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \supset B_{k+1} \supset \dots$, pero su intersección sea vacía.

6A Esta tarea va en dirección contraria. Se pretende ver que ningún espacio de Banach X puede aportar un contraejemplo del tipo de ejercicio anterior.

Sea X un espacio de Banach.

(a) Demostrar que si dos bolas cerradas cumplen $\overline{B_\rho(x)} \supset \overline{B_r(y)}$, entonces se tiene la desigualdad $\rho \ge r$ para sus radios.

(b) Demostrar que "el lema sobre las bolas encajadas" en X es válido sin pedir que los radios de las bolas tiendan a cero.

Es decir: si tenemos una sucesión de bolas $\{\overline{B_{r_n}(x_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \supset \overline{B_{r_2}(x_2)} \supset \ \dots \ \supset \overline{B_{r_n}(x_n)} \supset \ \dots$$

entonces la intersección de estas bolas no es vacía.

7A Demostrar que existen funciones continuas reales, definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que no son monótonas en ningún subintervalo de I.

Indicación: Una de las posibilidades consiste en aplicar el Teorema de Baire.

Más ejercicios sobre el Teorema de Baire y temas relacionados

1. Dado un $N \in \mathbb{N}$, demostrar que el conjunto

$$F_N = \left\{ f \in C[0,1] : \exists a \in [0,1] : \forall x \in [0,1] : \; x \neq a \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq N \right\}$$

es cerrado en el espacio $C[0,1]$.

2. *(continuación)* Demostrar que los conjuntos F_N son diseminados. Utilizando el Teorema de Baire, deducir que el conjunto de funciones $f \in C[0,1]$, que tiene derivada finita en algún punto $a \in [0,1]$, es residual (es decir, su complemento es de primera categoría).

   En particular, existen funciones continuas en $[0,1]$, que no son derivables en ningún punto.

   En los siguientes ejercicios 3–4, se supone que X es un espacio de Banach infinito dimensional.

3. Sea $\{L_n\}$ una sucesión creciente de subespacios (cerrados) de X:

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \ldots .$$

   Se conoce que $\cup_k L_k = X$. Demostrar que entonces $L_n = X$ para algún n.

   ¿Es cierta esta afirmación, suponiendo solo que X es un espacio normado?

4. Demostrar que un espacio de Banach X infinito dimensional no puede tener una base de Hamel numerable.

   Indicación: Utilizar el ejercicio anterior.

Funcionales lineales, operadores lineales. Su continuidad y sus normas.

5. Sea $-\infty < a \leq c \leq b < \infty$. Demostrar que el funcional lineal F sobre $C([a,b])$ definido por $F(f) = f(c)$ para $f \in C([a,b])$ es continuo con respecto a la norma del supremo, pero no lo es con respecto a la norma $L^2((a,b))$ (restringida a $C([a,b])$).

6. En el espacio $\mathcal{P}$ de las funciones polinómicas en $[0,1]$ definimos el funcional C_n del n-ésimo coeficiente como el funcional que a un polinomio $p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$, $0 \leq t \leq 1$, le asigna $C_n(p) = a_n$ si $n \leq m$, y $C_n(p) = 0$ si $n > m$. Demostrar que C_n es discontinuo con respecto a las norma del supremo. *Sugerencia:* Considerar $p_k(t) = (1-t)^k / \binom{k}{n}$.

7. Sea X un espacio normado. Fijamos un p, $1 \leq p < \infty$.

   a) Demostrar que para todo operador lineal $T : \ell^p \to X$,

$$\|T\| \geq \sup_n \|Te_n\|_X,$$

   donde $\{e_n\}$ es la base canónica en ℓ^p. Demostrar que un operador lineal continuo $T : \ell^p \to X$ se determina de forma única por sus valores en los vectores e_n.

   b) ¿Hay un valor de p tal que la desigualdad anterior es siempre una igualdad, para cualquier operador T?

8. Demostrar que un operador lineal continuo $T : X \to \ell^\infty$ se determina de manera única por una sucesión de funcionales lineales $\{\tau_n\}$ en X', con cierta propiedad de acotación. Expresar la norma de T a partir de las normas de estos funcionales.

9. Consideramos un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_r$, donde $p, r \in [1, \infty)$. Denotamos por t_{jk} los elementos de la matriz de T, es decir, ponemos $Te_k = \{t_{jk}\}_{j=1}^\infty \in \ell_r$, donde $\{e_k\}$ es la base canónica en ℓ^p.

   Para todo $N = 1, 2, \ldots$, consideramos la matriz finita $T_N = \{t_{jk}\}_{1 \leq j,k \leq N}$ de tamaño $N \times N$. Demostrar que

$$\|T\|_{L(\ell_p, \ell_r)} = \sup_N \|T_N\|_{L(\ell_p^N, \ell_r^N)},$$

   donde ℓ_p^N es el espacio finito dimensional $\mathbb{K}^N$, con la norma $(\sum_{j=1}^N |x_j|^p)^{1/p}$. En particular, T es acotado si y solo si las normas de matrices finitas T_N en $L(\ell_p^N, \ell_r^N)$ están uniformemente acotadas.

   ¿Cómo podemos reformular esta afirmación para el caso de $p = r = 2$, utilizando los valores singulares de las matrices T_N?

10. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y $T_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $n = 1, 2, \ldots$, operadores lineales acotados. Demostrar que la convergencia $T_n \to T$ en norma implica que para todo $\varepsilon > 0$ y cualquier bola cerrada $\overline{B}$ existe un N tal que para todo $n > N$ y todo x en $\overline{B}$, se tiene que $\|T_n x - Tx\|_{\mathbb{Y}} < \varepsilon$.

11. El operador de Volterra en $L^2[0,1]$ está definido por $Vf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, $0 \le t \le 1$.

    (i) Resolver la ecuación integral $f(t) = \operatorname{sen} t + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$.

    (ii) Demostrar por inducción que $(V^n f)(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\,\mathrm{d}s$.

    (iii) Deducir que para todo $\mu \in \mathbb{C}$ y para todo $g \in L^2[0,1]$, la ecuación $(I - \mu V)f = g$ tiene una única solución $f \in L^2[0,1]$.

    Indicación: Utilizar el apartado (ii), uno de los teoremas del punto fijo, vistos en clase, y la estimación $\|K\|^2 \le \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2\,dt\,ds$. Es válida para cualquier operador integral $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, definido por $Kf(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\,ds$.

    (iv) Recordar, si vimos en clase un teorema que implica (iii) directamente.

Espacio dual.

12. Sea μ una medida positiva en un espacio medible $(\Omega, \mathfrak{A})$ Se dice que μ es *semifinita* si todo conjunto F medible (es decir, perteneciente al σ-álgebra $\mathfrak{A}$) con $0 < \mu(F) \le \infty$ tiene un subconjunto medible G tal que la medida $\mu(G)$ es finita y no nula.

    Demostrar que toda medida positiva σ-finita es semifinita. Dar un ejemplo de una medida, que es semifinita, pero no es σ-finita.

13. Sea μ una medida positiva. Dada una función $f \in L^\infty(\mu)$, consideramos el funcional ω_f sobre $L^1(\mu)$, definido por $\omega_f(x) = \int xf\,\mathrm{d}\mu$, $x \in L^1(\mu)$. Comprobar que es un funcional acotado. Suponiendo que μ es semifinita, demostrar que
$$\|\omega_f\|_{L^1(\mu)'} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

14. Calcular la norma del funcional lineal F en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ dado por $F(f) = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Encontrar un elemento de $C([0,1])$ en el que F alcance su norma; es decir, un elemento f de norma 1 tal que $|F(f)| = \|F\|$.

15. Sea $E = \{f \in C([0,1]) : f(1) = 0\}$, y sea G la restricción a E del funcional lineal del problema anterior. Demostrar que $\|G\| = \|F\|$, pero que G no alcanza su norma en $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

16. Sea E un espacio de Banach y $F \in E'$, $\|F\| \ne 0$. Sea $M = \{x \in E : F(x) = 1\}$ Demostrar que M es cerrado, convexo y no vacío, que $\inf_{x\in M} \|x\| = 1/\|F\|$, y que si F no alcanza su norma en E, entonces el $\inf_{x\in M} \|x\|$ no se alcanza.

17. Demostrar que el dual de $c_0 = \{s = (s_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} s_n = 0\}$ es ℓ^1. ¿Dónde falla la demostración si sustituimos c_0 por ℓ^∞?

18. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ dotado con la norma $\|x\| = \max_{1\le j\le N} |x_j|$. ¿Cuál es la norma correspondiente en el espacio dual $\mathbb{X}'$?

19. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y} \ne \{0\}$ espacios normados, con $\dim(\mathbb{X}) = \infty$. Demostrar que hay al menos un operador lineal no acotado $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Concluir que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces el espacio dual $\mathbb{X}'$ no coincide con el espacio dual algebraico $\mathbb{X}^\#$ (que consiste de todos los funcionales lineales). *Sugerencia:* Usar una base de Hamel.

20. Sean X e Y espacios de Banach.

    (i) Sea $y \in Y$ y $f \in X'$. Demostrar que el operador
$$Kx = f(x)y$$
    es lineal y continuo de X a Y. Calcular su norma.

(ii) Dados vectores linealmente independientes $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$, y funcionales lineales $\{f_1, \ldots, f_n\}$ en X, demostrar que el operador $K : X \to Y$ definido por

$$Kx = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$$

es lineal y de rango finito, es decir, $\dim \mathrm{Ran}(K) < \infty$ (donde $\mathrm{Ran}(K) = KX$).

(iii) Demostrar que todo operador lineal $K : X \to Y$ de rango finito n es de la forma del operador K del apartado (ii).

(iv) Demostrar que K es acotado si y solo si los funcionales f_j son continuos.

Teorema de Banach-Steinhaus. Convergencia fuerte de operadores

21. Supongamos que T_n son operadores lineales acotados de X a Y, siendo X e Y espacios de Banach. Supongamos que T es un operador lineal de X a Y, que está definido sobre todo el espacio X, pero en principio puede ser no acotado. Supongamos que T_n "tienden fuertemente a T", es decir,

$$T_n x \to Tx \quad \text{en norma}$$

para todo $x \in X$. Demostrar que: **(a)** T es acotado; **(b)** las normas de operadores T_n están uniformemente acotadas.

22. Demostrar que la completitud de X es esencial en el principio de la acotación uniforme, considerando X como la subvariedad lineal $\mathbb{C}_f^{\mathbb{N}}$ de ℓ^∞ de las sucesiones que solo tienen un número finito de términos distintos de 0, y definiendo $T_n x = n x_n$.

23. Sean X, Y, Z espacios normados y sean $T_n \in L(X, Y)$, $S_n \in L(Y, Z)$ tales que $T_n \to T$, $S_n \to S$ fuertemente cuando $n \to \infty$, donde $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$. Demostrar que $S_n T_n \to ST$ en el sentido fuerte.

24. *(el principio de acumulación de singularidades)* Supongamos que $T_{jk} (j, k \in \mathbb{N})$ son operadores acutados de X a Y, donde X e Y son espacios de Banach. Demostrar el siguiente resultado:

si para todo j,

$$\sup_k \|T_{jk}\| = +\infty,$$

entonces existe un vector $\vec{x}$ en X que cumple

$$\forall j, \quad \sup_k \|T_{jk} x\| = +\infty.$$

25. Recordamos que una sucesión $\{e_n : n \geq 1\}$ de vectores de un espacio de Banach X se dice que es *una base de Schauder* si todo vector $x \in X$ se representa de forma única como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e_n,$$

donde $f_n(x) \in \mathbb{K}$. **En este ejercicio, consideramos conocido que para cualquier base de Schauder, todos los funcionales f_n son continuos (lo que veremos, si tenemos suerte, más adelante)**.

Demostrar que $\{e_n : n \geq 1\}$ es una base de Schauder en X si y solo si se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\overline{\mathrm{Lin}}\{e_n : n \geq 1\} = X$ (es decir, la familia $\{e_n : n \geq 1\}$ es completa);

2) Los operadores P_n, definidos en el subconjunto denso de combinaciones lineales finitas $\sum\limits_{\text{finita}} \alpha_j x_j$ por

$$P_n\Big(\sum_{\text{finita}} \alpha_j x_j\Big) := \sum_{j \leq n} \alpha_j x_j,$$

son uniformemente acotados.

Problemas adicionales

26. Supongamos que tenemos una familia
$$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset X'$$
de funcionales lineales continuos sobre un espacio de Banach X de dimensión infinita. Se sabe que para todo vector $\vec{x} \in X$, hay solo un número finito de índices α, tales que $\langle \vec{x}, f_\alpha \rangle \neq 0$.

    Demostrar que entonces la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ solo puede tener un número finito de elementos no nulos.

    Indicación: Aquí no se supone que el conjunto de índices $\mathfrak{A}$ es numerable. Sugerimos ver primero que, sin embargo, basta demostrar esta afirmación para sucesiones de funcionales lineales. Utilizar el ejercicio 3.

27. Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ una base de Hamel de un espacio de Banach infinito dimensional X. Es decir, todo vector x se representa de forma única como una suma finita
$$x = \sum_{\text{finita}} f_\alpha(x) e_\alpha.$$
Demostrar que los funcionales $f_\alpha : X \to \mathbb{K}$ son lineales. Demostrar que al menos uno de ellos es discontinuo.

28. **(a)** Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Supongamos que el espacio vectorial $\mathbb{K}[t]$ de todos los polinomios sobre $\mathbb{K}$ está dotado de alguna norma. Demostrar que para todo operador lineal acotado $T : X \to \mathbb{K}[t]$, el rango $\operatorname{Ran} T = T(X)$ tiene dimensión finita.

    Indicación: Se puede utilizar el ejercicio 3.

    (b) Demostrar que para todo espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$ de dimensión infinita, existe un operador lineal $T : X \to \mathbb{K}[t]$, cuyo rango es todo el espacio $\mathbb{K}[t]$.

29. **(a)** Sea $[a, b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$. Se considera el espacio vectorial
$$C^k[a, b] = \big\{ f : [a, b] \to \mathbb{K} : \quad f \text{ es } k \text{ veces diferenciable y } f^{(k)} \text{ es continua en } [a, b] \big\}.$$
Lo dotamos de dos normas: $\|f\| := \|f\|_{C[a,b]} + \|f^{(k)}\|_{C[a,b]}$; $\|f\|_* := \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_{C[a,b]}$.

    Demostrar que estas normas son equivalentes.

    (b) Demostrar que el espacio $C^k[a, b]$ con cualquiera de estas dos normas es un espacio de Banach.

30. Sea X un espacio de Banach y M su subespacio cerrado. Sea $Q : X \to X/M$ la proyección canónica al espacio cociente.

    (a) Demostrar que
$$Q\big(B_1^X(0)\big) = B_1^{X/M}(0),$$
donde $B_1^Y(0)$ es la bola unidad abierta de radio 1 en un espacio de Banach Y, centrada en el origen.

    (b) Sea $x \in X$, $Qx = x + M \in X/M$, $\|Qx\|_{X/M} = 1$. Demostrar que
$$Qx \in Q\big(\bar{B}_1^X(0)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in x + M : \quad \|y\| = \min_{z \in x+M} \|z\|.$$
Aquí $\bar{B}_1^X(0)$ es la bola unidad *cerrada* de radio 1 en X (centrada en el origen).

31. Sea X cualquier espacio de Banach de dimensión infinita. Demostrar que la bola unidad cerrada $\bar{B}_1^X(0)$ no puede ser recubierta con una cantidad finita de bolas unidad abiertas $B_1^X(x_j)$, centradas en unos puntos $x_j \in X$, $j = 1, \dots, n$.

    Indicación: utilizar el problema anterior, elegiendo M de una manera adecuada.

    Utilizar también los ejercicios relacionados con el Lema de Riesz de la Hoja 2.