

Espacios vectoriales normados. Espacios de Banach

1. Demostrar que la métrica discreta sobre un espacio vectorial $X \neq \{0\}$ no se puede obtener a partir de una norma.
2. Demostrar que toda norma en un espacio vectorial X satisface $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$ y concluir que la aplicación $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua.
3. Sea c_{00} la subvariedad lineal de ℓ^∞ que consiste de todas las sucesiones que solamente tienen un número finito de términos no nulos. Demostrar que c_{00} no es cerrado. ¿Cuál es su cierre?
4. Demostrar que la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

es de Cauchy en $L^1(\Omega)$, $\Omega = (0, 1)$.

5. Consideramos las funciones $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$), definidas por las condiciones: cada función φ_n es continua en \mathbb{R} , es lineal en los intervalos $[0, \frac{n}{n+1}]$ y $[\frac{n}{n+1}, 1]$, $\varphi_n(x) = x$ en $[0, \frac{n}{n+1}]$ y $\varphi_n(x) = 0$ si $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Definimos una aplicación no lineal

$$\Phi(\{x_n\}) = \{\varphi_n(x_n)\}, \quad \{x_n\} \in \ell^2.$$

- (a) Demostrar que Φ es continua de ℓ^2 a ℓ^2 .
 - (b) Demostrar que Φ no es uniformemente continua en $\bar{B}_1(0)$, la bola unidad cerrada de ℓ_2 .
6. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Suponemos que Y es completo. Sea X_0 un subconjunto denso en X .
 - (a) Toda aplicación $\varphi : X_0 \rightarrow Y$, que es uniformemente continua, se extiende de forma única a una aplicación continua $\tilde{\varphi} : X \rightarrow Y$. Esta extensión es uniformemente continua.
 - (b) Una aplicación continua $\varphi : X_0 \rightarrow Y$, que no es uniformemente continua, puede no tener ninguna extensión continua a X .
 7. (a) Sea $A \subset X$, donde X es un espacio normado. Demostrar que la distancia a A , definida por

$$d_A(x) = \inf_{z \in A} \|x - z\|$$

es una función Lipschitz con constante 1. Es decir, $|d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$ para todo par de vectores $x, y \in X$.

- (b) La distancia entre dos subconjuntos $A, B \subset X$ se define como $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$. Demostrar que existe un $a \in A$ tal que $d(A, B) = d(a, B)$ si A es compacto. Concluir que la distancia entre A y B se alcanza si ambos conjuntos son compactos.
8. (a) Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $\{e_n : n \geq 1\}$ la base de Schauder canónica de ℓ^p , es decir, $e_n(k) = 0$, si $k \neq n$ y $e_n(k) = 1$ si $k = n$. Demostrar que el conjunto $A = \{\frac{n+1}{n}e_n : n \geq 1\}$ es cerrado. ¿Es compacto?
 - (b) Demostrar que la distancia entre A y la bola unidad cerrada $\bar{B}_1(0)$ en ℓ^p no se alcanza.
 9. Sea $\bar{B}_1(0)$ la bola unidad cerrada en ℓ^p . Dar un ejemplo de una función continua $f : \bar{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$, que no alcanza el máximo.

¿Es cierto que toda función uniformemente continua $f : \bar{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza el máximo? Utilizar el ejercicio anterior.

10. Sea K un compacto. Utilizando el teorema de Arzelà-Ascoli, dar condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto A de $C(K)$ sea *precompacto* (se dice que A es precompacto si su cierre es compacto).
11. Dar condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de ℓ^p , $1 < p < \infty$, sea compacto.
12. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio medible. Demostrar las desigualdades de Hölder y de Minkowski para integrales, a saber
- $$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (\text{Hölder})$$
- $$\left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{Minkowski})$$
- donde $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demostrar que $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, es un espacio vectorial normado.
13. Se dice que un subconjunto A de un espacio vectorial X es convexo si el segmento $\alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 \leq \alpha \leq 1$ está contenido en A para todo $x, y \in A$.
- (i) Demostrar que la bola unidad cerrada $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ en un espacio normado X es convexa.
- (ii) Utilizar el apartado anterior para demostrar que $\varphi(x) = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$, $x = (x_1, x_2)$, no define una norma en \mathbb{R}^2 .
14. (*Relación entre convergencia y convergencia absoluta*)
- (i) Demostrar que la convergencia absoluta de una sucesión en un espacio normado no implica la convergencia de la misma.
- Sugerencia.* Considerar en c_{00} la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{y}_n$, cuyos términos se definen por $\vec{y}_n = (y_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$, $y_n^{(n)} = 1/n^2$, $y_j^{(n)} = 0$ para todo $j \neq n$.
- (ii) Demostrar que si en un espacio normado la convergencia absoluta de toda serie implica su convergencia, entonces el espacio es completo.
15. Supongamos que $1 \leq p < q \leq \infty$. Demostrar que $\ell^p \subset \ell^q$. Demostrar que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ para todo $x \in \ell^p$.
16. Supongamos que μ es una medida de probabilidad, y sea $1 \leq p < q \leq \infty$. Demostrar que en este caso, las inclusiones son invertidas: $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$, y $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ para todo $x \in L^q(\mu)$.
17. Demostrar que $C[0, 1]$ es un subespacio cerrado de $L^{\infty}[0, 1]$.

Espacios normados de dimensión finita

18. Demostrar que para las normas $\|\cdot\|_p$ en \mathbb{R}^N se tiene la relación $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.
19. (*Lemma de Riesz*¹) Sean Y y Z subespacios de un espacio normado X (de cualquier dimensión), y supongamos que Y es cerrado y es un subconjunto propio de Z .
- (i) Demostrar que para todo número real $\theta \in (0, 1)$ existe un $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.
- (ii) Demostrar que si $\dim(Y) < \infty$, entonces se puede tomar también $\theta = 1$.
- Sugerencia.* Sea $v \in Z \setminus Y$ y sea $a > 0$ su distancia a Y , $a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|$. Observar que, dado $\theta \in (0, 1)$, existe un $y_0 \in Y$ tal que $a \leq \|v - y_0\| \leq a/\theta$. Podemos tomar $z = (v - y_0)/\|v - y_0\|$.
20. Demostrar que si un espacio normado X tiene dimensión infinita, entonces la bola unidad cerrada $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ no es compacta.
- Sugerencia.* Usar el Lemma de Riesz para construir una sucesión en M que no tiene una subsucesión convergente.

Operadores lineales. Operadores lineales acotados

21. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Demostrar que si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(\mathcal{R}(T)) \leq n$.

¹Demostrado por F. Riesz en 1918.

22. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y $\dim(X) = \dim(Y) = n < \infty$. Demostrar que $\mathcal{R}(T) = Y$ si y solo si T es biyectiva. Dar un ejemplo que muestre que esta afirmación no es necesariamente cierta en un espacio de dimensión infinita.
23. Sea $T : D \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado, donde $D \subset X$, X normado, e Y es de Banach. Demostrar que existe un operador $\tilde{T} : \overline{D} \rightarrow Y$ lineal y acotado tal que $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in D$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
24. Sean $T_1 : X \rightarrow Y$ y $T_2 : Y \rightarrow Z$ operadores lineales acotados en espacios normados. Demostrar que $\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|$.
25. La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (cuando existe) se define mediante la fórmula

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t) dt.$$

Demostrar que \mathcal{F} es continua de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.

¿Es cierto que la imagen $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ se contiene en $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$? ¿Es cierto que toda función en la imagen $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es uniformemente continua en \mathbb{R} ?