Análisis Funcional. Grado de Matemáticas de la UAM *Curso 2019/20*

Hoja de problemas 1: Espacios métricos y el Teorema de punto fijo de Banach

1.1 Espacios métricos. Topología métrica. Separabilidad

1. **(a)** Sea (X, d) un espacio métrico y $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función con las siguientes propiedades: estrictamente creciente, subaditiva: $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)+\varphi(y)$ para todo $x, y \in [0, \infty)$ y, además, $\varphi(0) = 0$. Demuéstrese que entonces la composición $\varphi \circ d : X \times X \to [0, \infty)$ es también una métrica en X. ¿Cómo se relacionan las correspondientes topologías en X?

   (b) Usando el apartado anterior, comprueba que cada una de las fórmulas

   $$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}, \quad \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad \operatorname{arctg} |x - y|$$

   define una métrica en $\mathbb{R}$. **Sugerencia:** Si $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisface $\varphi(0) = 0$, es estrictamente creciente y cóncava, entonces es subaditiva.

2. Estudiar para qué valores de $p > 0$ es $d_p(x, y) = |x - y|^p$ una métrica en $\mathbb{R}$.

3. Sea S el espacio de las sucesiones de números complejos. Demostrar que

   $$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}, \qquad x = \{x_j\},\ y = \{y_j\},$$

   es una métrica en S.

4. Dado $p \geq 1$, definimos ℓ^p como el conjunto de las sucesiones $x = \{x_j\}$ (de números reales o complejos) tales que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$.

   (i) Demostrar que si $p > r \geq 1$, entonces $\ell^p \supset \ell^r$ y que la inclusión es propia.

   (ii) Demostrar que para todo $p > 1$ la unión de todos los espacios ℓ^r, $p > r \geq 1$, es un subespacio propio de ℓ^p.

   (iii) Dar un ejemplo de una sucesión que converge a 0 pero que no está en ningún espacio ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.

5. Se puede dotar al producto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ de dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2) de una métrica de muchas formas. Demostrar, por ejemplo, que las siguientes son métricas en X:

   (i) $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$,

   (ii) $\hat{d}(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$,

   donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, con $x_1, y_1 \in X_1$, $x_2, y_2 \in X_2$.

6. Demostrar que la bola unidad cerrada centrada en la función $f(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, no es compacta en $C[0, 1]$.

7. Demostrar que el conjunto $A = \{x = \{x_n\} : |x_n| \leq \frac{1}{n} \text{ para todo } n\}$ es cerrado y compacto en ℓ^2.

8. Demostrar que un subespacio de un espacio métrico separable es también separable.

9. Demostrar que el espacio ℓ^p, es separable si $1 \leq p < \infty$, y que sin embargo ℓ^∞ no lo es.

10. Demostrar que el espacio $B[a, b]$, $a < b$, de las funciones definidas y acotadas en $[a, b]$ no es separable.

1.2 Convergencia y completitud

11. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Supongamos que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge a un punto $a \in X$. Demostrar que toda la sucesión converge a a.

12. Terminar la demostración de la existencia de la complección de un espacio métrico.

13. Demostrar que ℓ^∞ es completo.

14. Demostrar que el espacio de las sucesiones convergentes con la métrica inducida por el espacio ℓ^∞ es completo y separable.

15. Demostrar que ℓ^p, $p \geq 1$, es completo.

16. Demostrar que $(\mathbb{R}, d)$, con $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, es un espacio métrico no completo.

17. Sea X el espacio métrico de todas las sucesiones reales $x = \{x_j\}$ con un número finito de términos distintos de 0 y métrica $d(x, y) = \sum |x_j - y_j|$. Demostrar que no es completo.

18. Demostrar que el límite uniforme de funciones continuas es continuo.

19. Dado un compacto métrico K, demostrar que el espacio $C(K)$ es completo.

20. Comprobar que el espacio $C[0, 1]$, provisto de la distancia de L^1: $d(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$, es métrico pero no es completo. ¿Qué nos dice esto acerca del espacio $C[0, 1]$ como subespacio métrico de $L^1[0, 1]$?

21. ¿Cuál es la complección de un espacio métrico discreto?

1.3 Teorema del Punto Fijo de Banach y aplicaciones

22. Demostrar que el Teorema del Punto Fijo de Banach falla si T solo satisface $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, $x \neq y$.

23. Demostrar que el sistema
$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z - 1, \\ y &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{4}z + 2, \\ z &= \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z - 2, \end{aligned}$$
tiene solución única usando el Teorema del Punto Fijo de Banach.

24. Consideramos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $Ax = c$, donde A es una matriz $n \times n$ y x y c son vectores columna de tamaño n.

    (i) Demostrar que el sistema se puede reescribir en la forma $x = Cx + b$, donde $C = -D^{-1}(A - D)$, $b = D^{-1}c$, y $D = \operatorname{diag}(a_{jj})$ es la matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los de la diagonal principal de A.

    (ii) Demostrar que la iteración $x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b$ (conocida como iteración de Jacobi) converge a la única solución del sistema original si $\sum_{k=1,\, k\neq j}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}|$ para todo $j = 1, \cdots, n$.

25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $x = f(x)$ tiene una única solución si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

    (a) $|f'(x)| \leq K < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

    (b) $|f'(x)| \geq M > 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

26. Sea $G : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 < m \leq \frac{\partial G}{\partial y} \leq M$, para todo $(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ Dada una función $f \in C[a,b]$, le asociamos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{2}{m+M}\, G(x, f(x)), \quad x \in [a,b].$$

   (a) Demostrar que la aplicación $Tf = g$ es contractiva de $C[a,b]$ a $C[a,b]$.

   (b) Deducir el *teorema de función implícita*: existe una única función $h \in C[a,b]$ tal que

$$G(x, h(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

27. (Teorema de Picard) Sea f una función continua en un rectángulo

$$R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

y por tanto acotada en R, $|f| \leq c$ en R. Supongamos que f satisface una condición de Lipschitz en R con respecto a su segundo argumento con constante de Lipschitz k. Demostrar que el problema de valor inicial

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

tiene solución (local) única en cualquier intervalo $(t_0 - \beta, t_0 + \beta)$ si $\beta < \text{mín}\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$.

28. Una ecuación integral de la forma

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t,\tau) x(\tau)\, d\tau = v(t)$$

recibe el nombre de *ecuación de Fredholm de segunda especie*. Aquí $[a,b]$ es un intervalo dado, x es una función de $[a,b]$ desconocida, μ es un parámetro, k (el núcleo o *kernel*) es una función dada en el cuadrado $G = [a,b] \times [a,b]$ y v es una función dada en $[a,b]$. Dados $k \in C(G)$ y $v \in C[a,b]$, buscamos una solución $x \in C[a,b]$. Sea c tal que $|k| \leq c$ en G. Demostrar que para todo $\mu < \frac{1}{c(b-a)}$ la ecuación tiene una única solución $x \in C[a,b]$.

29. Demostrar que existe una única función continua en $[0,1]$ tal que

$$f(x) - \frac{2}{3} \cos f(x) = \int_0^1 f(xt) t^3\, dt.$$

30. Demostrar que la ecuación integral

$$x(t) = \int_0^1 \frac{x(s) + 1}{10 + t x(s)^2}\, ds$$

tiene una única solución continua $x \in C[0,1]$.

31. Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ cualquier aplicación tal que T^m es contractiva para algún m. Demostrar que T tiene un único punto fijo.

32. Dado un espacio métrico (X,d) compacto y una aplicación $T : X \to X$, que es *débilmente contractiva:*

$$d(Tx, Ty) < d(x,y) \quad \text{si } x, y \in X, x \neq y,$$

demostrar que T tiene un único punto fijo.

33. Sea $\bar{B} = \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ la bola unidad cerrada en ℓ^2. Se considera la aplicación

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) = ((1 - \|x\|_2^2)^{1/2}, x_1, x_2, \dots).$$

   (a) Demostrar que F es continua y lleva $\bar{B}$ en $\bar{B}$ (de hecho, su imagen se contiene en la esfera unidad en ℓ^2).

   (b) ¿Es F uniformemente continua? ¿Es F una aplicación Lipschitz?

   (c) Demostrar que F no tiene puntos fijos.

Ejercicios adicionales

34. Demostrar el lema de Lebesgue sobre recubrimientos abiertos de espacios métricos secuencialmente compactos.

35. (ver el ejercicio 32) Dar un ejemplo de una aplicación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ débilmente contractiva, que no tiene puntos fijos.

36. Supongamos que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface

$$|Tx - Ty| \leq \frac{1 + \text{máx}(|x|, |y|)}{2 + \text{máx}(|x|, |y|)} |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Comprobar que es entonces débilmente contractiva Demostrar que en este caso, siempre tiene un único punto fijo.

37. **(a)** Dar un ejemplo de una compacto $K \subset \mathbb{R}$ y una aplicación $T : K \to K$, que no tiene puntos fijos y es no expansiva, es decir, satisface $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para todo par de puntos $x, y \in K$.

(b) Dar un ejemplo con las mismas propiedades, donde ahora K es un compacto arcoconexo, que se contiene en $\mathbb{R}^2$.