ANÁLISIS FUNCIONAL
cuarto curso de Matemáticas

José García-Cuerva

4 de marzo de 2011

Índice general

Capítulo 1

ESPACIOS DE HILBERT

1.1. Espacios de Banach y Espacios de Hilbert. Propiedades elementales y ejemplos.

Definición 1.1.1 *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$. *Se denomina* **producto escalar** *ó* **producto interior** *en* $\mathbb{X}$ *a cualquier aplicación*

$$u : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$$

que sea una **forma sesquilineal hermitiana definida positiva**, *es decir, que cumpla, para todos los* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *y los* $x, y, z \in \mathbb{X}$, *las propiedades siguientes:*

(a) $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, z) + \beta u(y, z)$.

(a') $u(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} u(x, y) + \bar{\beta} u(x, z)$.

(b) $u(x, y) = \overline{u(y, x)}$.

(c) $u(x, x) \geq 0$ *y* $u(x, x) = 0$ *sólo para* $x = 0$.

Observamos que (a) y (b) juntas implican (a'). Naturalmente, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un **producto interior** es una **forma bilineal simétrica definida positiva**. A partir de ahora denotaremos los productos interiores mediante

$$u(x, y) = \langle x, y \rangle$$

Definición 1.1.2 *Si* $\langle\, , \rangle$ *es un* **producto interior** *en* $\mathbb{X}$, *al par* $(\mathbb{X}, \langle\, , \rangle)$ *le llamaremos* **Espacio con producto interior o Espacio Prehilbertiano**.

EJEMPLOS 1.1.3 1. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Es claro que obtenemos un producto interior.

2. Sea ahora $\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$. Si $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, definimos
$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}.$$
De nuevo es evidente que se trata de un producto interior.

3. Consideremos
$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \mathbb{C}_f^{\mathbb{N}} \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{sólo un número finito de } x_j'\text{s son } \neq 0\}. \end{aligned}$$
Si $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}_f^{\mathbb{N}}$ e $y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{C}_f^{\mathbb{N}}$, definamos
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$
La suma es, de hecho, finita, y las propiedades del producto escalar se comprueban inmediatamente.

4. Pasamos ahora a
$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$$
Si $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$ e $y = (y_1, y_2, \dots) \in l^2$, definimos
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$
Observar que la serie converge porque
$$\left| \sum_{j=n}^{m} x_j \overline{y_j} \right| \leq \left(\sum_{j=n}^{m} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=n}^{m} |y_j|^2 \right)^{1/2}$$
Esto no es más que un caso particular de la desigualdad de **Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz**, que veremos más abajo. También en esta ocasión es inmediato ver que se trata de un producto escalar.

5. $\mathbb{X} = \mathcal{C}[0,1]$, es el espacio de las funciones continuas complejas en el intervalo compacto $[0,1]$. Para $f, g \in \mathbb{X}$, definimos
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$
Es, claramente, un producto escalar.

6. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos

$$\mathcal{L}^2(\mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,, \text{medibles, tales que} \int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty\}$$

Para $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

En este caso tenemos una forma sesquilineal hermitiana; pero no es un producto escalar, ya que no es, en general, definida positiva. En efecto si $\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x) = 0$, sólo podemos concluir que $f(x) = 0$ en casi todo punto respecto a la medida μ. Para remediar ésto decimos que dos funciones $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ son equivalentes si coinciden en casi todo punto respecto a la medida μ. Así obtenemos una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^2(\mu)$ y llamamos $L^2(\mu)$ al conjunto de las clases de equivalencia. Vemos que ni las operaciones ni el valor de la forma sesquilineal dependen de los representantes elegidos en cada clase de equivalencia, de modo que $L^2(\mu)$ es un espacio vectorial con una forma sesquilineal hermitiana. Además se comprueba que ahora en $L^2(\mu)$ la forma sesquilineal sí es definida positiva, de suerte que $L^2(\mu)$ es un espacio prehilbertiano.

En este ejemplo 6 hay que mencionar explícitamente dos casos particulares que aparecerán muy frecuentemente en las páginas siguientes.

En primer lugar tenemos la situación en la que Ω es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$, normalmente un conjunto de Borel y $\mu = m_n$, la **medida de Lebesgue** sobre los subconjuntos de Borel (o los medibles) de Ω. En ese caso, escribiremos simplemente $L^2(\Omega)$, en lugar de $L^2(\mu)$. Aparecerán, sobre todo en los ejemplos, el espacio correspondiente a $\Omega = [0, 1]$, que denotaremos mediante $L^2[0, 1]$ y también los espacios $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La otra situación importante corresponde a tomar un conjunto cualquiera Ω y considerar $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ y μ la **medida contadora** o **medida cardinal** que asigna a cada subconjunto finito A de Ω el número de puntos de A y a los conjuntos infinitos les asigna medida igual a ∞. Al espacio $L^2(\mu)$ se le designa en este caso como $l^2(\Omega)$. Sus elementos son familias $(x_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de números complejos tales que

$$\sum_{\omega\in\Omega} |x_\omega|^2 < \infty$$

De acuerdo con la definición de integral, esta suma no quiere decir más que el supremo de las sumas

$$\sum_{\omega\in A} |x_\omega|^2,$$

donde A recorre todos los subconjuntos finitos de Ω. Observemos que, en general, una función integrable tiene soporte $\sigma-$ finito. Para la medida contadora los conjuntos $\sigma-$ finitos son exactamente los conjuntos numerables. Así pues, si $x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega} \in l^2(\Omega)$, solamente una cantidad numerable de componentes x_ω pueden ser diferentes de cero. La definición del producto escalar se puede escribir también como

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\omega\in\Omega} x_\omega \overline{y_\omega}$$

Esto no es más que otra forma de escribir la integral. Recordemos que

$$\sum_{\omega\in\Omega} z_\omega = z$$

quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $A \subset \Omega$ tal que para todo subconjunto finito B de Ω que contenga a A,

$$\left|\sum_{\omega\in B} z_\omega - z\right| < \varepsilon.$$

El caso particular $l^2(\{1, 2, \cdots, n\})$, que denotaremos como l^2_n, no es otra cosa que el espacio construido sobre $\mathbb{C}^n$ en el ejemplo 2.

Asimismo, $l^2(\mathbb{N}) = l^2$, el espacio del ejemplo 4.

Teorema 1.1.4 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz) *Si $\langle\, , \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{X}$, entonces para todos los $x, y \in \mathbb{X}$*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Demostración. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle - 2\mathrm{Re}(\lambda\langle y, x\rangle)$$

Tomemos

$$\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|} t \qquad \text{con} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Resulta

$$\langle x, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle - 2t|\langle x, y\rangle| \geq 0.$$

Tenemos así una ecuación cuadrática real que no tiene dos raices reales distintas, puesto que la parábola correspondiente está siempre por encima del eje real. Se sigue que

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

■

Corolario 1.1.5 *Si $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, definimos para cada $x \in \mathbb{X}$, $||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{ll} \mathbb{X} & \longrightarrow [0, \infty[\\ x & \mapsto ||x|| \end{array}$$

tiene las siguientes propiedades

(a) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}.$

(b) $||\lambda x|| = |\lambda|||x|| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{X}.$

(c) $||x|| = 0 \iff x = 0.$

Demostración. (a)

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y\rangle \leq$$
$$||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| = (||x|| + ||y||)^2.$$

(b)$||\lambda x|| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = |\lambda|||x||.$

(c) se sigue de la correspondiente propiedad (c) del producto escalar. ■

Definición 1.1.6 *Si $\mathbb{X}$ es un espacio vectorial real o complejo, toda aplicación*

$$\begin{array}{ll} \mathbb{X} & \longrightarrow [0, \infty[\\ x & \mapsto ||x|| \end{array}$$

que cumpla las propiedades (a), (b) y (c) del corolario 1.1.5, se dirá que es una **norma** *en $\mathbb{X}$, y al par $(X, || - ||)$ se le llamará* **espacio normado**.

Ejemplos 1.1.7 1. Dado un conjunto cualquiera Ω, sea

$$\mathbb{X} = \mathcal{A}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ f \text{ es acotada}\}$$

Si definimos, para $f \in \mathbb{X}$,

$$||f||_u = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|,$$

obtenemos una norma, que se conoce como la **norma de la convergencia uniforme**. En efecto, la convergencia asociada a esta norma es, justamente, la convergencia uniforme.

2. Si K es un espacio topológico compacto, el espacio $\mathcal{C}(K)$ de las funciones continuas complejas en K, es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}(K)$, de modo que $(\mathcal{C}(K), || - ||_u)$ es también un espacio normado.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,, \text{medibles, tales que} \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$$

Se puede ver que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial y que la aplicación $||-||_p : \mathcal{L}^p(\mu) \longrightarrow [0, \infty[$ definida como

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

cumple las propiedades (a) y (b) de las normas, aunque no la propiedad (c). Esto se remedia como en el caso de $\mathcal{L}^2$. El conjunto $L^p(\mu)$ de las clases de equivalencia de funciones de $\mathcal{L}^p(\mu)$ que coinciden en casi todo punto con respecto a la medida μ, junto a la aplicación $|| - ||_p$, definida de la manera obvia sobre estas clases de equivalencia, sí que es ya un espacio normado.

Cuando Ω es un medible de $\mathbb{R}^n$ y $\mu = m_n$, medida de Lebesgue en Ω, escribiremos, simplemente $L^p(\Omega)$. Usaremos con frecuencia los espacios $L^p[0, 1]$ y $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Cuando $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ y μ es la medida contadora, designaremos a $L^p(\mu)$ como $l^p(\Omega)$, en consonancia con la notación que utilizamos anteriormente para $p = 2$. Dos casos particulares que aparecerán frecuentemente son $l^p(\{1, 2, \cdots, n\} = l^p_n$ y $l^p(\mathbb{N}) = l^p$, que incluyen a los espacios l^2_n y l^2, considerados en 1.1.3.

Conviene recordar que cuando μ es una medida de probabilidad, es decir, cuando $\mu(\Omega) = 1$, se tiene

$$1 \leq p < q \implies L^q(\mu) \subset L^p(\mu).$$

Más concretamente, la desigualdad de Jensen implica que

$$\forall f \in L^q(\mu),\ \|f\|_p \leq \|f\|_q.$$

En contraste con esta situación, para los espacios asociados a la medida contadora resulta que

$$1 \leq p < q \implies l^p(\Omega) \subset l^q(\Omega)$$

y

$$\forall f \in l^p(\Omega),\ \|f\|_q \leq \|f\|_p.$$

4. Con $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ como en el ejemplo anterior, consideramos el espacio $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ de las funciones medibles, **esencialmente acotadas** respecto

a la medida μ; es decir, aquellas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles, para las que existe alguna constante $M < \infty$, que cumple

$$(1.1.8) \qquad |f(\omega)| \leq M \text{ para casi todo } \omega \in \Omega \text{ respecto a } \mu.$$

Para una tal f, se define $\|f\|_\infty$ como el **supremo esencial** de f, que es, por definición, el ínfimo (de hecho, el mínimo) de las M que satisfacen (1.1.8). Como en el ejemplo anterior, sólo falla la propiedad (c) para que $\| \cdot \|_\infty$ sea una norma. Se procede justo igual que antes, declarando equivalentes las funciones que coinciden en casi todo punto respecto a μ y así se obtiene el cociente, que es el espacio normado $L^\infty(\mu)$.

También ahora tenemos como casos particulares los espacios $L^\infty(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que está asociado a la medida de Lebesgue y también el $l^\infty(\Omega)$, para un conjunto cualquiera Ω, que es el $L^\infty(\mu)$ correspondiente a tomar como μ la medida contadora en Ω. De hecho, $l^\infty(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$, el primer ejemplo de espacio normado que hemos dado. Observamos que, en este caso $\| \; \|_u = \| \; \|_\infty$. Ejemplos importantes de la familia de espacios $l^\infty(\Omega)$ serán $l^\infty(\{1, 2, \cdots, n\}) = l_n^\infty$ y $l^\infty(\mathbb{N}) = l^\infty$.

Recordamos que, para μ medida de probabilidad $L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$ para cualquier p, mientras que para la medida contadora se da la inclusión al revés y también se cumplen las mismas desigualdades de las normas que vimos en el ejemplo anterior.

Proposición 1.1.9 *Si* $(\mathbb{X}, || - ||)$ *es un espacio normado y definimos*

$$d(x, y) = ||x - y|| \qquad \forall x, y \in \mathbb{X},$$

entonces la aplicación

$$d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty[$$

es una **distancia***, o, como se dice también otras veces, una* **métrica***, lo cual quiere decir que cumple las tres propiedades siguientes*

(a) $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{X}.$

(b) $\quad d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}.$

(c) $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$

Demostración.

(a)

$$\begin{aligned} d(x, y) &= ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \\ &\leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

(b) $\quad d(x, y) = ||x - y|| = ||y - x|| = d(y, x).$

(c) $$d(x,y) = ||x-y|| = 0 \iff x-y=0 \iff x=y.$$

$\blacksquare$

Así pues, cada espacio normado $(\mathbb{X}, ||-||)$, y en particular, cada espacio prehilbertiano $(\mathbb{X}, \langle\,,\,\rangle)$, da lugar a un espacio métrico asociado $(\mathbb{X}, d)$ y, por consiguiente, a un espacio topológico. Podemos hablar de abiertos, cerrados, bolas, etc. Utilizaremos las notaciones habituales:

Dados $x \in \mathbb{X}$ y $\varepsilon > 0$, la bola abierta de centro x y radio ε, será

$$\mathbf{B}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{X} \,:\, ||x-y|| < \varepsilon\}$$

mientras que la bola cerrada de centro x y radio ε, es

$$\overline{\mathbf{B}}(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{X} \,:\, ||x-y|| \leq \varepsilon\}.$$

Para cada subconjunto $S \subset \mathbb{X}$, designaremos por $\overline{S}$ al **cierre** o **adherencia** de S, que es el mínimo cerrado que lo contiene, etc.

Proposición 1.1.10 *En un espacio normado* $(\mathbb{X}, ||-||)$, *la distancia se comporta del siguiente modo con respecto a las operaciones algebraicas*

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{X}$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}\,,\ x,y \in \mathbb{X}$$

Se sigue que la aplicación

$$\begin{array}{ll} \mathbb{X}\times\mathbb{X} & \longrightarrow \mathbb{X} \\ (x,y) & \mapsto x+y \end{array}$$

es uniformemente continua y la aplicación

$$\begin{array}{ll} \mathbb{K}\times\mathbb{X} & \longrightarrow \mathbb{X} \\ (\lambda,x) & \mapsto \lambda x \end{array}$$

es continua.

Demostración.

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= ||x+z-(y+z)|| = ||x-y|| = d(x,y). \\ d(\lambda x, \lambda y) &= ||\lambda x - \lambda y|| = |\lambda|||x-y|| = |\lambda| d(x,y). \end{aligned}$$

Para ver que la suma es uniformemente continua hay que demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, podemos hacer $d(x+y, x'+y') < \varepsilon$ sin más que hacer $d(x,x') < \delta$ y $d(y,y') < \delta$ para un cierto $\delta > 0$. Pero ésto se sigue de la invariancia de la métrica por traslaciones y de la desigualdad triangular. En efecto

$$d(x+y, x'+y') \leq d(x+y, x'+y) + d(x'+y, x'+y') = d(x,x') + d(y,y'),$$

de modo que, para hacer $d(x+y, x'+y') < \varepsilon$ basta tomar $d(x, x') < \varepsilon/2$ y $d(y, y') < \varepsilon/2$. En cuanto a la continuidad del producto de un escalar por un vector en un cierto punto $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times \mathbb{X}$, vemos que

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda_0 x_0) &\leq d(\lambda x, \lambda x_0) + d(\lambda x_0, \lambda_0 x_0) = |\lambda| d(x, x_0) + |\lambda - \lambda_0| ||x_0|| \\ &\leq (|\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0|)||x - x_0|| + |\lambda - \lambda_0| ||x_0|| < \varepsilon \end{aligned}$$

si tomamos, por ejemplo $||x - x_0|| < \frac{\varepsilon}{3(|\lambda_0|+1)}$ y $|\lambda - \lambda_0| < \text{mín}\{1, \frac{\varepsilon}{3||x_0||}\}$.

■

Observamos que si d es una distancia en un espacio vectorial real o complejo $\mathbb{X}$ y sabemos que d cumple las dos propiedades del enunciado de la proposición 1.1.10, entonces es muy fácil ver que si definimos

$$||x|| = d(x, 0),$$

obtenemos una norma cuya distancia asociada es d.

Proposición 1.1.11 *Si $(\mathbb{X}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, entonces el producto escalar*

$$\begin{array}{ll} \mathbb{X} \times \mathbb{X} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle \end{array}$$

es una aplicación continua. Además, para todo $y \in \mathbb{X}$, las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}, & & \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K} & \text{y} & \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, y \rangle & & x \mapsto \langle y, x \rangle & & x \mapsto ||x|| \end{array}$$

son uniformemente continuas. La última de ellas, la norma, es uniformemente continua en cualquier espacio normado.

Demostración. La demostración de la continuidad del producto escalar es idéntica a la última parte de la demostración de la proposición 1.1.10, utilizando la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz. Las demostraciones de las dos afirmaciones siguientes son inmediatas y también están basadas en dicha desigualdad. Por ejemplo

$$|\langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle| = |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \leq ||x_1 - x_2|| ||y||.$$

En cuanto a la continuidad uniforme de la norma se sigue de la desigualdad

$$|||x_1|| - ||x_2||| \leq ||x_1 - x_2||.$$

que es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular de la norma (propiedad (a) de la definición 1.1.6) y que, desde luego, vale en cualquier espacio normado.

■

Definición 1.1.12

- *Si* $\mathbb{X}$ *es un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*, diremos que un subconjunto* $M \subset \mathbb{X}$ *es un* **subespacio vectorial o lineal** *de* $\mathbb{X}$*, o, simplemente, un* **subespacio** *si* M*, con las operaciones heredadas de* $\mathbb{X}$*, es a su vez, un espacio vectorial, es decir, si para todos los* $x, y \in M$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, se tiene que* $\alpha x + \beta y \in M$*. En este caso escribiremos* $M \prec \mathbb{X}$*.*

- *Si* $S \subset X$*, la intersección de todos los subespacios de* $\mathbb{X}$ *que contienen a* S *es un subespacio al que designaremos por* $[S]$ *y le llamaremos el subespacio* **generado por** S*. Es inmediato comprobar que*

$$[S] = \{\sum_{x \in F} \lambda_x x \;:\; F \textit{ finito} \subset S\,;\, \lambda_x \in \mathbb{K}\},$$

el conjunto de las combinaciones lineales finitas formadas con vectores de S *y escalares de* $\mathbb{K}$*.*

- *Diremos que el conjunto* $S \subset \mathbb{X}$ *es* **convexo** *si para cada* $x, y \in S$*, y cada* $t \in]0, 1[$*,* $(1 - t)x + ty \in S$*.*

Proposición 1.1.13 *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio normado. Entonces*

1. *Si* M *es un subespacio de* $\mathbb{X}$*, su cierre* $\overline{M}$*, también es un subespacio; es decir* $M \prec \mathbb{X} \Rightarrow \overline{M} \prec \mathbb{X}$*.*

2. *Si* S *es un subconjunto convexo de* $\mathbb{X}$*, su cierre* $\overline{S}$*, también es convexo.*

Demostración.

1. Sean $x, y \in \overline{M}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces existen sucesiones $x_n \in M$, $y_n \in M$, tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. La continuidad de las operaciones algebraicas (Proposición 1.1.10) implica que $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$, de modo que $\alpha x + \beta y \in \overline{M}$.

2. La demostración es totalmente análoga.

■

Queremos abordar ahora brevemente la siguiente pregunta:
Dado un espacio normado $(\mathbb{X}, || - ||)$, **¿Existirá un producto interior** $\langle \, , \, \rangle$ **tal que** $\forall x \in \mathbb{X}$, $||x||^2 = \langle x, x \rangle$?
Es muy fácil dar una condición necesaria

Proposición 1.1.14 (Ley del Paralelogramo) *En un espacio prehilbertiano* $(\mathbb{X}, \langle \, , \, \rangle)$ *siempre se cumple*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \\ ||x-y||^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Basta sumar para obtener la conclusión.

■

Resulta que la ley del paralelogramo no es sólo necesaria, sino también suficiente para que una norma provenga de un producto escalar. Para ver ésto lo primero que hay que hacer es saber escribir el producto escalar únicamente en términos de la norma. Este es el contenido del siguiente enunciado

Proposición 1.1.15 (Identidades de polarización)

1. *En un espacio prehilbertiano real* $\mathbb{X}$, *se cumple*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

2. *En un espacio prehilbertiano complejo* $\mathbb{X}$, *se cumple*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

Demostración. Si restamos, en vez de sumar, las expresiones que figuran al comienzo de la demostración de la proposición 1.1.14, obtenemos

$$4\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2,$$

de donde se sigue inmediatamente 1. Si ahora ponemos iy en lugar de y, deducimos

$$4\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = 4\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = ||x+iy||^2 - ||x-iy||^2.$$

Escribiendo $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, y\rangle + i\mathrm{Im}\langle x, y\rangle$, concluimos. ■

Ahora podemos enunciar la siguiente proposición, cuya prueba se deja como ejercicio (ejercicio 6 al final de esta sección).

Proposición 1.1.16 *Si una norma cumple la ley del paralelogramo, entonces proviene de un producto escalar*

Ya sabemos cómo ha de venir expresado el producto escalar en términos de la norma. Todo lo que hay que hacer es escribirlo así y verificar que, efectivamente, tiene todas las propiedades de un producto escalar.

Definición 1.1.17 *Se llamará* **espacio de Banach** *a todo espacio normado que, con la métrica inducida por la norma, sea un espacio métrico completo. Del mismo modo se llamará* **espacio de Hilbert** *a todo espacio prehilbertiano que sea completo.*

De todos los ejemplos dados en 1.1.3, solamente el 3 y el 5 no son espacios de Hilbert, por no ser completos. Por ejemplo en 3 si tomamos

$$x_n = (1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, 0, \cdots),$$

tenemos una sucesión de Cauchy ($||x_n - x_m||^2 = \sum_{j=n+1}^{m} j^{-2}$), que sin embargo no converge. En efecto, las aplicaciones coordenadas son claramente continuas, de modo que si fuera $x_n \longrightarrow x$, habríamos de tener $x = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$; pero este elemento no pertenece a $\mathbb{C}_f^{\mathbb{N}}$. Lo que sucede es que $\mathbb{C}_f^{\mathbb{N}}$ es un subespacio no cerrado del espacio de Hilbert l^2.

En 5, si tomamos f_n que vale 1 en $[0, 1/2]$, 0 en $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, 1]$ y es lineal en el resto de $[0, 1]$, es claro que f_n es una sucesión de Cauchy ($||f_n - f_m||^2 \leq 1/n$) que no tiene límite. El límite en $L^2[0, 1]$ es la función característica de $[0, 1/2]$, que no es continua. Lo que tenemos es un subespacio no cerrado de $L^2[0, 1]$.

La completitud de los demás, así como la de los ejemplos 1.1.7, puede verse usando el criterio del problema 5 de la lista que sigue a esta sección

Ejercicios

1. Sea $(\mathbf{M}, d)$ un espacio métrico. Demostrar que la distancia, vista como una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} \times \mathbf{M} & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

   es continua. ¿Es uniformemente continua? ¿Que sentido tiene hablar de continuidad uniforme?

2. Sea u una forma sesquilineal sobre un espacio vectorial $\mathbb{X}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Demostrar que para que u sea hermitiana es necesario y suficiente que para cada $x \in \mathbb{X}$, $u(x, x)$ sea real.

3. Ver que en la desigualdad de **Cauchy-Schwarz**

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$$

   la desigualdad es estricta, a no ser que x e y sean linealmente dependientes.

4. Sea $\mathbb{X}$ un espacio prehilbertiano y supongamos que x e y son vectores linealmente independientes de $\mathbb{X}$ tales que $||x|| = ||y|| = 1$. Demostrar que $||tx + (1-t)y|| < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ que cumpla $0 < t < 1$. ¿Qué nos dice ésto acerca de la bola $\bar{\mathbf{B}}(0, 1)$ de $\mathbb{X}$?

5. (a) Demostrar que para que un espacio normado $\mathbb{X}$ sea un **espacio de Banach**, es necesario y suficiente que toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de vectores $x_n \in \mathbb{X}$ que cumpla $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, sea convergente en $\mathbb{X}$.

   (b) Utilizar el criterio del apartado anterior para estudiar la completitud de los ejemplos 1.1.7 de espacios normados.

6. Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Demostrar que para que $\mathbb{X}$ sea prehilbertiano, es decir, para que su norma provenga de un producto escalar, es necesario y suficiente que se cumpla la **identidad del paralelogramo**

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

   Utilizar la parte anterior para ver que los espacios $L^p[0, 1]$ $p \neq 2$, l^p , $p \neq 2$, y $\mathcal{C}[0, 1]$ (con la norma del supremo), no son de Hilbert.

7. (a) Sea $\mathbb{X}$ la colección de todas las funciones

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$$

que son absolutamente continuas y cumplen $f(0) = 0$ y $f' \in L^2[0,1]$. Si definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}dt$$

para cada $f, g \in \mathbb{X}$, demostrar que $\mathbb{X}$ es un espacio de Hilbert.

(b) Demostrar que $\mathbb{X} \subset L^2[0,1]$ es un subespacio vectorial denso en $L^2[0,1]$.

8. Sea Ω un abierto del plano. Llamemos $A^2(\Omega)$ al subconjunto de $L^2(\Omega)$ formado por las funciones holomorfas en Ω.

    (a) Demostrar que $A^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$. Se le conoce como **espacio de Bergman**.

    (b) Sea $a \in \Omega$. Ver que $\{f \in A^2(\Omega) : f(a) = 0\}$ es un subespacio cerrado de $A^2(\Omega)$.

    (c) Si $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, probar que cada $f \in A^2(\Omega)$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$.

    (d) ¿Quién es $A^2(\mathbb{C})$?

9. Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado.

    (a) Sea $M = [x_0]$ el subespacio vectorial de $\mathbb{X}$ engendrado por el vector x_0. Demostrar que M con la métrica inducida por $\mathbb{X}$ es un espacio métrico completo.

    (b) Suponiendo que M_1 es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$ y que $x_1 \notin M_1$, demostrar que si $M_2 = M_1 + [x_1]$, entonces M_2 también es cerrado.

    (c) Utilizando (a) y (b), demostrar por inducción que todo subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.

10. (a) Sea $(\mathbf{M}, d)$ un espacio métrico. Demostrar que existe un espacio métrico completo $(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{d})$, tal que $\mathbf{M} \subset \tilde{\mathbf{M}}$, la restricción de $\tilde{d}$ a $\mathbf{M}$ es precisamente d y $\mathbf{M}$ es denso en $\tilde{\mathbf{M}}$. (Sugerencia: Utilizar sucesiones de Cauchy de $\mathbf{M}$ para definir $\tilde{\mathbf{M}}$, de la misma forma que se hace para construir los números reales a partir de los racionales).

    (b) Ver que el espacio construido en (a) es esencialmente único, en el sentido de que dos espacios métricos completos que contengan a $\mathbf{M}$ como subespacio denso son necesariamente isométricos. Así tiene sentido llamar a $\tilde{\mathbf{M}}$ **el** completado o **la** completación de $\mathbf{M}$.

    (c) Demostrar que cuando en la construcción del apartado (a) se parte de un espacio normado, se consigue un espacio de Banach y cuando se parte de un espacio prehilbertiano, se obtiene un espacio de

Hilbert. En otras palabras, el completado de un espacio normado es un espacio de Banach y el completado de un espacio prehilbertiano es un espacio de Hilbert.

1.2. El teorema de la proyección ortogonal.

Teorema 1.2.1 *Sea S un subconjunto* **convexo, cerrado,** *no vacío del espacio* **de Hilbert** $\mathbb{X}$. *Entonces existe un único vector $x_0 \in S$, de norma mínima, es decir, tal que $\|x_0\| \leq \|x\| \quad \forall x \in S$.*

Demostración. Sea $\delta = \text{ínf}\{\|x\| : x \in S\}$. Primero vemos que en S sólo puede haber un vector de norma δ. Supongamos que $x, y \in S$ y $\|x\| = \|y\| = \delta$. Aplicando a x e y la ley del paralelogramo (proposición 1.1.14), obtenemos

$$\|x-y\|^2 = 4\delta^2 - \|x+y\|^2 = 4\delta^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 0, \tag{1.2.2}$$

ya que, por ser S convexo, $\frac{x+y}{2} \in S$, y su norma es $\geq \delta$. Se sigue de (1.2.2), que $x = y$.

Pasamos ahora a demostrar la existencia de algún vector de norma mínima en S. Desde luego, existirá una sucesión de vectores $x_n \in S$, tal que $\|x_n\| \to \delta$ cuando $n \to \infty$. Utilizando de nuevo la proposición 1.1.14 vemos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\delta^2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n, m \to \infty$. Así pues, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{X}$ es completo y S es cerrado, se sigue que existe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in S.$$

La continuidad de la norma conduce a $\|x_0\| = \delta$.

■

Definición 1.2.3 *Si S y $\mathbb{X}$ son como en el teorema 1.2.1 y consideramos un vector arbitrario $x \in \mathbb{X}$, se sigue de dicho teorema que, entre todos los puntos de S hay uno único, al que denotaremos $P_S(x)$, cuya distancia a x es mínima. En efecto, $P_S(x) = x + x_0$, donde x_0 es el elemento de norma mínima del cerrado convexo $S - x$. Llamaremos a $P_S(x)$ la* **proyección ortogonal de** *x* **sobre** *S.*

La explicación de este nombre se encuentra en la siguiente **caracterización "geométrica"** de $P_S(x)$.

Proposición 1.2.4 *Si S y $\mathbb{X}$ son como en el teorema 1.2.1 y $x \in \mathbb{X}$ y $x' \in S$, entonces*

$$x' = P_S(x) \iff \text{Re}\langle x - x', x' - y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in S \tag{1.2.5}$$

Demostración. Tomemos un punto arbitrario $y \in S$. y escribamos

$$\|x-y\|^2 = \|x-x'\|^2 + \|x'-y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x-x', x'-y\rangle. \tag{1.2.6}$$

Naturalmente $x' = P_S(x)$ si y sólo si, la expresión en (1.2.6) es $\geq \|x-x'\|^2$, o, lo que es lo mismo, si

$$\|x'-y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x-x', x'-y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in S.$$

Si en lugar de y ponemos $u = (1-t)x' + ty$, con $0 < t < 1$, que también pertenece a S por ser S convexo, obtenemos la condición equivalente

$$2\mathrm{Re}\langle x-x', t(x'-y)\rangle \geq -t^2\|x'-y\|^2,$$

que, dividiendo por t y haciendo $t \to 0$, nos lleva a la condición del enunciado.

■

El carácter geométrico de la condición (1.2.5) proviene de su relación con la noción de **ortogonalidad**, que examinamos a continuación.

Definición 1.2.7 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio prehilbertiano,*

- *Decimos que los vectores $x, y \in \mathbb{X}$ son ortogonales, y escribimos $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$. Desde luego la relación $\perp$ es simétrica, pues $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y, x\rangle = 0$.*
- *Para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{X}$, definimos*

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{X} \,:\, x \perp y \quad \forall y \in S\}$$

Proposición 1.2.8 *$S^\perp$ es siempre un subespacio vectorial cerrado.*

Demostración. Puesto que

$$S^\perp = \bigcap_{x\in S} \{x\}^\perp,$$

bastará demostrar que cada $\{x\}^\perp$ es un subespacio cerrado; pero ésto es evidente, ya que $\{x\}^\perp$ no es sino el núcleo de la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &\xrightarrow{f_x} \mathbb{K} \\ y &\longmapsto f_x(y) = \langle y, x\rangle \end{aligned}$$

que es lineal y continua (proposición 1.1.10). Su núcleo $\{x\}^\perp = f_x^{-1}(0)$ será, por consiguiente, un subespacio vectorial cerrado.

■

Aunque se sigue inmediatamente de la definición, no se puede dejar de mencionar explícitamente este famoso resultado.

Teorema 1.2.9 (Pitágoras) *Si $x \perp y$, entonces*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cuando el convexo cerrado de la proposición 1.2.4 es un subespacio vectorial, la condición (1.2.5) adopta un aspecto particularmente satisfactorio.

Proposición 1.2.10 *Sea M un subespacio vectorial cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$ y sean $x \in \mathbb{X}, x' \in M$. Entonces*

$$x' = P_M(x) \Longleftrightarrow x - x' \in M^{\perp}.$$

Demostración. Según la proposición 1.2.4

$$\begin{aligned} x' = P_M(x) &\Longleftrightarrow \operatorname{Re}\langle x - x', x' - y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in M \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Re}\langle x - x', u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in M \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Re}\langle x - x', u\rangle = 0 \quad \forall u \in M \\ &\Longleftrightarrow \langle x - x', u\rangle = 0 \quad \forall u \in M. \end{aligned}$$

La razón de estas equivalencias es que, al ser M un subespacio, podemos pasar de $x' - y$ a u, de u a $-u$ y a iu.

■

Corolario 1.2.11 $\forall x \in \mathbb{X},\ x - P_M(x) = P_{M^\perp}(x)$

Demostración. En efecto, sabemos que $x - P_M(x) \in M^\perp$ y hemos de comprobar que $x - (x - P_M(x)) \in M^{\perp\perp}$. Pero ésto es evidente porque $x - (x - P_M(x)) = P_M(x) \in M \subset M^{\perp\perp}$.

■

Ya estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección

Teorema 1.2.12 (Teorema de la Proyección Ortogonal) *Sea M un subespacio vectorial cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Entonces*

(a) Todo $x \in \mathbb{X}$ se escribe de manera única como

$$x = y + z, \qquad \text{donde } y \in M \text{ y } z \in M^\perp$$

De hecho, $y = P_M(x)$ y $z = P_{M^\perp}(x)$.

(b) Las aplicaciones $P_M : \mathbb{X} \longrightarrow M$ y $P_{M^\perp} : \mathbb{X} \longrightarrow M^\perp$, son lineales.

(c) $\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$, lo que implica, en particular, que P_M y $P_{M^\perp}$ son aplicaciones continuas.

El contenido de este teorema se resume, a veces, escribiendo

$$\mathbb{X} = M \textcircled{\perp} M^{\perp},$$

lo cual se expresa diciendo que $\mathbb{X}$ *es* **suma directa ortogonal** *de* M *y* $M^{\perp}$.

Demostración.

(a) Ya sabemos que $x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x)$ y esta es la única descomposición posible, ya que si

$$x = y + z, \qquad \text{con } y \in M \text{ y } z \in M^{\perp},$$

entonces $x - y = z \in M^{\perp} \Rightarrow y = P_M(x)$ y $x - z = y \in M \subset M^{\perp\perp} \Rightarrow z = P_{M^{\perp}}(x)$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{X}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces $\alpha P_M(x) + \beta P_M(y) \in M$ y además $\alpha x + \beta y - (\alpha P_M(x) + \beta P_M(y)) = \alpha(x - P_M(x)) + \beta(y - P_M(y)) \in M^{\perp}$, ya que $M^{\perp}$ es un espacio vectorial. Se sigue de la proposición 1.2.10 que

$$\alpha P_M(x) + \beta P_M(y) = P_M(\alpha x + \beta y)$$

(c) es consecuencia del teorema de Pitágoras. A partir de

$$\|P_M(x) - P_M(y)\| = \|P_M(x - y)\| \leq \|x - y\|,$$

la continuidad de P_M resulta evidente.

■

Corolario 1.2.13 *Si* $M \neq \mathbb{X}$, *entonces* $M^{\perp} \neq 0$, *es decir, existe algún* $x \neq 0$, *tal que* $x \perp M$.

Ejercicios

1. Sean M y N dos subespacios cerrados ortogonales de un espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Demostrar que $M+N$ es también cerrado y que $P_{M+N} = P_M + P_N$.

2. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Hilbert, F un subconjunto cerrado convexo no vacío de $\mathbb{X}$. Demostrar que la aplicación P_F que hace corresponder a cada $x \in \mathbb{X}$, el elemento de F mas cercano a x, es continua de $\mathbb{X}$ sobre F.

3. Sea $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y convexos de un espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Supongamos que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F \neq \emptyset.$$
Sea x un punto determinado de $\mathbb{X}$. Llamemos x_n a la proyección de x sobre F_n y llamemos y a la proyección de x sobre F. Demostrar que para $n \to \infty$, se tiene $x_n \to y$ y $d(x, F_n) \to d(x, F)$.

4. Sea $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ una sucesión creciente de subconjuntos cerrados y convexos no vacíos de un espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Sea
$$F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}.$$
Demostrar que la proyección x_n de un punto $x \in \mathbb{X}$ sobre F_n converge para $n \to \infty$ a la proyección y de x sobre F y que $d(x, F_n)$ tiende hacia $d(x, F)$.

5. En el espacio $\mathcal{C}[0,1]$ de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma del supremo (o de la convergencia uniforme), se considera el subconjunto
$$M = \left\{ f \in \mathcal{C}[0,1] \,:\, \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$
Probar que M es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathcal{C}[0,1]$ que no contiene ningún elemento de norma mínima.

6. Sea
$$M = \left\{ f \in L^1[0,1] \,:\, \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$
Demostrar que M es un subconjunto convexo y cerrado del espacio de Banach $L^1[0,1]$, que contiene infinitos elementos de norma mínima.

7. Sea $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de subespacios vectoriales cerrados del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Demostrar que

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^\perp = \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha^\perp \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^\perp = \overline{\left[\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^\perp\right]}.$$

8. Sea A un subespacio de un espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Demostrar que

$$\bar{A} = (A^\perp)^\perp.$$

1.3. Operadores lineales acotados, espacio dual. Teorema de representación de Riesz.

Las aplicaciones naturales entre espacios normados son las **aplicaciones lineales y continuas**. A veces se usan las palabras **operadores** o **transformaciones** como sinónimos de aplicaciones. Hay una forma muy sencilla de caracterizar la continuidad de un operador lineal. Está contenida en el siguiente resultado

Proposición 1.3.1 *Sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ un operador lineal del espacio normado $\mathbb{X}$ en el espacio normado $\mathbb{Y}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) T es **uniformemente continuo**.

(b) T es **continuo**.

(c) T es **continuo** *en el punto $0 \in \mathbb{X}$.*

(d) T es **continuo** *en algún punto $x_0 \in \mathbb{X}$.*

(e) Existe un número $C > 0$, tal que, para cada $x \in \mathbb{X}$

$$||T(x)|| \leq C||x||$$

Demostración. Claramente $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$ y además $(e) \Rightarrow (a)$, ya que $||T(x) - T(y)|| = ||T(x - y)|| \leq C||x - y||$. Así pues, sólo necesitamos demostrar que $(d) \Rightarrow (e)$. Suponemos que T es continuo en un cierto punto $x_0 \in \mathbb{X}$. Esto quiere decir que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x_0)|| < \varepsilon$. Pero ello es tanto como decir $||x|| < \delta \Rightarrow ||T(x)|| < \varepsilon$. Sea $\varepsilon = 1$ y consideremos su correspondiente δ. Si $x \in \mathbb{X}$ es cualquier vector, el vector $y = \frac{\delta}{2||x||}x$ tiene $||y|| < \delta$, de modo que $||T(y)|| < 1$; pero $\|T(y)\| = \frac{\delta}{2||x||}||T(x)||$, de donde resulta $||T(x)|| \leq \frac{2}{\delta}||x||$.

■

La propiedad (e) de la proposición 1.3.1 se suele expresar diciendo que T es **acotado**. Obsérvese la diferencia de significado con el mismo término aplicado a una función real. En vista de la proposición 1.3.1, vemos que los conceptos de **operador lineal acotado** y **operador lineal continuo** son idénticos. Dados dos espacios normados $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ al espacio vectorial de todos los operadores lineales de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$ y por $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ al subespacio (lo es obviamente) de $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ formado por los operadores lineales acotados.

Proposición 1.3.2 *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, donde $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios normados. Llamamos $||T||$ al extremo inferior de las constantes $C > 0$, para las que* *se cumple la desigualdad de (e) en la proposición 1.3.1 para el operador T. Entonces*

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| \,:\, ||x|| \leq 1\} = \sup\{||T(x)|| \,:\, ||x|| = 1\} \tag{1.3.3}$$

y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) & \longrightarrow & [0,\infty[\\ T & \mapsto & ||T|| \end{array}$$

es una norma en $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*. Además si el espacio* $\mathbb{Y}$ *es completo,* $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *también lo es*

La demostración se deja como ejercicio.

Una propiedad importante de la norma (1.3.3) es su comportamiento frente a la composición de operadores, que es como sigue

Proposición 1.3.4 *Sean* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *y* $\mathbb{V}$ *espacios normados. Supongamos que* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *y que* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{V})$*. Entonces* $S \circ T \in \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{V})$ *y* $\|S \circ T\| \leq \|S\|\,\|T\|$.

La demostración es inmediata usando (1.3.3).

Corolario 1.3.5 *Si* $\mathbb{X}$ *es un espacio de Banach, entonces el espacio de Banach* $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{X})$*, al que denotaremos simplemente como* $\mathcal{B}(\mathbb{X})$*, es un álgebra con el producto dado por la composición de operadores, y además se cumple que*

$$\forall T, S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), \quad \|S \circ T\| \leq \|S\|\,\|T\|. \tag{1.3.6}$$

Demostración. La definición de álgebra sólo añade a la de espacio vectorial la asociatividad del producto y su distributividad con respecto a la suma y el producto por escalares. Todas estas propiedades son inmediatas para la composición de operadores.

■

En general cuando un espacio de Banach es un álgebra y la norma cumple la propiedad (1.3.6) con respecto al producto, se dice que es un **álgebra de Banach**. $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, para $\mathbb{X}$ espacio de Banach, será para nosotros el ejemplo más importante de álgebra de Banach.

Definición 1.3.7 *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio normado. LLamaremos* **espacio dual** *de* $\mathbb{X}$ *al espacio de Banach* $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{K})$*, al que denotaremos a partir de ahora como* $\mathbb{X}^\star$*. A sus elementos les llamaremos formas lineales acotadas o funcionales lineales acotados.*

Proposición 1.3.8 *Sean* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espacios normados y sea* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*. Entonces son equivalentes estas propiedades* *(a)* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *y existe* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, *tal que* $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$ *y* $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathbb{Y}}$.

(b) T *es un isomorfismo lineal y también un homeomorfismo.*

(c) T *es un isomorfismo lineal de* $\mathbb{X}$ *sobre* $\mathbb{Y}$ *y existen dos constantes positivas* C *y* c *tales que, para todo* $x \in \mathbb{X}$

$$c||x|| \leq ||Tx|| \leq C||x||. \tag{1.3.9}$$

Basándonos en la proposición 1.3.8, cuya prueba es casi automática, damos la siguiente

Definición 1.3.10 *Llamaremos* **isomorfismo** *del espacio normado* $\mathbb{X}$ **sobre** *el espacio normado* $\mathbb{Y}$ *a todo isomorfismo lineal de* $\mathbb{X}$ *sobre* $\mathbb{Y}$ *que además cumpla (1.3.9) para todo* $x \in \mathbb{X}$.

Observamos que si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ cumple (1.3.9) para todo $x \in \mathbb{X}$, se sigue inmediatamente que T es inyectiva; pero puede no ser "sobre". En ese caso se dice que T es un **isomorfismo** de $\mathbb{X}$ **dentro de** $\mathbb{Y}$ o un **isomorfismo sobre su imagen**.

Definición 1.3.11 *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio vectorial real o complejo y sean* $||\ ||$ *y* $||\ ||'$ *dos normas en* $\mathbb{X}$. *Diremos que las dos normas son equivalentes si dan lugar a la misma topología. En ese caso escribiremos* $||\ || \sim ||\ ||'$.

Proposición 1.3.12 *Dos normas* $||\ ||$ *y* $||\ ||'$ *definidas en* $\mathbb{X}$ *son equivalentes si y sólo si existen dos números positivos* c *y* C *tales que*

$$c||x|| \leq ||x||' \leq C||x|| \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Demostración. Observamos que las dos normas son equivalentes si la identidad es un isomorfismo del espacio normado $(\mathbb{X}, ||\ ||)$ sobre el espacio normado $(\mathbb{X}, ||\ ||')$.

■

Proposición 1.3.13 *Sean* $||\ ||$ *y* $||\ ||'$ *dos normas equivalentes sobre un cierto espacio vectorial* $\mathbb{X}$. *Supongamos que* $(\mathbb{X}, ||\ ||)$ *es completo; entonces* $(\mathbb{X}, ||\ ||')$ *también es completo.*

Demostración. Obviamente las normas equivalentes dan lugar a la misma convergencia y tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

■

EJEMPLOS 1.3.14

1. En $\mathbb{R}^n$ tenemos una familia natural de normas $|| \; ||_p$, $1 \leq p \leq \infty$, definidas del modo siguiente. Para $x \in \mathbb{R}^n$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \qquad \text{y} \qquad ||x||_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Está claro que todas estas normas son equivalentes. En efecto

$$||x||_\infty = (\max_{1 \leq j \leq n} |x_j|^p)^{1/p} \leq ||x||_p \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$$

2. Sobre $\mathbb{X} = \mathcal{C}[0,1]$ tienen sentido tanto la norma del supremo $|| \; ||_\infty$ como la norma $|| \; ||_2$ heredada de $L^2[0,1]$. Sabemos que $\mathbb{X}$ con $|| \; ||_\infty$ es completo, mientras que con $|| \; ||_2$ no lo es. Se sigue que estas dos normas no son equivalentes.

Proposición 1.3.15 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial real o complejo sobre el que tenemos definidas dos normas $|| \; ||$ y $|| \; ||'$. Llamemos $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ a las respectivas topologías determinadas en $\mathbb{X}$ por $|| \; ||$ y $|| \; ||'$. Entonces cada una de las siguientes afirmaciones implica las otras tres*

(a) $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, es decir, la topología $\mathcal{T}$ es más fina que la topología $\mathcal{T}'$.

(b) $||x||' \leq C||x||$ para todo $x \in \mathbb{X}$, con una constante que no depende de x.

(c) Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$ son, respectivamente, las bolas cerradas de centro 0 y radio 1 de $(\mathbb{X}, || \; ||)$ y de $(\mathbb{X}, || \; ||')$, existe un número $s > 0$, tal que $\mathbf{B}' \supset s\mathbf{B}$.

(d) $x_n \to x$ en la norma $|| \; || \Rightarrow x_n \to x$ en la norma $|| \; ||'$

Cuando se cumple alguna de estas propiedades, y por consiguiente todas ellas, se dice que la norma $|| \; ||$ o la métrica dada por ella, es mas fuerte que la norma $|| \; ||'$ o que su correspondiente métrica y se escribe $|| \; ||' \prec || \; ||$.

Vimos en la sección 1 (proposición 1.1.11) que en un espacio de Hilbert $\mathbb{X}$, para cada $y \in \mathbb{X}$, la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\Lambda_y} & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \langle x, y \rangle, \end{array}$$

es continua. Ahora vamos a ver que, reciprocamente, cualquier aplicación lineal y continua es de este tipo, de forma que el dual de un espacio de Hilbert es, esencialmente, él mismo.

Teorema 1.3.16 (Teorema de representación de Riesz) *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio de Hilbert y sea* $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$. *Entonces existe un único* $y \in \mathbb{X}$, *tal que* $\Lambda = \Lambda_y$. *Además* $\|y\| = \|\Lambda_y\|$, *de modo que la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X}^\star \\ y & \longmapsto & \Lambda_y, \end{array} \tag{1.3.17}$$

es una isometría antilineal de $\mathbb{X}$ *sobre* $\mathbb{X}^\star$.

Demostración. Es claro que $\|\Lambda_y\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, y\rangle| = \|y\|$, de forma que la aplicación (1.3.17) es, ciertamente, una isometría antilineal de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}^\star$. Lo que es más importante es que es sobre, como probamos a continuación. Al ser isometría antilineal, la unicidad de y tal que $\Lambda = \Lambda_y$, queda automaticamente garantizada. Sólo queda probar la existencia de y.

El núcleo de Λ será un subespacio vectorial cerrado $M = \Lambda^{-1}(0)$. Si $M = \mathbb{X}$, entonces $\Lambda = 0 = \Lambda_0$ y hemos acabado. Si $M \neq \mathbb{X}$, sabemos por el corolario 1.2.13 que existe algún $y_0 \in M^\perp$, tal que $\|y_0\| = 1$. Entonces, dado $x \in \mathbb{X}$, podemos considerar $z = \Lambda(x)y_0 - \Lambda(y_0)x$. Es claro que $\Lambda(z) = 0$, es decir, $z \in M$. Por lo tanto

$$0 = \langle z, y_0\rangle = \Lambda(x)\|y_0\|^2 - \Lambda(y_0)\langle x, y_0\rangle = \Lambda(x) - \Lambda(y_0)\langle x, y_0\rangle,$$

lo que nos conduce a

$$\Lambda(x) = \langle x, y\rangle \qquad \text{con } \ y = \overline{\Lambda(y_0)}y_0.$$

■

Terminamos esta sección presentando una variante del Teorema de representación de Riesz, formulada por P. Lax y A. N. Milgram, que resulta muy útil en la investigación de la existencia de soluciones para las ecuaciones lineales en derivadas parciales de tipo elíptico.

Teorema 1.3.18 (Lax-Milgram) *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{K}$ *y sea*

$$B : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$$

una aplicación que cumple las siguientes propiedades:

- *Es* **sesquilineal**, *es decir*

$$B(ax + by, z) = aB(x, z) + bB(y, z) \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{X} \text{ y } \forall a, b \in \mathbb{K} \text{ y}$$

$$B(x, ay + bz) = \bar{a}B(x, y) + \bar{b}B(x, z) \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{X} \text{ y } \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

- *Es* **acotada**, *es decir, existe un número positivo* C, *tal que*

$$|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \ \ \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Entonces, existe un único $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$*, tal que*

$$B(x,y) = \langle x, T(y)\rangle \ \ \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Si además B *está* **acotada lejos de cero***, en el sentido de que*

$$B(x,x) \geq c\|x\|^2 \ \ \forall x \in \mathbb{X},$$

entonces el operador T *tiene un inverso* $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$.

Demostración. Dado $y \in \mathbb{X}$, consideramos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & B(x,y) \end{array}$$

Por las propiedades de B, Λ es lineal y continua, de forma que, $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$. Según el Teorema de representación de Riesz, existirá un único vector $z \in \mathbb{X}$, tal que $\Lambda = \Lambda_z$. Desde luego, el vector z dependerá de y. Vamos a llamarle $z = T(y)$. Tenemos, entonces

$$B(x,y) = \langle x, T(y)\rangle \ \ \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Vamos a ver ahora que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, es decir, que T es lineal y continuo.

Comenzamos con la linealidad. Sean $x, u, v \in \mathbb{X}$ y $a, b \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, aT(u) + bT(v)\rangle &= \bar{a}\langle x, T(u)\rangle + \bar{b}\langle x, T(v)\rangle \\ &= \bar{a}B(x,u) + \bar{b}B(x,v) = B(x, au + bv) = \langle x, T(au + bv)\rangle. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{X}$, se sigue que

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v) \ \ \forall u, v \in \mathbb{X} \text{ y } \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

La continuidad resulta de escribir

$$\|T(x)\|^2 = |\langle T(x), T(x)\rangle| = |B(T(x), x)| \leq C\|T(x)\| \, \|x\|,$$

que implica

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|.$$

Si suponemos, además, que B está acotada lejos de cero, tendremos

$$c\|x\|^2 \leq |B(x,x)| = |\langle x, T(x)\rangle| \leq \|x\|\|T(x)\|.$$

En otras palabras

$$c\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C\|x\|.$$

Esto implica que T es inyectiva y, de hecho, un isomorfismo de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}$. Sólo queda por demostrar que T es sobreyectiva. Desde luego sabemos que la imagen $T(\mathbb{X})$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$, ya que es isomorfo a $\mathbb{X}$. Supongamos que $u \in T(\mathbb{X})^\perp$. Entonces $B(u,u) = \langle u, T(u)\rangle = 0$ y de aquí se sigue que $u = 0$. Pero esto es posible sólo si $T(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$. Tenemos así el inverso $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. De hecho $\|T^{-1}(y)\| \leq c^{-1}\|y\| \ \forall y \in \mathbb{X}$.

■

Ejercicios

1. Demostrar que en un espacio vectorial real o complejo de **dimensión finita**, todas las normas son equivalentes.

   (Sugerencia: Tomar una base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ y definir $||\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j||_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$. Ver que $||\ ||_1$ es una norma y compararla con cualquier otra. Es útil observar que $\{x : ||x||_1 = 1\}$ es compacto en la topología dada por $||\ ||_1$.)

2. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y supongamos que $\mathbb{X}$ es de dimensión finita. Si $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es una transformación lineal, demostrar que T es siempre continua.

3. Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ y $\mathbb{V}$ espacios normados.

   (a) Demostrar que la aplicación

   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{Y} \\ (T, x) & \longmapsto & T(x) \end{array}$$

   es continua.

   (b) Demostrar que la aplicación

   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{V}) \times \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{V}) \\ (T, S) & \longmapsto & T \circ S \end{array}$$

   es continua.

4. Ver que si $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios normados y además $\mathbb{Y}$ es completo, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ también es completo.

5. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach.

   (a) Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}) = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ y $||\mathrm{id}_{\mathbb{X}} - T|| < 1$, demostrar que T es un **isomorfismo** de $\mathbb{X}$ sobre sí mismo.

   (Sugerencia: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id}_{\mathbb{X}} - T)^n$ converge en $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.)

   (b) Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ es un isomorfismo de $\mathbb{X}$ sobre sí mismo y $||T - S|| < ||T^{-1}||^{-1}$, ver que S también es un isomorfismo de $\mathbb{X}$ sobre sí mismo. Usar ésto para concluir que el conjunto formado por todos los isomorfismos de $\mathbb{X}$ sobre sí mismo es un abierto de $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

6. Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y $M \prec \mathbb{X}$ un subespacio cerrado propio.

(a) En $\mathbb{X}/M$ se define $||x+M|| = \text{ínf}\{||x+y|| \,:\, y \in M\}$. Ver que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}/M & \longrightarrow & [0,\infty[\\ x+M & \longmapsto & ||x+M|| \end{array}$$

es una norma en $\mathbb{X}/M$ (se la conoce como **norma cociente**)

(b) Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $||x|| = 1$ y $||x+M|| \geq 1-\varepsilon$.

(c) Ver que la proyección

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X}/M \\ x & \longmapsto & \pi(x) = x+M \end{array}$$

es un operador lineal continuo con $||\pi|| = 1$.

(d) Demostrar que si $\mathbb{X}$ es completo, entonces $\mathbb{X}/M$ también lo es.

7. Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sean M y N subespacios de $\mathbb{X}$. Supongamos que M es cerrado y que N tiene dimensión finita. Demostrar que $M+N$ es también un subespacio cerrado.

8. Si $p : \mathbb{X} \longrightarrow [0,\infty[$ es una **seminorma** en el espacio vectorial real o complejo $\mathbb{X}$ (es decir $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{X}$ y $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para cada $x \in \mathbb{X}$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$), demostrar que el conjunto $M = \{x \in \mathbb{X} \,:\, p(x) = 0\}$ es un subespacio vectorial y, si se define $||x+M|| = p(x)$, demostrar que $||\ ||$ es un norma en $\mathbb{X}/M$.

9. Si $\mathbb{X}$ es un espacio normado y M es un subespacio vectorial no cerrado de $\mathbb{X}$, ver que si definimos $p(x+M) = \text{ínf}\{||x+y|| \,:\, y \in M\}$, obtenemos una seminorma en $\mathbb{X}/M = \mathbb{Y}$. Si ahora consideramos en $\mathbb{Y}/p^{-1}(0)$ la norma asociada, ver que $\mathbb{Y}/p^{-1}(0)$ y $\mathbb{X}/\overline{M}$ son isométricos.

10. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

    (a) Demostrar que $\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{X} \,:\, T(x) = 0\}$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$.

    (b) Si M es un subespacio cerrado de $\mathcal{N}(T)$, ver que existe un único $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}/M,\mathbb{Y})$ tal que $T = S \circ \pi$, donde $\pi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}/M$ es la proyección canónica. Además $||S|| = ||T||$.

11. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de Hilbert del problema 7 de la sección 1. Si $0 < t \leq 1$, se define $L : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $L(f) = f(t)$. Demostrar que $L \in \mathbb{X}^\star$, es decir que L es un funcional lineal acotado, calcular $||L||$ y encontrar el vector $g \in \mathbb{X}$ tal que $L(f) = \langle f, g\rangle$ para todo $f \in \mathbb{X}$. (la existencia y unicidad de g están garantizadas por el teorema de representación de Riesz)

12. Sea $\mathbb{X} = L^2[0,1]$ y sea $\mathcal{C}^1 = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \ : \ \exists f' \in \mathcal{C}[0,1]\}$. Sea $t \in [0,1]$ y definamos $L : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $L(f) = f'(t)$. Demostrar que no existe ningún funcional lineal acotado en $\mathbb{X}$ que coincida con L en $\mathcal{C}^1$.

1.4. Sistemas ortonormales y bases.

Definición 1.4.1 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio prehilbertiano.*

- *Llamaremos* **sistema ortogonal (SOG)** *a cualquier conjunto $\Phi = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de vectores de $\mathbb{X}$ que sean ortogonales dos a dos, es decir, que cumplan*

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}, \text{ tales que } \alpha \neq \beta.$$

- *Si además cada vector $x_\alpha \in \Phi$ tiene norma $\|x_\alpha\| = 1$, diremos que Φ es un* **sistema ortonormal (SON)**

EJEMPLOS 1.4.2

1. Sea $\mathbb{X} = L^2[0,1]$. El **sistema trigonométrico** está formado por las funciones

$$e_n(x) = e^{i2\pi nx} \;\; 0 \leq x \leq 1, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Es inmediato verificar que se trata de un sistema ortonormal, ya que

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^1 e^{i2\pi(n-m)x}dx = \begin{cases} \left[\frac{e^{i2\pi(n-m)x}}{i2\pi(n-m)}\right]_0^1 = 0 & \text{si } n \neq m \\ \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

2. Sea $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y sea P la medida de probabilidad en Ω obtenida como medida producto de infinitas copias de la medida μ en $\{0,1\}$ dada por $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$. En Ω consideramos las variables aleatorias

$$\begin{array}{rcl} X_n \;:\Omega & \longrightarrow & \{-1,1\} \\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots) & \longmapsto & (-1)^{\omega_n} \end{array}$$

Es claro que las variables aleatorias X_n son independientes, lo cual quiere decir que, si $n \neq m$,

$$P(X_n \in A \;\wedge\; X_m \in B) = P(X_n \in A)P(X_m \in B) \quad \forall A, B \subset \{-1,1\}.$$

A partir de aquí se deduce inmediatamente la ortogonalidad. En efecto, si $n \neq m$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega X_n(\omega)X_m(\omega)dP(\omega) \\ &\quad = P(X_n = 1 \;\wedge\; X_m = 1) + P(X_n = -1 \;\wedge\; X_m = -1) \\ &\quad -P(X_n = 1 \;\wedge\; X_m = -1) - P(X_n = -1 \;\wedge\; X_m = 1) = 0 \end{aligned}$$

ya que todos estos conjuntos tienen la misma medida de probabilidad, concretamente 1/4. De hecho, el sistema es ortonormal en $L^2(\Omega)$, puesto que, obviamente $\|X_n\| = 1 \ \forall n$.

Podemos transplantar el sistema $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ al intervalo $[0,1]$, utilizando la aplicación

$$r : [0,1] \longrightarrow \Omega$$

que asigna a cada número $x = \sum_1^{\infty} 2^{-n} x_n \in [0,1]$, donde $x_n \in \{0,1\}$ (y los x_n no son todos iguales a 1 a partir de un cierto índice), la sucesión $r(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Omega$. En concreto, consideramos el sistema $\mathcal{R} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de **Rademacher**, formado por las funciones $r_n(x) = X_n(r(x))$

Si observamos que la imagen recíproca de la medida de probabilidad P en Ω mediante la aplicación r no es otra que la medida de Lebesgue en $[0,1]$, llegamos a la conclusión de que el **sistema de Rademacher** $\mathcal{R} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal en $L^2[0,1]$.

3. El **sistema de Haar** está formado por las funciones

$$h_N : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ N = 0, 1, 2, \cdots,$$

definidas del modo siguiente:

$$h_0 = \chi_{[0,1]}$$

Si $N \in \mathbb{N}$, entonces existe un único $n = 0, 1, 2, \cdots$, tal que $2^n \leq N < 2^{n+1}$, y es claro que N se puede escribir de forma única como $N = 2^n + j - 1$ con $1 \leq j \leq 2^n$. En este caso, se define

$$h_N = h_{n,j} = 2^{\frac{n}{2}} \left(\chi_{[2^{-n}(j-1), 2^{-n}(j-1/2)]} - \chi_{[2^{-n}(j-1/2), 2^{-n}j]} \right).$$

A veces conviene pensar en las funciones del sistema de Haar (excluyendo h_0) como distribuidas en paquetes $\mathcal{H}_n = \{h_{n,j} : j = 1, \cdots, 2^n\}$. Vamos a ver que el sistema de Haar es un sistema ortonormal en $L^2[0,1]$. En primer lugar, es claro que $\|h_N\| = 1 \ \forall N$, ya que cada $h_{n,j}$ tiene soporte en un intervalo $\Delta_{n,j}$, de longitud 2^{-n}, en el que su valor absoluto es, justamente, $2^{n/2} = |\Delta_{n,j}|^{-1/2}$.

En cuanto a la ortogonalidad, es clara si las funciones pertenecen al mismo paquete, pues entonces sus soportes no se solapan (a lo sumo tienen un punto común). En el caso de que las funciones pertenezcan a distintos paquetes, o bien sus soportes no se solapan, o, si lo hacen, el menor está contenido o en el semiintervalo de la izquierda o en el semiintervalo de la derecha del mayor. Allí la otra función es constante y basta observar que todas las funciones del sistema de Haar, con excepción de la primera, tienen integral nula.

4. **Algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt**. Dado un conjunto de vectores $\{x_1, \cdots, x_n \cdots\}$ linealmente independientes de un espacio prehilbertiano $\mathbb{X}$, es posible construir un SON $\{u_1, \cdots, u_n \cdots\}$, de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[x_1, \cdots, x_n] = [u_1, \cdots, u_n]$. Esto se consigue con el procedimiento de Gram-Schmidt, que describimos a continuación.

   Primero buscamos $u_1 = \lambda x_1$. Habrá de ser $1 = \|u_1\| = |\lambda|\|x_1\|$, de modo que si tomamos $\lambda = \|x_1\|^{-1}$, habremos conseguido u_1 con $\|u_1\| = 1$ y tal que $[x_1] = [u_1]$.

   Si suponemos que ya tenemos $u_1, \cdots, u_n$ ortonormales y tales que $\forall j$ con $1 \leq j \leq n$, $[x_1, \cdots, x_j] = [u_1, \cdots, u_j]$, podemos obtener u_{n+1} como

$$u_{n+1} = c(\lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n + x_{n+1})$$

   Nos aseguramos que u_{n+1} es ortogonal a todos los u_j, $j \leq n$, haciendo

$$0 = \langle u_{n+1}, u_j \rangle = c(\lambda_j + \langle x_{n+1}, u_j \rangle),$$

   lo cual se consigue sin más que tomar $\lambda_j = -\langle x_{n+1}, u_j \rangle$. Después se elige c de modo que $\|u_{n+1}\| = 1$.

Proposición 1.4.3 *Sea* $\{u_1, \cdots, u_n\}$ *un SON del espacio prehilbertiano* $\mathbb{X}$. *Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} [u_1, \cdots, u_n] & \longrightarrow & l_n^2 \\ x & \longmapsto & (\langle x, u_j \rangle)_{j=1}^n \end{array}$$

es una isometría.

Demostración. Lo que quiere decir ésto es que para cada $x \in [u_1, \cdots, u_m]$, tenemos

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, u_j \rangle|^2.$$

Pero esta identidad es consecuencia del teorema de Pitágoras,una vez que observamos que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j.$$

Esta última identidad se obtiene escribiendo $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$ y haciendo el producto escalar con cada u_j. Al ser los u_j ortonormales, se sigue que, necesariamente $\lambda_j = \langle x, u_j \rangle$.

■

Como consecuencia se sigue que el espacio $[u_1, \cdots, u_n]$ es siempre cerrado, ya que es isométrico al espacio completo l_n^2. Por otro lado, todo subespacio de dimensión finita M puede ponerse como $M = [u_1, \cdots, u_n]$, usando por ejemplo, el algoritmo de Gram-Schmidt. Así se ve que todo subespacio de dimensión finita es cerrado (comparar con el ejercicio 9 de la sección 1)

En el resto de la sección $\mathbb{X}$ representará siempre un espacio de Hilbert. Esto no supone ninguna pérdida de generalidad, puesto que sabemos que todo espacio prehilbertiano se puede completar a un espacio de Hilbert (ver problema 10 de la sección 1).

Teorema 1.4.4 *Sea $\{u_1, \cdots, u_n\}$ un SON en $\mathbb{X}$. Consideremos el subespacio $M = [u_1, \cdots, u_n]$, que ya sabemos que es cerrado. Entonces*

$$\forall x \in \mathbb{X} \qquad P_M(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j$$

Demostración. Según la proposición 1.2.10, basta comprobar que $x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j \in M^{\perp}$; pero ésto es evidente ya que

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle u_j, u_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \cdots, n.$$

∎

Corolario 1.4.5 (Desigualdad de Bessel) *Si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es un SON en $\mathbb{X}$, entonces*

$$\forall x \in \mathbb{X} \qquad \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración. En efecto, para cualquier subconjunto finito $F \subset \mathcal{A}$, si consideramos el subespacio $M_F = [\{u_\alpha\}_{\alpha \in F}]$ generado por los u_α , $\alpha \in F$, sabemos que

$$\forall x \in \mathbb{X} \qquad P_{M_F}(x) = \sum_{\alpha \in F} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha$$

Entonces

$$\sum_{\alpha \in F} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 = \|P_{M_F}(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Basta hacer el supremo en todos los F para concluir.

∎

Pretendemos ahora extender la proposición 1.4.3 al caso de un SON infinito. Necesitamos un resultado general previo.

Lema 1.4.6 *Sean $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ dos espacios métricos con distancias respectivas d y d'. Supongamos, además, que $\mathbf{M}$ es completo. Sea $T : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}'$ una aplicación continua y sean $S \subset \mathbf{M}$ y $S' \subset \mathbf{M}'$ subconjuntos densos en $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ respectivamente tales que la restricción de T a S es una isometría de S sobre S'. Entonces T es una isometría de $\mathbf{M}$ sobre $\mathbf{M}'$*

Demostración. Es claro que $T : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}'$ es una isometría. En efecto, si $x_n, y_n \in S$ y $x_n \to x$ e $y_n \to y$ para $n \to \infty$, entonces por la continuidad de T y de la distancia, se tiene

$$d'(T(x), T(y)) = \lim_{n\to\infty} d'(T(x_n), T(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

La afirmación realmente importante es que se trata de una isometría **sobre** todo $\mathbf{M}'$. Para ver ésto, partimos de un $x' \in \mathbf{M}'$ y hemos de ver que es imagen de algún punto de $\mathbf{M}$. Como S' es denso en $\mathbf{M}'$, existirá una sucesión $x'_n \in S'$, tal que $x'_n \to x'$ cuando $n \to \infty$. Cada x'_n será imagen de algún punto $x_n \in S$. Por ser T isometría de S sobre S', la sucesión x_n será de Cauchy, y por ser $\mathbf{M}$ completo convergerá a algún $x \in \mathbf{M}$. La continuidad de T nos asegura que $T(x) = x'$.

■

Teorema 1.4.7 *Sea $\Phi = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un SON en $\mathbb{X}$. Entonces, si llamamos M_Φ al mínimo subespacio cerrado que contiene a Φ, es decir $M_\Phi = \overline{[\Phi]}$, resulta que la aplicación*

$$x \overset{T}{\longmapsto} (\langle x, u_\alpha\rangle)_{\alpha\in\mathcal{A}}$$

es una isometría de M_Φ sobre $l^2(\mathcal{A})$; es decir

$$x \in M_\Phi \Longleftrightarrow x = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha u_\alpha \quad \text{con } (\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in l^2(\mathcal{A}),$$

y, en ese caso

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\lambda_\alpha|^2.$$

Demostración. En primer lugar, se sigue de la desigualdad de Bessel que la aplicación T está perfectamente bien definida y es continua de M_Φ (o de todo $\mathbb{X}$) en $l^2(\mathcal{A})$. Además la restricción de T a $[\Phi]$ es una isometría de $[\Phi]$ sobre el subespacio $l^2_f(\mathcal{A})$ formado por las familias $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que tienen sólo un número finito de componentes λ_α distintas de 0. Ahora sólo hay que darse cuenta de que $[\Phi]$ es denso en M_Φ y $l^2_f(\mathcal{A})$ es denso en $l^2(\mathcal{A})$ y aplicar el lema 1.4.6. ■

Teorema 1.4.8 *Sea $\Phi = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un SON en $\mathbb{X}$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes*

(a) Φ *es un* **sistema ortonormal maximal**, *es decir, si $x \in \mathbb{X}$ es tal que $\langle x, u_\alpha\rangle = 0\ \forall\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $x = 0$.*

(b) El subespacio vectorial $[\Phi]$, generado por Φ, o sea, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de Φ, es denso en $\mathbb{X}$.

(c) $\forall x \in \mathbb{X}$, *se cumple*

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \qquad \textbf{(identidad de Plancherel)}.$$

(d) $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se cumple*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x, u_\alpha \rangle \overline{\langle y, u_\alpha \rangle} \qquad \textbf{(identidad de Parseval)}.$$

(e) $\forall x \in \mathbb{X}$,

$$x = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha$$

Demostración.

- $(a) \Longrightarrow (b)$. Si no se cumpliera (b), $M_\Phi = \overline{[\Phi]}$ sería un subespacio cerrado propio de $\mathbb{X}$. Se sigue del corolario 1.2.13 que existiría $x \in \mathbb{X}$, tal que $x \neq 0$ y, sin embargo, $\langle x, u_\alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \in \mathcal{A}$. Esto nos llevaría a que Φ no es maximal, porque se le puede añadir $\frac{x}{\|x\|}$ y obtener un sistema ortonormal mayor.

- $(b) \Longrightarrow (c)$ Esto es consecuencia inmediata del teorema 1.4.7.

- Que (c) y (d) son equivalentes es consecuencia de las identidades de polarizacion (1.1.15).

- $(d) \Longrightarrow (e)$. Basta observar que, dado $x \in \mathbb{X}$ y dado un conjunto finito $F \subset \mathcal{A}$,
$$\left\| x - \sum_{\alpha \in F} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \notin F} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \to 0$$
por la desigualdad de Bessel.

- Finalmente $(e) \Longrightarrow (a)$, pues, en particular (e) implica que el único vector ortogonal a todos los de Φ es el vector 0.

$\blacksquare$

Definición 1.4.9 *Se llama* **base (ortonormal)** *o también* **sistema ortonormal completo (SONC)** *de un espacio de Hilbert* $\mathbb{X}$, *a cualquier SON* $\Phi = \{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *de* $\mathbb{X}$ *que cumpla alguna de (y, por lo tanto, todas) las propiedades del teorema 1.4.8*

A continuación estudiaremos si los ejemplos que dimos en 1.4.2 son o no completos.

Comenzamos con el sistema trigonométrico $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Para una función cualquiera $f \in L^1[0,1]$, tiene sentido hablar de sus **coeficientes de Fourier**.

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}dt \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.10}$$

Desde luego, para $f \in L^2[0,1] \subset L^1[0,1]$,

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle.$$

Llamaremos **polinomio trigonométrico** a cualquier combinación lineal finita

$$\sum_{|n|\leq N} \lambda_n e_n \quad \lambda_n \in \mathbb{C}$$

de funciones e_n del sistema trigonométrico. Designaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los polinomios trigonométricos. $\mathcal{P}$ es el subespacio vectorial de $L^2[0,1]$ generado por el sistema trigonométrico. Es importante observar que $\mathcal{P}$ es un álgebra, o sea, que el producto de dos polinomios trigonométricos es un nuevo polinomio trigonométrico, ya que $e_n e_m = e_{n+m}$.

Teorema 1.4.11 *Si $f \in L^1[0,1]$, tiene $\hat{f}(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in [0,1]$ con respecto a la medida de Lebesgue.*

La afirmación anterior vale, en particular, para $f \in L^2[0,1]$. Se sigue, de acuerdo con el teorema 1.4.8, que el sistema trigonométrico es completo, o, en otras palabras, constituye una base del espacio de Hilbert $L^2[0,1]$.

Demostración.

- **Primer paso**

  Supongamos, en primer lugar, que f es una función continua, periódica de periodo 1 en $\mathbb{R}$. Vamos a ver que si f no es identicamente nula y, sin embargo, todos sus coeficientes de Fourier son 0, se sigue una contradicción. Basta suponer que f es real. Como f es continua, podemos suponer que existe algún intervalo abierto $I \subset [0,1]$ con $0 < |I| < 1/2$ y alguna constante $a > 0$, tal que $f(x) > a$ para todo $x \in I$. Llamemos x_0 al centro del intervalo. Consideramos el polinomio trigonométrico

  $$\varphi(x) = 1 + \cos(2\pi(x - x_0)) - \cos(\pi|I|),$$

  que hemos elegido de forma que $\varphi(x) > 1$ si $x \in I$ y $|\varphi(x)| \leq 1$ si $x \notin I$. Observamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^k \in \mathcal{P}$. Entonces

  $$0 = \int_0^1 f(x)\varphi(x)^k dx = \int_I f(x)\varphi(x)^k dx + \int_{[0,1]\setminus I} f(x)\varphi(x)^k dx; \tag{1.4.12}$$

Pero en (1.4.12), la integral sobre el complemento de I permanece acotada cuando $k \to \infty$, ya que $|\varphi^k| \leq 1$, mientras que la integral sobre I tiende a ∞ para $k \to \infty$, al ser $f > a$ y $\varphi > 1$ en I. Esta contradicción termina la prueba del primer paso.

- **Segundo paso**

  Sea ahora una función arbitraria $f \in L^1[0,1]$ que tiene $\hat{f}(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Consideramos su primitiva $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, para $0 \leq x \leq 1$, que podemos ver como una función periódica de periodo 1 en $\mathbb{R}$, ya que $F(0) = F(1) = 0$. Se sabe, por el **teorema de diferenciación de Lebesgue,** que $F'(x) = f(x)$ para casi todo x respecto a la medida de Lebesgue. Por otro lado, para todo $n \neq 0$, se tiene, integrando por partes

$$\begin{aligned} \hat{F}(n) = \int_0^1 F(x)e_{-n}(x)dx &= \left[\frac{F(x)e_{-n}}{-2\pi i n}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 F'(x)e_{-n}(x)dx \\ &= \frac{\hat{f}(n)}{2\pi i n} = 0. \end{aligned}$$

  Resulta así que la función continua periódica $F(x) - \hat{F}(0)$ tiene todos sus coeficientes de Fourier nulos, y, de acuerdo con lo que vimos en el primer paso de esta demostración, se tiene que anular identicamente. Esto nos dice que F es constante y, como f es su derivada en casi todo punto, obtenemos que $f(x) = 0$ en casi todo punto, como queríamos demostrar.

■

En general, para $f \in L^1[0,1]$, llamaremos $S[f]$ a la **serie de Fourier** de f, que es, por definición, la serie formal

$$S[f] = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e_n.$$

Además, para cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, designaremos por $S_N(f)$ a la $N-$ésima **suma parcial** de la serie de Fourier de f, es decir, al polinomio trigonométrico

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n(x).$$

Corolario 1.4.13 *1. Para toda $f \in L^2[0,1]$, $S_N(f) \to f$ en $L^2[0,1]$ cuando $N \to \infty$, es decir*

$$\int_0^1 |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \to 0 \text{ cuando } N \to \infty.$$

2. Para toda $f \in L^2[0,1]$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2.$$

Demostración.

1. es la propiedad (e) del teorema 1.4.8 para el sistema trigonométrico.

2. es la identidad de Plancherel (propiedad (c) del teorema 1.4.8) para el sistema trigonométrico.

$\blacksquare$

En general, por analogía con el sistema trigonométrico, que es para el que se acuñaron originalmente los términos de coeficiente y serie de Fourier, cuando se tiene un SON $\Phi = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en un espacio de Hilbert $\mathbb{X}$ y un elemento $x \in \mathbb{X}$, se llama a los números $\langle x, u_\alpha\rangle$ coeficientes de Fourier de x respecto al SON Φ y a la serie $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha$, serie de Fourier de x respecto a Φ.

El teorema 1.4.11 tiene su análogo para el sistema de Haar.

Teorema 1.4.14 *Si* $f \in L^1[0,1]$ *tiene todos sus coeficientes de Fourier con respecto al sistema de Haar iguales a* 0, *entonces* $f(x) = 0$ *en casi todo* $x \in [0,1]$ *con respecto a la medida de Lebesgue.*

Como consecuencia, el sistema de Haar $\{h_N\}_{N=0}^{\infty}$ *es completo en* $L^2[0,1]$.

Demostración. Sea $f \in L^1[0,1]$, tal que $\int_0^1 f(x)h_N(x) = 0$ para todo $N = 0,1,\cdots$. Si para cada $N = 0,1,\cdots$, llamamos Δ_N al intervalo diádico soporte de la función h_N, vamos a ver que

$$\int_{\Delta_N} f(x)dx = 0 \quad \text{para todo } N = 0,1,\cdots . \tag{1.4.15}$$

Como los $\{\Delta_N\}_{N=0}^{\infty}$ son todos los intervalos diádicos, es decir, todos los que resultan de dividir $[0,1]$ en 2^n intervalos, para algún $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, (1.4.15) implicará, utilizando el **teorema de diferenciación de Lebesgue,** que $f = 0$ en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue.

Vamos a demostrar (1.4.15) por reducción al absurdo. Sea Δ un intervalo diádico de longitud máxima en el que $\int_\Delta f(x)dx \neq 0$. Desde luego, $|\Delta| \leq 1/2$, ya que $h_0 = \chi_{[0,1]}$. Este intervalo diádico Δ proviene de dividir en dos otro intervalo diádico Δ', al que podemos llamar su **"padre"**. Por hipótesis $\int_{\Delta'} f(x)dx = 0$. Por otro lado, Δ' será el soporte de una función de Haar h y el hecho de que f sea ortogonal a h implica que

$$\int_\Delta f = \int_{\Delta'\setminus\Delta} f;$$

pero, entonces,

$$0 = \int_{\Delta'} f = 2 \int_{\Delta} \neq 0.$$

Esta contradicción termina la demostración

∎

Miramos, a continuación, al segundo ejemplo de la lista 1.4.2. Es inmediato que el sistema $\mathcal{R}$ de Rademacher, no es completo. En efecto, como las funciones de Rademacher $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ son independientes, es claro que, por ejemplo, la función

$$r_1(x)r_2(x) = -\chi_{[1/4,3/4]} + \chi_{[0,1]\setminus[1/4,3/4]}$$

es ortogonal a todas las de $\mathcal{R}$.

El sistema de Rademacher $\mathcal{R}$ puede ampliarse hasta conseguir un sistema completo, conocido como **sistema de Walsh** $\mathcal{W}$, que vamos a definir a continuación. Utilizaremos la misma notación del ejemplo 2 de 1.4.2. Todo número $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se puede escribir de forma única como $N = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 2^{j-1}$, con $\alpha_j \in \{0,1\}$. Esto no es otra cosa que su expresión en el sistema de numeración en base 2. A cada N, expresado en base 2 como más arriba, le asignamos la variable aleatoria $Y_N(\omega) = X_1(\omega)^{\alpha_1} X_2(\omega)^{\alpha_2} \cdots X_n(\omega)^{\alpha_n}$, es decir

$$Y_N(\omega) = (-1)^{\alpha_1\omega_1 + \cdots \alpha_n\omega_n}.$$

Luego, mediante la aplicación r que asigna a cada $x \in [0,1]$ la sucesión de ceros y unos en su expresión diádica, tal como se precisa en 1.4.2, pasamos a definir la función de Walsh

$$w_N(x) = Y_N(r(x)) = r_1(x)^{\alpha_1} r_2(x)^{\alpha_2} \cdots r_n(x)^{\alpha_n}.$$

Así obtenemos un SON $\mathcal{W} = \{w_N\}_{N=0}^{\infty}$, que se conoce como sistema de Walsh.

Teorema 1.4.16 *El sistema de Walsh es completo en* $L^2[0,1]$.

Demostración. Vamos a ver que si una función integrable f tiene todos sus coeficientes de Fourier respecto al sistema de Walsh iguales a cero, entonces tiene integral cero sobre cada intervalo diádico. Esto basta para concluir, exactamente igual que en el caso del sistema de Haar.
Para un $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, consideramos el conjunto formado por las 2^n primeras funciones de Walsh

$$\{w_N \ : \ 0 \leq N < 2^n\}. \tag{1.4.17}$$

Todos los subíndices de las funciones de (1.4.17) se escriben en base 2 con n cifras a lo sumo, de forma que cada w_N de 1.4.17 es un producto de algunas de las n primeras funciones de Rademacher y, por lo tanto, es constante en cada uno de los 2^n intervalos diádicos de longitud 2^{-n} en los que se divide el intervalo $[0,1]$. Llamemos a dichos intervalos $\Delta_j,\ 1 \leq j \leq 2^n$ y sea M_1 el subespacio vectorial de $L^2[0,1]$ engendrado por las funciones $\chi_{\Delta_j},\ 1 \leq j \leq 2^n$. Si M_2 es el subespacio vectorial de $L^2[0,1]$ engendrado por las funciones de (1.4.17), tenemos $M_2 \subset M_1$. Pero las funciones de (1.4.17) son linealmente independientes, puesto que son ortonormales. Así pues, M_1 y M_2 tienen dimensión 2^n y $M_1 = M_2$. Con ésto se demuestra que para cada j con $1 \leq j \leq 2^n$,

$$\chi_{\Delta_j} = \sum_{N=0}^{2^n-1} \lambda_N w_N$$

con unos ciertos coeficientes λ_j. De esta forma queda probado que

$$\int_{\Delta_j} f(x)dx = 0$$

y como ésto puede hacerse para cada n, resulta que f tiene integral nula sobre cada intervalo diádico. Ello implica que $f = 0$ en casi todo punto, como sucedía en el caso del sistema de Haar.

∎

Sabemos por los teoremas 1.4.7 y 1.4.8 que si $\Phi = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$, entonces $\mathbb{X}$ es isométricamente isomorfo a $l^2(\mathcal{A})$. Por éso es fundamental el resultado siguiente que implica que, esencialmente, los $l^2(\mathcal{A})$ son los únicos espacios de Hilbert que hay.

Teorema 1.4.18 *(a) Todo espacio de Hilbert tiene alguna base ortonormal.*

(b) Si $\Phi = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es un SON del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$, entonces existe Ψ, SON completo en $\mathbb{X}$, tal que $\Psi \supset \Phi$.

Demostración. Según la caracterización (a) del teorema 1.4.8, una base ortonormal es lo mismo que un sistema ortonormal maximal. Todo lo que hay que hacer es considerar el conjunto $\mathcal{O}$ de todos los sistemas ortonormales de $\mathbb{X}$ (ó, para la parte (b), el subconjunto $\mathcal{O}_\Phi$ de $\mathcal{O}$ formado por aquellos sistemas ortonormales de $\mathbb{X}$ que contienen a Φ), verlo como un conjunto ordenado por la relación de inclusión de conjuntos, y demostrar que en él hay algún elemento maximal. El instrumento típico para esta tarea es el **lema de Zorn,** que afirma que si un conjunto ordenado $\mathcal{E}$ es **inductivo**, en el sentido de que toda **cadena** de $\mathcal{E}$ tiene cota superior, entonces $\mathcal{E}$ tiene algún elemento maximal. Sólo nos queda comprobar que $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_\Phi$ son inductivos. Sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ una cadena, es decir, un conjunto de sistemas ortonormales, **totalmente ordenado** por la inclusión. Inmediatamente observamos que

$$\Sigma = \bigcup_{\Theta\in\mathcal{K}} \Theta$$

es, de nuevo, un sistema ortonormal, y contiene a Φ si cada $\Theta \in \mathcal{K}$ contiene a Φ. La razón es que, dados dos vectores $x, y \in \Sigma$, al ser $\mathcal{K}$ cadena, hay algún $\Theta \in \mathcal{K}$, tal que $x, y \in \Theta$. Evidentemente, Σ es cota superior de $\mathcal{K}$. Esto termina la demostración. ■

Finalmente, conviene observar que

Teorema 1.4.19 *Todas las bases ortonormales de un mismo espacio de Hilbert $\mathbb{X}$ tienen el mismo cardinal. A dicho cardinal se le llama la* **dimensión** *de $\mathbb{X}$.*

Demostración. Sean Φ y Ψ dos bases ortonormales de $\mathbb{X}$. Suponemos que ambas son infinitas, pues si alguna fuera finita, sería una **base de Hamel** de $\mathbb{X}$, o sea, una base en el sentido ordinario de **sistema de vectores independientes que generan todo el espacio por combinaciones lineales finitas**. En ése caso, $\mathbb{X}$ sería un espacio vectorial de dimensión finita y la otra base debería tener el mismo número de elementos.

La observación fundamental es que, por ser Ψ base, cada $x \in \Phi$ se puede poner como

$$x = \sum_{y \in \Psi} \langle x, y \rangle y;$$

y como

$$\|x\|^2 = \sum_{y \in \Psi} |\langle x, y \rangle|^2 < \infty,$$

solamente una cantidad numerable de coeficientes $\langle x, y \rangle$ pueden ser no nulos, es decir, si llamamos

$$\Psi_x = \{y \in \Psi \ : \ \langle x, y \rangle \neq 0\},$$

tenemos

$$\mathrm{Card}(\Psi_x) \leq \aleph_0.$$

Por otro lado, como Φ es también base,

$$\Psi = \bigcup_{x \in \Phi} \Psi_x,$$

de donde se sigue que

$$\mathrm{Card}(\Psi) \leq \aleph_0 \mathrm{Card}(\Phi) = \mathrm{Card}(\Phi).$$

La desigualdad contraria se tendría de la misma forma y, apelando al **teorema de Cantor-Bernstein**, llegaríamos a la identidad de los dos cardinales.

■

Los espacios de Hilbert que aparecen con más frecuencia en las aplicaciones son los separables y éstos son esencialmente, como explica el resultado siguiente, los de dimensión finita (o sea, los $l^2_n, \ n \in \mathbb{N}$) y el l^2.

Proposición 1.4.20

$$\mathbb{X} \textit{ es separable} \iff \textit{dim}(\mathbb{X}) \leq \aleph_0.$$

Demostración. Supongamos que $\mathbb{X}$ es separable. Sea $S \subset \mathbb{X}$ un subconjunto denso numerable. Entonces $\overline{[S]} = \mathbb{X}$. Como S es un sistema de generadores de $[S]$, existirá $\{x_n\}_{n=1}^N \subset S$, con $N \in \mathbb{N}$ ó $N = \infty$, conjunto de vectores independientes y tales que $[x_1, x_2, \cdots x_n \cdots] = [S]$. Ahora podemos aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt, para obtener $\{u_n\}_{n=1}^N$, sistema ortonormal, que cumpla $[u_1, u_2, \cdots, u_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ $\forall n$, y, en consecuencia, $[u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots] = [x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots] = [S]$. Claramente $\{u_n\}_{n=1}^N$ es una base ortonormal de $\mathbb{X}$ y así, $\dim(\mathbb{X}) \leq \aleph_0$.

Reciprocamente, si $\dim(\mathbb{X}) \leq \aleph_0$ y $\{u_n\}_{n=1}^N$ es una base ortonormal de $\mathbb{X}$, es claro que

$$\left\{ \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n,\ k \text{ finito} \leq N, \text{ y } \lambda_n \text{ racionales de } \mathbb{K} \right\}$$

es un subconjunto denso numerable de $\mathbb{X}$.

∎

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de vectores de $\mathbb{X}$. Diremos que la familia es **sumable en $\mathbb{X}$ con suma** x si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ tal que para todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ que cumpla $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0$, se tiene
$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} x_\alpha - x \right\| < \varepsilon.$$
Se dice que la familia $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ satisface la **condición de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{A}$ tal que para todo subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ que cumpla $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_1 = \emptyset$, se tiene
$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} x_\alpha \right\| < \varepsilon.$$
   (a) Demostrar que si una familia cumple la condición de Cauchy, entonces sólo tiene una cantidad numerable de vectores distintos de cero.

   (b) Demostrar que si $\mathbb{X}$ es un **espacio de Banach,** toda familia que cumpla la condición de Cauchy es sumable.

   (c) Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ¿ Que diferencia hay entre decir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia sumable y decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge? ¿Puedes dar un ejemplo de una serie de números reales que converja; pero cuyos términos no formen una familia sumable de números?

2. Una familia de vectores $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de un espacio normado se dice que es **absolutamente sumable** si la familia de números $(||x_\alpha||)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es sumable.

   (a) Demostrar que en un espacio de Banach toda familia absolutamente sumable es sumable.

   (b) Ver con ejemplos que el recíproco de (a) no es cierto en general.

   (c) Demostrar que en los espacios de dimensión finita las nociones de **sumable** y **absolutamente sumable** son equivalentes.

3. (a) Sea S un conjunto **ortonormal** de un espacio de Hilbert. Ver que S es cerrado y acotado y que, sin embargo, sólo es compacto si es finito.

(b) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$. Dada una sucesión $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, es decir, tal que $\sum_1^\infty \delta_n^2 < \infty$, consideremos el conjunto

$$S_\delta = \left\{ x = \sum_1^\infty \lambda_n u_n \, : \, |\lambda_n| \leq \delta_n \right\}.$$

Demostrar que S_δ es compacto. El caso particular $\mathbb{X} = l^2$ y $\delta_n = \frac{1}{n}$ da como S_δ el llamado **cubo de Hilbert**.

(c) Ver que los únicos espacios de Hilbert **localmente compactos** son los de dimensión finita.

4. Sea $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de vectores del espacio de Hilbert $\mathbb{X}$.

(a) Demostrar que las dos propiedades siguientes son equivalentes:

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad x = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha.$$

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{X}, \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2.$$

(b) Ver que si la familia de vectores $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ cumple la condición $(*)$ del apartado (a) y además

$$\|e_\alpha\| \geq 1 \quad \forall \alpha \in \mathcal{A},$$

entonces, $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una **base ortonormal** de $\mathbb{X}$.

(*Observación*: (b) puede hacerse por un cálculo sencillo que no depende de (a) y así se obtiene, en particular, que la condición $(*)$ implica que los vectores $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ son ortogonales. Esta observación puede ser útil para resolver la parte (a), aunque no es estrictamente necesaria. En todo caso, se sugiere comenzar viendo que la familia $(\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es sumable.)

5. Sea $\mathbb{X}$ un espacio prehilbertiano. A cada sucesión finita $x_1, x_2, \cdots x_n$ de vectores de $\mathbb{X}$ se le asocia su **determinante de Gram o Gramiano** , que se denota $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y que es, por definición, el determinante de la matriz cuyas componentes son $a_{i,j} = \langle x_i, x_j\rangle$. Se pide demostrar que

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ son linealmente independientes} \iff G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0.$$

Esta condición se conoce como **criterio de Gram** para la independencia lineal

6. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Hilbert y sean $x_1, x_2, \cdots x_n$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{X}$. Sea $M = [x_1, x_2, \cdots x_n]$ el subespacio generado por $x_1, x_2, \cdots x_n$.

   (a) Demostrar que, para cada $x \in \mathbb{X}$, la proyección ortogonal de x sobre M, $P_M(x)$, viene dada por

   $$P_M(x) = -\frac{\begin{vmatrix} & & & x_1 \\ & G & & \vdots \\ & & & x_n \\ \langle x, x_1\rangle & \cdots & \langle x, x_n\rangle & 0 \end{vmatrix}}{G(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

   donde G representa la matriz $n \times n$ cuyas componentes son $a_{i,j} = \langle x_i, x_j\rangle$, $1 \le i, j \le n$. y $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es el Gramiano de los vectores o, en otras palabras, el determinante de G.

   (b) Demostrar que la distancia al cuadrado de x a M viene dada por

   $$||x - P_M(x)||^2 = \frac{G(x_1, x_2, \cdots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

7. Calcular el

   $$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$$

   y hallar el

   $$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x) dx$$

   donde g está sujeta a las restricciones

   $$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0; \quad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

8. Calcular el

   $$\min_{a,b,c} \int_{0}^{\infty} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 e^{-x} dx.$$

   Enunciar y resolver el correspondiente problema de máximo como en el problema anterior.

9. Si $x_0 \in \mathbb{X}$ y M es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{X}$, demostrar que

   $$\min\{||x - x_0|| \, : \, x \in M\} = \max\{|\langle x_0, y\rangle| \, : \, y \in M^{\perp}, \, ||y|| = 1\}.$$

10. Ver que si se aplica el **proceso de Gram-Schmidt** a la sucesión $1, x^2, x^3, \cdots$ de vectores de $L^2[-1,1]$, se obtiene la sucesión

$$u_n(x) = (\frac{2n+1}{2})^{1/2} P_n(x), \quad \text{donde} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

Las funciones P_n se llaman **polinomios de Legendre**. ¿Es $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2[-1,1]$?

11. Ver que si se aplica el **proceso de Gram-Schmidt** a la sucesión

$$e^{-x^2/2}, xe^{-x^2/2}, x^2e^{-x^2/2}, \cdots$$

de vectores de $L^2(\mathbb{R})$, se obtiene la sucesión

$$u_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad \text{donde} \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Las funciones H_n son los **polinomios de Hermite** y satisfacen $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$. ¿Es $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$?

12. Ver que si se aplica el **proceso de Gram-Schmidt** a la sucesión

$$e^{-x/2}, xe^{-x/2}, x^2e^{-x/2}, \cdots$$

de vectores de $L^2(0,\infty)$, se obtiene la sucesión

$$u_n(x) = e^{-x/2} L_n(x)/n!, \quad \text{donde} \quad L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x}).$$

Las funciones L_n se llaman **polinomios de Laguerre**. ¿Es $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base ortonormal de $L^2(0,\infty)$?

13. Sea λ la medida de Lebesgue sobre el disco unidad $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Demostrar que $1, z, z^2, \cdots, z^n, \cdots$ son vectores ortogonales en $L^2(\lambda)$. Encontrar $||z^n||$, $n \geq 0$. Si $u_n = ||z^n||^{-1} z^n$, $n \geq 0$, estudiar si $\{u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$ es una base ortonormal de $L^2(\lambda)$.

14. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Demostrar que ninguna base ortonormal es base de Hamel. Ver que una base de Hamel es, necesariamente, no numerable. ¿Cuál es el cardinal de una base de Hamel de l^2?

15. Sea μ una **medida regular de Borel** sobre $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $L^2(\mu)$ es separable.

Capítulo 2

EL TEOREMA DE BAIRE Y SUS CONSECUENCIAS

2.1. El teorema de Baire

Todos los resultados de este capítulo están basados en el siguiente teorema

Teorema 2.1.1 (Teorema de Baire) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y sean U_n , $n \in \mathbb{N}$, abiertos densos en $\mathbb{X}$. Entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es también denso en $\mathbb{X}$.*

Demostración. Sea W un abierto no vacío de $\mathbb{X}$. Hemos de ver que

$$W \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \neq \emptyset.$$

Ahora bien,

$$\begin{array}{rcl} W \cap U_1 \neq \emptyset & \Longrightarrow & W \cap U_1 \supset \bar{\mathbf{B}}(x_1, r_1)\,,\ r_1 < 1, \\ \mathbf{B}(x_1, r_1) \cap U_2 \neq \emptyset & \Longrightarrow & \mathbf{B}(x_1, r_1) \cap U_2 \supset \bar{\mathbf{B}}(x_2, r_2)\,, r_2 < 1/2, \\ & \cdots & \\ \mathbf{B}(x_j, r_j) \cap U_{j+1} \neq \emptyset & \Longrightarrow & \mathbf{B}(x_j, r_j) \cap U_{j+1} \supset \bar{\mathbf{B}}(x_{j+1}, r_{j+1})\,, r_{j+1} < 2^{-j} \\ & \cdots . & \end{array}$$

Observemos que

$$n, m \geq N \Longrightarrow x_n, x_m \in B(x_N, r_N) \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq 2r_N \to 0,$$

cuando $N \to \infty$, de modo que x_n es una sucesión de Cauchy. La completitud de $\mathbb{X}$ nos permite afirmar que existe $x = \lim x_n$; pero entonces, $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mathbf{B}}(x_n, r_n) \subset W \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \right)$ y ésto termina la demostración.

■

Definición 2.1.2

- *Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es un G_δ si puede ponerse como intersección de una colección numerable de abiertos.*
- *Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es un F_σ si su complemento es un G_δ, o, en otras palabras, si el conjunto puede ponerse como unión de una colección numerable de cerrados.*

Podemos dar, como corolario del teorema de Baire, la siguiente extensión casi automática del mismo.

Corolario 2.1.3 *En un espacio métrico completo, la intersección de una colección numerable de conjuntos G_δ densos, es también un G_δ denso.*

Demostración. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n es un G_δ denso, se tendrá

$$G_n = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_{n,j},$$

donde cada $U_{n,j}$ es abierto y, desde luego, denso, puesto que contiene a G_n. Entonces

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} U_{n,j}.$$

Como la colección $U_{n,j}$, $(n,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable, vemos que G es un G_δ. Además, por el teorema de Baire, G es denso.

■

Es muy frecuente aplicar el teorema de Baire a través del siguiente corolario

Corolario 2.1.4 *Sea $\mathbb{X}$, como antes, un espacio métrico completo y sean $E_n \subset \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$ conjuntos tales que $\overset{\circ}{\overline{E_n}} = \emptyset$. Entonces $\mathbb{X} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.*

Demostración. Se sigue facilmente del teorema 2.1.1. En efecto

$$\overset{\circ}{\overline{E_n}} = \emptyset \Longrightarrow \overline{\mathbb{X}\setminus\overline{E_n}} = \mathbb{X}\setminus \overset{\circ}{\overline{E_n}} = \mathbb{X},$$

de forma que los conjuntos $\mathbb{X}\setminus\overline{E_n}$ son abiertos densos. Aplicando el teorema de Baire 2.1.1 deducimos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{X}\setminus\overline{E_n}) = \mathbb{X}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{E_n} \quad \text{es denso en} \quad \mathbb{X}.$$

Esto implica, desde luego, que $\mathbb{X} \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

■

Observación. Los conjuntos E que tienen $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$ se suelen llamar **conjuntos diseminados**. En realidad lo que acabamos de demostrar es que toda unión

numerable de conjuntos diseminados en un espacio métrico completo tiene como complemento un conjunto denso, lo cual no es más que una reformulación del teorema de Baire 2.1.1. Esto parece más fuerte que lo que se afirma en el corolario 2.1.4; pero vamos a ver que, de hecho, ambas afirmaciones son equivalentes. Dicho de otra forma, el teorema de Baire 2.1.1 y el corolario 2.1.4 son equivalentes. En efecto, partiendo del corolario 2.1.4, se puede demostrar el teorema de Baire 2.1.1 del modo siguiente:
El complemento de un abierto denso es un cerrado con interior vacío. Así que, a partir del corolario 2.1.4, se ve inmediatamente, pasando a los complementarios, que:
En un espacio métrico completo, toda intersección numerable de abiertos densos es no vacía.
Pero, este enunciado, aparentemente más débil que el teorema de Baire 2.1.1, implica ya dicho teorema. En efecto. Sean $U_n, n \in \mathbb{N}$, abiertos densos en nuestro espacio métrico completo. Hemos de ver que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso. Para ello, tomamos W abierto y queremos demostrar que $W \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \emptyset$. De hecho, como todo abierto contiene al cierre de una bola, nos basta probar que, para todo abierto W, $\overline{W} \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \emptyset$. Pero esto se reduce a lo que ya sabemos, pues $\overline{W} \cap \left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\overline{W} \cap U_n)$ y cada $\overline{W} \cap U_n$ es un abierto denso del espacio métrico completo $\overline{W}$.

Al corolario 2.1.4 se lo conoce en la literatura como **teorema de categoría de Baire**. El origen de este nombre está en la terminología que eligió Baire, bastante desafortunada por cierto, para llamar a los conjuntos $S \subset \mathbb{X}$ que se pueden poner como $S = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $\overset{\circ}{\overline{E_n}} = \emptyset$. Les llamó de **primera categoría** en $\mathbb{X}$, mientras que a los restantes, les llamó de **segunda categoría**. Quizá una nomenclatura mas apropiada, es decir que los conjuntos como el S de más arriba son **delgados**, mientras que los que no se pueden poner en la forma indicada son **gruesos**. Entonces el teorema de categoría de Baire se enuncia diciendo que un espacio métrico completo es siempre de **segunda categoría** o **grueso** en sí mismo. No sólo éso, sino que, como hemos visto en la prueba del corolario 2.1.4, el complemento de un conjunto de primera categoría en un espacio completo, es un conjunto denso. Incluso podemos decir que dicho complemento ha de ser también de segunda categoría, pues, como resulta evidente, la unión de dos conjuntos de primera categoría es de primera categoría.

La forma más habitual de utilizar el teorema de Baire es deducir, a partir de la representación de un cierto espacio métrico completo como unión numerable de cerrados, que alguno de dichos cerrados tiene interior no vacío. Tendremos muchas oportunidades de hacer ésto tanto en los problemas que siguen a esta sección, como en las restantes secciones del capítulo.

Ejercicios

1. (a) Demostrar que en un espacio métrico sin puntos aislados, cualquier conjunto formado por un solo punto es un cerrado con interior vacío.

   (b) Usar el apartado (a) junto con el teorema de Baire para ver que ni $\mathbb{R}$, ni el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, ni ningún G_δ denso de un espacio métrico completo sin puntos aislados, son numerables.

2. En cada caso, dar un ejemplo de un conjunto delgado (de primera categoría en la terminología de Baire) en $\mathbb{R}$, que sea

   (a) denso en $\mathbb{R}$.

   (b) no numerable.

   (c) denso y no numerable.

3. (a) Poner un ejemplo de un conjunto delgado (de primera categoría) en $\mathbb{R}$ que no tenga medida de Lebesgue 0.

   (b) Poner un ejemplo de un conjunto grueso (de segunda categoría) en $\mathbb{R}$ que tenga medida de Lebesgue 0.

4. Sea $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ para todo $x > 0$. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua Consideramos la sucesión f_n donde f_1 es una primitiva cualquiera de f, f_2 es una primitiva cualquiera de f_1 y así sucesivamente. Demostrar que si suponemos que para cada x, existe algún entero k, posiblemente diferente de un punto a otro, tal que $f_k(x) = 0$, entonces f se anula identicamente.

6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función infinitamente diferenciable. Supongamos que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe algún entero k_x, tal que $f^{(k_x)}(x) = 0$. Demostrar que f es un polinomio.

   (Me complace puntualizar que este resultado es obra de dos españoles. La referencia exacta es: E. Corominas y F. Sunyer Balaguer 'Condiciones para que una función infinitamente derivable sea un polinomio 'Revista Matemática Hispano-Americana (4)14(1954)26-43)

7. Demostrar que existen funciones continuas en un intervalo que no son monótonas en ningún subintervalo.

8. Sea $\mathbb{X} = \mathcal{C}_\mathbb{R}[0, 1]$, el espacio de las funciones reales continuas en $[0, 1]$ con su norma natural (la norma del supremo). Sea F_n el conjunto

$$\left\{ f \in \mathbb{X} \,:\, \exists t \in [0,1] \ni \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leq n \,\forall h \ni t + h \in [0,1] \right\}.$$

Demostrar que F_n es cerrado sin puntos interiores en $\mathbb{X}$. Deducir que el conjunto de las funciones reales continuas en $[0,1]$ que no son derivables en ningún punto, es denso en $\mathbb{X}$.

9. Demostrar que la conclusión del teorema de Baire sigue siendo cierta si, en lugar de suponer que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico completo, se supone que es un **espacio localmente compacto Hausdorff.**

10. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión $\aleph_0$. Demostrar que no hay ninguna norma que convierta a $\mathbb{X}$ en espacio de Banach.

2.2. Los teoremas de la aplicación abierta y del gráfico cerrado

Teorema 2.2.1 (Teorema de la aplicación abierta) *Sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ una aplicación lineal continua del espacio de* **Banach** $\mathbb{X}$ **sobre** *el espacio de* **Banach** $\mathbb{Y}$. *Entonces T es* **abierta**.

Demostración. Que T es una aplicación abierta quiere decir que para cada abierto $U \subset \mathbb{X}$, su imagen $T(U)$ es abierto en $\mathbb{Y}$. En otras palabras, hemos de ver que para cada $a \in U$, $T(U)$ contiene alguna bola centrada en $T(a)$. Desde luego, como U es abierto, $U \supset \mathbf{B}(a,r)$ para algún $r > 0$. Poniendo $\mathbf{B}(a,r) = a + r\mathbf{B}_{\mathbb{X}}$, donde $\mathbf{B}_{\mathbb{X}} = \mathbf{B}(0,1)$, la bola unidad abierta de $\mathbb{X}$, tenemos $T(\mathbf{B}(a,r)) = T(a) + rT(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})$, y nos bastará demostrar que $T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \supset s\mathbf{B}_{\mathbb{Y}}$ para algún $s > 0$, donde $\mathbf{B}_{\mathbb{Y}}$ es la bola unidad abierta de $\mathbb{Y}$. Como $\mathbb{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}(0,n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\mathbf{B}_{\mathbb{X}}$ y T es "sobre", tenemos $\mathbb{Y} = T(\mathbb{X}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})$. Se sigue del teorema de Baire que $\overset{\circ}{\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}} \neq \emptyset$. Entonces, para algún $y_0 \in \mathbb{Y}$ y algún $r > 0$, tenemos que $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \supset \mathbf{B}(y_0, 4r)$. Esto implica, a su vez, que existe un $y_1 = T(x_1)$, $x_1 \in \mathbf{B}_{\mathbb{X}}$, tal que $||y_1 - y_0|| < 2r$. Pero entonces, $T(x_1) + 2r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} = \mathbf{B}(y_1, 2r) \subset \mathbf{B}(y_0, 4r) \subset \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} T(x_1) + 2r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} = \mathbf{B}(y_1, 2r) \subset \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} &\implies 2r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} \subset \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} - T(x_1) \\ = \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) - T(x_1)} = \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}} - x_1)} \subset \overline{T(2\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} &\implies r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} \subset \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}. \end{aligned}$$

Veremos en el lema que sigue que

$$r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} \subset \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \Longrightarrow r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} \subset T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})$$

y así quedará probado el teorema

■

Lema 2.2.2 *Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y $\mathbb{X}$ es completo, entonces*

$$\overline{T(s\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \supset r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}} \Longrightarrow T(s\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \supset r\mathbf{B}_{\mathbb{Y}}. \qquad s, r > 0$$

Demostración. Claramente, podemos suponer $s = r = 1$. Partimos de $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \supset \mathbf{B}_{\mathbb{Y}}$ y queremos probar $T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \supset \mathbf{B}_{\mathbb{Y}}$. Sea $y \in \mathbb{Y}$ tal que $||y|| < t < 1$. Como $\overline{T(t\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \supset t\mathbf{B}_{\mathbb{Y}}$, existirá $x_1 \in \mathbb{X}$ con $||x_1|| < t$, tal que $||y - T(x_1)|| < (1/2)(1-t)$. Después existirá $x_2 \in \mathbb{X}$ con $||x_2|| < (1/2)(1-t)$ tal que $||y - T(x_1) - T(x_2)|| < (1/4)(1-t)$ y así sucesivamente encontramos por inducción, para $j > 2$, $x_j \in \mathbb{X}$ con $||x_j|| < 2^{-j+1}(1-t)$ tal que

$$||y - T(x_1 + \cdots + x_j)|| < 2^{-j}(1-t) \tag{2.2.3}$$

Como $\mathbb{X}$ es completo, existe $x = x_1 + x_2 + \cdots \in \mathbb{X}$, con $||x|| < t + \frac{1-t}{2} + \frac{1-t}{4} + \cdots = t + 1 - t = 1$ y, por (2.2.3) $y = T(x)$.

■

Corolario 2.2.4 *Si $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es biyectiva, entonces T es un* **isomorfismo**; *es decir, $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.*

Demostración. Al ser T biyectiva, la continuidad de T^{-1} equivale a que T sea abierta.

■

Vamos a ver un ejemplo típico que utiliza el teorema de la aplicación abierta, o mejor el corolario 2.2.4 de inversión.

Para una función $f \in L^1[0,1]$, se definieron en el capítulo 1, (1.4.10), sus coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ respecto al sistema trigonométrico. Es inmediato que $|\hat{f}(n)| \leq ||f||_1$, de forma que el operador lineal $\mathcal{F}$ que manda cada $f \in L^1[0,1]$ a la sucesión $\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ es acotado de $L^1[0,1]$ en l^∞. De hecho, se tiene

Teorema 2.2.5 (Teorema de Riemann-Lebesgue) *Para toda $f \in L^1[0,1]$, $\hat{f}(n) \to 0$ cuando $|n| \to \infty$. En otras palabras*

$$\mathcal{F}(L^1[0,1]) \subset c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty \ : \ x_n \to 0 \, para \, |n| \to \infty\}. \tag{2.2.6}$$

Demostración. Este hecho es muy fácil de demostrar. Para $f \in L^2[0,1] \subset L^1[0,1]$, es consecuencia de la identidad de Plancherel (apartado 2. del corolario 1.4.13 del capítulo 1). Para una $f \in L^1[0,1]$, arbitraria, basta utilizar el hecho de que $L^2[0,1]$ es denso en $L^1[0,1]$ (toda función integrable se aproxima por funciones simples integrables, que están, claramente, en $L^2[0,1]$). La forma concreta de proceder es la siguiente. Dada $f \in L^1[0,1]$ y dado $\varepsilon > 0$, existirá $g \in L^2[0,1]$, tal que $\|f-g\|_1 < \varepsilon/2$. Por otro lado, para g sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|\hat{g}(n)| < \varepsilon/2$ para todo $n \in \mathbb{Z} \ \ni \ |n| \geq n_0$. Entonces, si $n \in \mathbb{Z}$ tiene $|n| \geq n_0$, se cumplirá

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{g}(n)| + |\widehat{f-g}(n)| < \varepsilon/2 + \|f-g\|_1 < \varepsilon.$$

■

La pregunta que nos hacemos ahora es si el contenido de (2.2.6) es o no es propio, o en otras palabras: ¿Puede cualquier sucesión de c_0 ser la sucesión de coeficientes de Fourier de una función integrable? Vamos a responder esta pregunta utilizando el corolario 2.2.4. Desde luego $\mathcal{F} : L^1[0,1] \longrightarrow c_0$ es inyectiva, como vimos en el teorema 1.4.11 del capítulo 1. Si fuera sobre, tendría que ser un isomorfismo y se verificaría una desigualdad

$$||f||_1 \leq C||\mathcal{F}(f)||_\infty \tag{2.2.7}$$

Vamos a ver que tal desigualdad no es cierta. Para ello consideramos el **núcleo de Dirichlet** D_n , $n = 0, 1, \cdots$, definido del modo siguiente

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{j=-n}^{n} e^{i2\pi jx} = \frac{e^{-i2\pi nx} - e^{i2\pi(n+1)x}}{1 - e^{i2\pi x}} \\ &= \frac{\cos(2\pi nx) - \cos(2\pi(n+1)x)}{1 - \cos(2\pi x)} = \frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)} \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Observamos que los números $L_n = \int_0^1 |D_n(x)|dx$, conocidos como **constantes de Lebesgue** tienden a ∞ cuando $n \to \infty$. En concreto, tenemos

Lema 2.2.9

$$L_n = \int_0^1 |D_n(x)|dx = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1), \quad \textit{para}\, n \to \infty.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |D_n(x)|dx &= 2\int_0^{1/2} \left|\frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\right| dx \\
= 2\int_0^{1/2} \left|\frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi x)}{\pi x}\right| dx + O(1) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt + O(1) \\
= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt + O(1) &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen} t| dt + O(1) \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum \frac{1}{k} + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia de que la función

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(2\pi x)} - \frac{1}{2\pi x},$$

es continua y acotada y, por lo tanto, integrable.

■

Con ayuda del lema anterior vemos que (2.2.7) no puede ser cierta, pues si lo fuera, implicaría, tomando $f = D_n$

$$\frac{4}{\pi^2}\log n + O(1) \leq C||\mathcal{F}(D_n)||_\infty = C,$$

que es, obviamente falso. La conclusión es que $\mathcal{F}(L^1[0,1]) \underset{\neq}{\subset} c_0$.

Definición 2.2.10 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados.*

- *Dada una aplicación T de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$, se llama* **gráfico** *de T al conjunto*

  $$\Gamma(T) = \{(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \,:\, y = T(x)\}.$$

  Claramente, si T es lineal, $\Gamma(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

- *Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ se dice que es* **cerrado** *si $\Gamma(T)$ es un cerrado de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ con la topología natural del producto, es decir, T es cerrado si y solo si*

  $$x_n \to x \quad y \quad T(x_n) \to y \quad \Longrightarrow \quad y = T(x),$$

  o, lo que resulta obviamente equivalente,

  $$x_n \to 0 \quad y \quad T(x_n) \to y \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

Es claro que todo operador lineal continuo es cerrado. Vamos a ver a continuación que, cuando tanto $\mathbb{X}$ como $\mathbb{Y}$ son completos, el recíproco es también cierto, de forma que para un operador lineal entre espacios de Banach, los conceptos de cerrado y continuo son equivalentes.

Antes observamos que si $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios normados, la topología producto de $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ también viene dada por una norma. Basta considerar, por ejemplo $||(x,y)|| = ||x|| + ||y||$. Desde luego, si tanto $\mathbb{X}$ como $\mathbb{Y}$ son completos, $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ también lo es.

Teorema 2.2.11 (Teorema del gráfico cerrado) *Si $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios de Banach y $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es un operador lineal cerrado, entonces T es acotado, o sea, continuo.*

Demostración. Sean π_1 y π_2 las proyecciones canónicas de $\Gamma(T)$ sobre $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ respectivamente. $\pi_1(x,T(x)) = x$, $\pi_2(x,T(x)) = T(x)$. Desde luego $\pi_1 \in \mathcal{B}(\Gamma(T),\mathbb{X})$ y $\pi_2 \in \mathcal{B}(\Gamma(T),\mathbb{Y})$. Como $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son completos, $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ también lo es y, por ser T cerrado, $\Gamma(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ que será, naturalmente, completo. Así pues, $\Gamma(T)$, con cualquiera de las normas equivalentes que dan la topología producto de $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$, es un espacio de Banach. π_1 es una biyección lineal y continua de $\Gamma(T)$ sobre $\mathbb{X}$. Se sigue del corolario 2.2.4 que π_1^{-1} es también continua. Ahora basta observar que $T = \pi_2 \circ {\pi_1}^{-1}$.

■

Como aplicación del teorema del gráfico cerrado, damos el siguiente resultado

Teorema 2.2.12 (Teorema de Hellinger-Toeplitz) *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Hilbert y sea $T : \mathbb{X} \longmapsto \mathbb{X}$ un operador lineal que cumple*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \quad \textit{para todo} \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

Entonces T es acotado.

Demostración. Simplemente probamos que T es cerrado y concluimos aplicando el teorema del gráfico cerrado. Supongamos que $x_n \to 0$ y $T(x_n) \to y$. Queremos ver que $y = 0$. Pero, para cada $z \in \mathbb{X}$,

$$\langle y, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T(x_n), z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, T(z)\rangle = \langle 0, T(z)\rangle = 0.$$

Se sigue que $y = 0$, como queríamos demostrar.

■

Ejercicios

1. Sean $\mathbb{Y} = l^1$ y $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{Y} \,:\, \sum_1^\infty n|x_n| < \infty\}$, con la norma l^1.

   (a) Demostrar que $\mathbb{X}$ es un subespacio propio denso de $\mathbb{Y}$, de modo que $\mathbb{X}$ no es completo.

   (b) Definimos $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ mediante $T(x) = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar que T es un operador lineal cerrado pero no acotado.

   (c) Sea $S = T^{-1}$. Ver que $S : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{X}$ es acotada y sobreyectiva pero no abierta.

2. Sean $\mathbb{Y} = \mathcal{C}[0,1]$ y $\mathbb{X} = \mathcal{C}^1[0,1]$, equipados ambos con la norma uniforme o del supremo.

   (a) Ver que $\mathbb{X}$ no es completo.

   (b) Demostrar que la aplicación lineal

   $$\begin{array}{rcl} D : \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{Y} \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

   es cerrada pero no es acotada.

3. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $U \subset \mathbb{X}$ una base de Hamel de $\mathbb{X}$ tal que $\|u\| = 1 \;\; \forall u \in U$. Vamos a llamar $\mathbb{Y}$ al espacio normado que resulta de tomar en $\mathbb{X}$ la nueva norma $\| - \|_{\mathbb{Y}}$, definida del modo siguiente

   $$\text{Si } \; u_j \in U \; \text{ y } \; \lambda_j \in \mathbb{K}, \;\; 1 \le j \le n, \qquad \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \right\|_{\mathbb{Y}} = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|.$$

   Sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ la aplicación identidad.

   (a) Ver que T es una aplicación lineal cerrada pero no acotada. ¿ Cuál de las hipótesis del teorema del gráfico cerrado falla en este caso?

   (b) Ver que T^{-1} es acotada pero no abierta. ¿Por qué no se puede aplicar a esta situación el teorema de la aplicación abierta?

4. Obtener el **Teorema de la aplicación abierta** como corolario del **Teorema del gráfico cerrado**.

   (*Sugerencia:* Puede resultar conveniente demostrar primero el Corolario 2.2.4 y deducir de él el Teorema de la aplicación abierta mediante un paso al cociente)

5. Dados $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach, demostrar que siempre existe un operador lineal $S : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, que no es acotado.

6. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach y sea $S : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, un operador lineal no acotado. Sea $\Gamma(S)$ el gráfico de S, que es, desde luego, un subespacio vectorial de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.
   (a) Ver que $\Gamma(S)$ no es completo.
   (b) Si se define $T : \mathbb{X} \longrightarrow \Gamma(S)$ mediante $T(x) = (x, S(x))$, demostrar que T es cerrado pero no acotado.
   (c) Demostrar que $T^{-1} : \Gamma(S) \longrightarrow \mathbb{X}$ es acotada y sobreyectiva pero no abierta.

7. Demostrar que si un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach respecto a dos normas diferentes, entonces las topologías inducidas por estas normas son, o bien idénticas, o bien no comparables, es decir, ninguna es mas fuerte que la otra.

8. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{X} : T(x) = 0\}$, y $\mathcal{M} = T(\mathbb{X})$. Demostrar que $\mathbb{X}/\mathcal{N}(T)$ es isomorfo a $\mathcal{M}$ si y sólo si $\mathcal{M}$ es cerrado

9. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach separable y sea $\{x_n\}$ un subconjunto denso numerable de la bola unidad de $\mathbb{X}$. Definimos $T : l^1 \longrightarrow \mathbb{X}$ mediante $T(f) = \sum_1^\infty f(n)x_n$. Demostrar que
   (a) T es acotado.
   (b) T es sobreyectiva.
   (c) $\mathbb{X}$ es isomorfo a un espacio cociente de l^1.

10. Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define la transformada de Fourier de f como la función $\hat{f}$ dada en $\mathbb{R}^n$ por la fórmula

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx$$

   (a) Demostrar el análogo para $\mathbb{R}^n$ del teorema de Riemann-Lebesgue, es decir, que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in \mathcal{C}_\downarrow(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, que tienden a 0 para $|\xi| \to \infty$.
   (b) Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_\downarrow(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

   es lineal, continua e inyectiva; pero no sobreyectiva. En $\mathcal{C}_\downarrow(\mathbb{R}^n)$ se considera su norma natural, que es la del supremo.

2.3. El principio de acotación uniforme

Pasamos a estudiar otro principio fundamental que se sigue del teorema de Baire. Comenzamos con un resultado sobre funciones continuas y luego lo especializamos para el caso lineal donde resulta especialmente simple y útil.

Teorema 2.3.1 (Principio de acotación uniforme) *Sea U un conjunto de segunda categoría de un espacio métrico $\mathbb{X}$ y sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $u \in U$, el conjunto $\{f(u) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado. Entonces las funciones de $\mathcal{F}$ son uniformemente acotadas en alguna bola $\mathbf{B}(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{X}$, $r > 0$, es decir, $|f(x)| \leq M$ para un cierto número M, toda $f \in \mathcal{F}$ y todo $x \in \mathbf{B}(x_0, r)$. En particular, la conclusión se cumple si $\mathbb{X}$ es completo y para cada $x \in \mathbb{X}$, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$F_n = \{x \in \mathbb{X} : |f(x)| \leq n \, \forall f \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}([-n, n]).$$

Los F_n son cerrados y estamos suponiendo que

$$U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Como por hipótesis U es de segunda categoría, también lo ha de ser cualquier conjunto mayor. Se sigue que, para algún $n \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$ y esto es justamente lo que queríamos demostrar.

∎

Teorema 2.3.2 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sean $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, $\mathbb{Y}$ un espacio normado y $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de operadores lineales acotados de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$. Entonces, o bien existe una constante M tal que*

$$||T_\alpha|| \leq M \qquad \textit{para todo} \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

o bien

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} ||T_\alpha(x)|| = \infty \quad \textit{para todo } x \textit{ perteneciente a algún } G_\delta \textit{ denso de} \mathbb{X}.$$

Demostración. Si la segunda alternativa no se da, el conjunto de los $x \in \mathbb{X}$ para los que $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} ||T_\alpha(x)|| = \infty$ no contiene ningún G_δ denso. Tomando complementarios, éso es lo mismo que decir que el conjunto de los $x \in \mathbb{X}$ para los que $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} ||T_\alpha(x)|| < \infty$ no es de primera categoría. Aplicando el teorema precedente a la familia $\mathcal{F}$ de las funciones continuas $x \longmapsto ||T_\alpha(x)||$, $\alpha \in \mathcal{A}$, encontramos $\mathbf{B}(x_0, r)$ tal que $||T_\alpha(x)|| \leq M$, un número fijo, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$

y cada $x \in \mathbf{B}(x_0, r)$. Esto nos basta para ver que los T_α son uniformemente acotados. En efecto, dado $x \in \mathbb{X}$, escribimos, tomando un s fijo tal que $0 < s < r$,

$$||T_\alpha(x)|| = \frac{||x||}{2s} \left\| T_\alpha \left(x_0 + s\frac{x}{||x||} \right) - T_\alpha \left(x_0 - s\frac{x}{||x||} \right) \right\| \leq \frac{M}{s}||x||.$$

Así obtenemos que, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $||T_\alpha|| \leq M/s$.

■

A continuación vamos a dar un par de aplicaciones del teorema de Banach-Steinhaus a la teoría de las series de Fourier.

Comenzamos planteando el problema de la **convergencia en norma**. Sabemos que, para $f \in L^2[0,1]$, $S_N(f) \to f$ en $L^2[0,1]$, cuando $N \to \infty$. Tiene sentido plantearse ahora la siguiente

Pregunta *¿Se extiende ésto a $p \neq 2$? En otras palabras: Dado p, $1 \leq p \leq \infty$, ¿Es cierto que para toda $f \in L^p[0,1]$, $S_N(f) \to f$ en $L^p[0,1]$, cuando $p \to \infty$?*

La respuesta es, claramente, negativa para el caso $p = \infty$. La razón es que $S_N(f) \in \mathcal{C}_p[0,1]$, el espacio de las funciones continuas periódicas de periodo 1, que es, desde luego, un subespacio cerrado de $L^\infty[0,1]$. Entonces, ninguna $f \in L^\infty[0,1]$ que no sea continua periódica, puede ser límite en L^∞ de las sumas parciales de su serie de Fourier.

Para estudiar el resto de los casos conviene empezar escribiendo las sumas parciales como operadores integrales

$$\begin{aligned} (2.3.3) \quad S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n(x) = \int_0^1 f(y) \sum_{n=-N}^{N} e_n(x-y)dy \\ &= \int_0^1 f(y)D_N(x-y)dy = \int_0^1 f(x-y)D_N(y)dy, \end{aligned}$$

donde D_N es el núcleo de Dirichlet, que ya definimos en la sección anterior, concretamente en (2.2.8). Allí vimos que

$$D_N(x) = \frac{\cos(2\pi Nx) - \cos(2\pi(N+1)x)}{1 - \cos(2\pi x)} = \frac{\operatorname{sen}((2N+1)\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Nótese que la última igualdad en (2.3.3) es consecuencia de un cambio de variable en la integral y del hecho de que D_N es una función periódica y también estamos viendo así a f. Las dos últimas integrales iguales de (2.3.3) son lo que se conoce como la convolución de las funciones D_N y f, que se escribe

$$(2.3.4) \qquad S_N(f) = D_N \star f.$$

Así pues, la suma parcial es la convolución con el núcleo de Dirichlet. Vimos en la sección anterior (lema 2.2.9) que la sucesión $\{D_N\}_{N=1}^{\infty}$ no está acotada en L^1 y éso hace que el comportamiento de las sumas parciales sea más difícil de estudiar que el de algunas "medias"que vamos a introducir a continuación.

Para $N = 0, 1, \cdots$, las **medias de Cesaro** de (la serie de Fourier de) una $f \in L^1[0,1]$ son

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) = f \star \left\{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n\right\}(x) = f \star K_N(x).$$

El núcleo K_N se llama **núcleo de Fejer** y se calcula de forma bien sencilla

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(2\pi n x) - \cos(2\pi(n+1)x)}{1-\cos(2\pi x)} \\ &= \frac{1}{N+1}\frac{1-\cos(2\pi(N+1)x)}{1-\cos(2\pi x)} = \frac{1}{N+1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(\pi(N+1)x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\right\}^2. \end{aligned}$$

Lema 2.3.5 *El núcleo de Fejer cumple las tres propiedades siguientes*

(a) $K_N(x) \geq 0\ \forall N$ *y* x.

(b) $\int_0^1 K_N(x)dx = 1\ \forall N$.

(c) $\forall \delta > 0,\ \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} K_N(x)dx \to 0$ *cuando* $N \to \infty$.

Demostración. (a) es evidente. (b) se sigue de que cada D_n tiene integral igual a 1, como se deduce de su expresión como suma de exponenciales. En cuanto a (c), es inmediato a partir de la desigualdad

$$|t| > \delta > 0 \Longrightarrow 0 \leq K_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)\operatorname{sen}^2(\pi\delta)} \to 0 \text{ cuando } N \to \infty.$$

■

Para estudiar la convergencia en norma de las medias de Cesaro, necesitamos otro resultado auxiliar sencillo.

Lema 2.3.6 *Sea* $f \in L^p[0,1]$, *para un cierto* $p \ni 1 \leq p < \infty$. *Prolongamos* f *periodicamente a toda la recta* $\mathbb{R}$. *Entonces la función*

$$\delta_p(f)(y) = \left(\int_0^1 |f(x-y) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \to 0 \text{ cuando } y \to 0$$

Demostración. Si $f = \chi_I$, donde I es un intervalo, tenemos $\delta_p(f)(y) \leq (2|y|)^{1/p}$ y el resultado es evidente. La desigualdad de Minkowski permite extenderlo a cualquier función escalonada, es decir, a cualquier combinación lineal de funciones características de intervalos. Luego se utiliza que estas funciones son densas en L^p.

Otro método, esencialmente equivalente, es utilizar la densidad de las funciones continuas, para las que el resultado es también obvio.

■

Ya podemos enunciar el

Teorema 2.3.7 (Teorema de Fejer)

(a) Si $f \in L^p[0,1]$ *para un cierto* $p \ni 1 \le p < \infty$, *entonces*

$$\sigma_N(f) \to f \text{ en } L^p[0,1] \text{ cuando } N \to \infty.$$

(b) Si $f \in \mathcal{C}_p[0,1]$, *entonces*

$$\sigma_N(f) \to f \text{ uniformemente, cuando } N \to \infty.$$

Demostración. Podemos escribir

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} K_N(y)(f(x-y) - f(x))dy.$$

Si $f \in \mathcal{C}_p[0,1]$, tenemos

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \le \int_{-1/2}^{1/2} K_N(y)|f(x-y) - f(x)|dy = \int_{|y|<\delta} \cdots + \int_{|y|>\delta} \cdots$$

Queremos ver que, dado $\varepsilon > 0$, podemos hacer $|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon$ tomando N grande. Para ello, elegimos en primer lugar δ suficientemente pequeño para que sea $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon/2$ si $|y| < \delta$, independientemente de x. Entonces por la propiedad (b) del núcleo de Fejer en el lema 2.3.5, resulta

$$\int_{|y|<\delta} K_N(y)|f(x-y) - f(x)|dy < \varepsilon/2.$$

Por otro lado

$$\int_{|y|>\delta} K_N(y)|f(x-y) - f(x)|dy \le 2\|f\|_\infty \int_{|y|>\delta} K_N(y)dy,$$

que, por la propiedad (c) del núcleo de Fejer en el lema 2.3.5, puede hacerse $< \varepsilon/2$ haciendo N grande.

El caso L^p se trata de la misma forma. Aplicando la desigualdad de Jensen, lo cual es posible porque los núcleos K_N tienen integral 1, obtenemos

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)|^p \le \int_{-1/2}^{1/2} K_N(y)|f(x-y) - f(x)|^p dy,$$

de donde

$$\|\sigma_N(f)(x) - f(x)\|_p^p \leq \int_{-1/2}^{1/2} K_N(y)\delta_p(f)(y)^p = \int_{|y|<\delta} \cdots + \int_{|y|>\delta} \cdots .$$

Ahora se concluye como en el caso de una función continua , usando para la primera integral la propiedad (b) del núcleo de Fejer en el lema 2.3.5 junto con el lema 2.3.6 y para la segunda la propiedad (c) del núcleo de Fejer en el lema 2.3.5 junto con la desigualdad obvia $\delta_p(f) \leq 2\|f\|_p$.

■

Corolario 2.3.8 *El espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios trigonométricos es denso en $L^p[0,1]$, para todo $p \ni 1 \leq p < \infty$.*

Volvamos a la pregunta inicial acerca de la convergencia en L^p de las sumas parciales $S_N(f)$. El teorema de Banach-Steinhaus nos da el siguiente criterio

Lema 2.3.9 *Para cada $p \ni 1 \leq p < \infty$, son equivalentes las propiedades siguientes*

(a) $S_N(f) \longrightarrow f$ *en* $L^p[0,1]$ *para toda* $f \in L^p[0,1]$.

(b) *Existe* $C_p \in]0,\infty[$, *independiente de* N, *tal que*

$$\|S_N(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p \ \forall N = 0,1,\cdots \text{ y } f \in L^p[0,1].$$

Demostración.

- $(a) \implies (b)$. Basta aplicar el teorema de Banach-Steinhaus 2.3.2 a la familia de operadores lineales continuos

$$\begin{array}{ccc} L^p[0,1] & \xrightarrow{S_N} & L^p[0,1] \\ f & \longmapsto & S_N(f). \end{array}$$

  Que cada S_N es continuo es consecuencia de la **desigualdad de Young**, pues

  (2.3.10) $$\|S_N(f)\|_p = \|D_N \star f\|_p \leq \|D_N\|_1\|f\|_p;$$

  pero, además, si suponemos (a), no habrá ninguna $f \in L^p[0,1]$ para la que $\sup_N \|S_N(f)\|_p = \infty$. Entonces, de acuerdo con el teorema 2.3.2, los S_N han de estar uniformemente acotados , que es lo que afirma (b).

- $(b) \implies (a)$. Sea $f \in L^p[0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $g \in \mathcal{P}$, tal que $\|f-g\|_p < \varepsilon$. La existencia de g está garantizada por el corolario 2.3.8. Para g, $S_N(g) = g$ si N es grande. Entonces

$$\|S_N(f) - f\|_p \leq \|S_N(f-g)\| + \|g - f\|_p \leq (C_p + 1)\varepsilon.$$

■

Con ayuda de este criterio podemos ya señalar un caso en el que **no hay convergencia**: en L^1. En efecto, vamos a ver que para $p = 1$, los operadores de suma parcial S_N no están uniformemente acotados como operadores en $L^1[0,1]$, o sea, que no se cumple (b) del lema 2.3.9. Por lo tanto, tampoco se cumplirá (a) en este caso y podremos afirmar que

Proposición 2.3.11 $\exists f \in L^1[0,1] \ni S_N(f) \not\to f$ *en* $L^1[0,1]$ *cuando* $N \to \infty$.

Demostración. Ya vimos en (2.3.4) que S_N es la convolución con el núcleo de Dirichlet D_N. Por lo tanto, por la desigualdad de Young (2.3.10) para $p = 1$, que no es más que el teorema de Fubini, sabemos que la norma de S_N como operador en L^1 está dominada por $\|D_N\|_1$. Lo que vamos a ver es que, de hecho

$$\|S_N\|_{\mathcal{B}(L^1,L^1)} = \|D_N\|_1 = L_N \tag{2.3.12}$$

y sabemos por el lema 2.2.9 que $L_N \to \infty$ cuando $N \to \infty$. Así pues, para concluir sólo necesitamos comprobar (2.3.12). Para ello podemos usar los núcleos de Fejer K_n. Tenemos

$$\|S_N(K_n)\|_1 = \|D_N \star K_n\|_1 = \|\sigma_n(D_N)\|_1 \to \|D_N\|_1 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Entonces, como $\|K_n\|_1 = 1 \ \forall n$,

$$\|S_N\|_{\mathcal{B}(L^1,L^1)} \geq \sup_n \|S_N(K_n)\|_1 = \|D_N\|_1.$$

■

Ahora vamos a pasar a estudiar la convergencia de las sumas parciales en un punto dado. Utilizaremos la notación siguiente

$$S^\star(f)(x) = \sup_N |S_N(f)(x)| \tag{2.3.13}$$

Para $f \in \mathcal{C}_p[0,1]$, definimos

$$\Lambda_N(f) = S_N(f)(0) = \int_0^1 f(t)D_N(t)dt.$$

$$|\Lambda_N(f)| \leq \|D_N\|_1\|f\|_\infty = L_N\|f\|_{\mathcal{C}_p[0,1]}.$$

Así pues, los Λ_N son funcionales lineales y continuos

$$\Lambda_N : \mathcal{C}_p[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si les aplicamos a los Λ_N el teorema 2.3.2 de Banach-Steinhaus, tenemos que:

- O bien $\|\Lambda_N\| \leq M \ \forall N$,

- o bien existe un G_δ denso

$$E_0 \subset \mathcal{C}_p[0,1] \ni \forall f \in E_0,\ \sup_N |\Lambda_N(f)| = \infty.$$

Veremos que se da la segunda alternativa. En concreto

Proposición 2.3.14 *$\|\Lambda_N\| = L_N$ y , por lo tanto*

$$\exists f \in \mathcal{C}_p[0,1] \ \ni \ S^\star(f)(0) = \sup_N |\Lambda_N(f)| = \infty.$$

De hecho, $S^\star(f)(0) = \infty$, para las funciones $f \in E_0$, donde E_0 es un G_δ denso de $\mathcal{C}_p[0,1]$.

Demostración. Fijado $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideramos la función

$$g(x) = \operatorname{sgn}(D_N(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad D_N(x) > 0 \\ 0 & \text{si} \quad D_N(x) = 0 \\ -1 & \text{si} \quad D_N(x) < 0 \end{cases}$$

Como D_N tiene signo variable, g no es continua; pero existen $f_n \in \mathcal{C}_p[0,1]$, tales que $|f_n| \leq 1$, $\|f_n\|_\infty = 1$ y $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces

$$\Lambda_N(f_n) = \int_0^1 f_n(x) D_N(x) dx \to \int_0^1 g(x) D_N(x) dx = \|D_N\|_1 = L_N,$$

para $n \to \infty$. Así $\|\Lambda_N\| = L_N$, como queríamos demostrar.

■

Lo que hemos hecho para el punto $x = 0$ puede hacerse para cualquier otro punto de $[0,1]$, de donde resulta

Teorema 2.3.15 *Para cada $x \in [0,1]$, existe un G_δ denso $E_x \subset \mathcal{C}_p[0,1]$, tal que*

$$S^\star(f)(x) = \infty \ \forall f \in E_x.$$

Este teorema puede mejorarse usando de nuevo el teorema de Baire. Tomamos una sucesión $x_n \in [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos un G_δ denso $E_{x_n} \ni \forall f \in E_{x_n}, S^\star(f)(x_n) = \infty$. Si ahora consideramos

$$\bigcap_n E_{x_n} = E,$$

el teorema de Baire, o más concretamente, su corolario 2.1.3, nos garantiza que E es también un G_δ denso de $\mathcal{C}_p[0,1]$. Ahora

$$\forall f \in E \text{ se tiene } S^\star(f)(x_n) = \infty \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La función $S^\star(f)$ es **semicontinua inferiormente**, lo cual implica que

$$Q_f = \{x \in [0,1] \ : \ S^\star(f)(x) = \infty\}$$

es un G_δ de $[0,1]$ (ver el ejercicio 3 al final de la sección). Si la sucesión x_n se toma densa en $[0,1]$, cosa que siempre puede hacerse, se consigue que $\forall f \in E$, Q_f sea un G_δ denso de $[0,1]$. Se obtiene así el resultado siguiente

Teorema 2.3.16 *Existe* $E \subset \mathcal{C}_p[0,1]$, *tal que*

- E *es un* G_δ *denso y además*
- $\forall f \in E$, *el conjunto* $Q_f = \{x \in [0,1] \ : \ S^\star(f)(x) = \infty\}$ *es un* G_δ *denso de* $[0,1]$.

Observemos que tanto E como cada Q_f son conjuntos **no numerables**(véase el problema 1 de la sección 1)

Ejercicios

1. (a) ¿Existe una sucesión de funciones continuas positivas f_n definidas en $\mathbb{R}$, tales que la sucesión de números $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es no acotada si y sólo si x es racional?

   (b) Responder a la pregunta que resulta de cambiar en (a) "racional"por "irracional".

2. Sea $A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$ una matriz infinita de números complejos. Utilizamos A para asociar a cada sucesión $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$, definida por
$$\sigma_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} s_k$$
siempre que la serie converja.

   Demostrar que para que A asocie a cada sucesión convergente $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, una sucesión $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ que converja al mismo límite, es condición necesaria y suficiente que A cumpla las tres propiedades siguientes:

   (a) Para cada k fijo, $a_{j,k} \to 0$, cuando $j \to \infty$.

   (b) $\sup\limits_{0\leq j<\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| < \infty$. y

   (c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{j,k} \to 1$ cuando $j \to \infty$.

   Sugerencia: Para ver la necesidad de (b), es útil considerar los funcionales
$$\begin{array}{ccc} c_0 & \stackrel{\Lambda_j}{\longrightarrow} & \mathbb{C} \\ (s_0, s_1, \cdots) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} s_k \end{array}$$

   El paso de la sucesión s_n a la sucesión σ_n se llama **método de sumabilidad**. Si $\sigma_n \to l$ para $n \to \infty$, se dice que la sucesión original s_n es **sumable** a l mediante A o, abreviadamente, **sumable**$-A$ a l. Esto puede ocurrir aunque s_n no converja. Examinénse los ejemplos de la sumabilidad de **Cesaro** (correspondiente a $a_{j,k} = \frac{1}{j+1}\chi_{k\leq j}$) y de la sumabilidad de **Abel** (correspondiente a $a_{j,k} = (1-r_j)r_j^k$ para una sucesión de números $r_n \ni 0 < r_n < 1$ y $r_n \to 1$ cuando $n \to \infty$.

3. Sea $\mathbb{X}$ un espacio topológico. Se dice que una aplicación
$$f : \mathbb{X} \longrightarrow [-\infty, \infty]$$
es **semicontinua inferiormente** si
$$\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(]a, \infty]) \quad \text{es abierto.}$$

(a) Ver que si f es semicontinua inferiormente, entonces $f^{-1}(\infty)$ es un G_δ.

(b) Ver que si $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una colección de aplicaciones semicontinuas inferiormente, entonces, si se define $f(x) = \sup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha(x)$, resulta que también f es semicontinua inferiormente. Aplicar ésto a la función $S^\star(f)$ de 2.3.13.

4. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de $\mathbb{X}$ es una **base de Schauder** de $\mathbb{X}$ si cada $x \in \mathbb{X}$ tiene una representación única de la forma $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$, donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y la serie converge en la norma de $\mathbb{X}$.

   Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $\mathbb{X}$. Definimos $P_n \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ como
$$P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$
   y, para cada $x \in \mathbb{X}$, escribimos $|||x||| = \sup_n ||P_n(x)||$. Demostrar que $||| - |||$ es una norma en $\mathbb{X}$ y que $\mathbb{X}$ con la norma $||| - |||$ es también un espacio completo.

5. Sean $\mathbb{X}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el ejercicio anterior. Demostrar que cada P_n es un operador lineal acotado en $\mathbb{X}$ y que $\sup\limits_n \|P_n\| < \infty$. A este número $\sup\limits_n \|P_n\|$ se le llama **constante de la base.**

6. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vectores no nulos de un espacio de Banach $\mathbb{X}$, tales que $\overline{[x_n \ : \ n \in \mathbb{N}]} = \mathbb{X}$. Demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $\mathbb{X}$ si y sólo si existe una constante K, tal que
$$\left\|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j\right\| \leq K \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right\|,$$
   para todos los $n > m \geq 1$, y todos los escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

7. Demostrar que el sistema de Haar, que es el tercero de los ejemplos 1.4.2 de la sección 4 del capítulo 1, es una base de Schauder de $L^p[0,1]$, para todo $p \ni 1 \leq p < \infty$.

   Sugerencia:

   - Ver, por inducción, que para cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existen intervalos $\Delta_0, \cdots, \Delta_N$ que no se solapan y cuya unión es todo $[0,1]$, tales que cada h_n, con $0 \leq n \leq N$, es constante sobre cada uno de los intervalos $\Delta_0, \cdots, \Delta_N$.

- Demostrar, por inducción, que para cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la suma parcial $S_N(f)$ de la serie de Haar de una función integrable f es

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{|\Delta_j|} \int_{\Delta_j} f(y)dy \quad \text{si } x \in \Delta_j$$

Capítulo 3

EL TEOREMA DE HAHN-BANACH Y LA DUALIDAD

3.1. El teorema de Hahn-Banach

Teorema 3.1.1 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial real y sea M un subespacio de $\mathbb{X}$. Supongamos que en $\mathbb{X}$ tenemos definido lo que se llama un* **funcional de Minkowski** *p, es decir, una aplicación $p : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las dos propiedades siguientes*

- $\forall x, y \in \mathbb{X}, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad$ *y*
- $\forall t \geq 0 \;$ *y* $\; \forall x \in \mathbb{X}, \quad p(tx) = tp(x)$.

Supongamos, además, que en M tenemos un funcional lineal $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

Entonces existe algún funcional lineal $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, que cumple las dos condiciones siguientes

1. $F(x) = f(x), \quad \forall x \in M \quad$ *y*
2. $F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

Demostración.

- **Primer paso**. Comenzamos humildemente. Dado $x_0 \notin M$, veamos cómo podemos extender f a un funcional lineal F sobre $M_1 = M + [x_0]$, de modo que sea

  $$F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M_1. \tag{3.1.2}$$

Suponiendo que existiera tal extensión, tendríamos, para cualquier $x \in M$ y cualquier $s \in \mathbb{R}$,

$$F(x + sx_0) = F(x) + sF(x_0) = f(x) + s\alpha, \tag{3.1.3}$$

si es que $F(x_0) = \alpha$. Así pues, todo lo que necesitamos es definir $F(x_0) = \alpha$ y asegurarnos de que podemos elegir α de forma que se cumpla (3.1.2). Veamos cómo ha de ser α para que se verifique (3.1.2). Tomando en (3.1.3) $s = t > 0$, vemos que se ha de cumplir

$$\forall x \in M \ \text{ y } \ \forall t > 0 \ \ f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) = tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right).$$

Por otro lado, tomando en (3.1.3) $s = -t'$, con $t' > 0$ y cambiando, por motivos puramente psicológicos, x por x', obtenemos la condición

$$\forall x' \in M \ \text{ y } \ \forall t' > 0 \ \ f(x') - t'\alpha \leq p(x' - t'x_0) = t'p\left(\frac{x'}{t'} - x_0\right).$$

En definitiva, hemos visto que la condición necesaria y suficiente que ha de cumplir α para que el funcional definido por (3.1.3) satisfaga la desigualdad (3.1.2), es precisamente

$$f\left(\frac{x'}{t'}\right) - p\left(\frac{x'}{t'} - x_0\right) \leq \alpha \leq p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) - f\left(\frac{x}{t}\right) \ \ \forall x, x' \in M \ \text{ y } \ \forall t, t' > 0.$$

Pero nada nos impide elegir α de este modo, puesto que, como veremos, se tiene que

$$\forall x, y \in M, \ f(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y).$$

En efecto

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0),$$

que da inmediatamente lo que necesitamos.

- **Segundo paso**. Ahora demostramos el teorema usando el **lema de Zorn** y el primer paso. Consideramos el conjunto $\mathcal{O}$ cuyos elementos son pares (L, φ) formados por un subespacio vectorial L de $\mathbb{X}$ tal que $M \subset L$ y un funcional lineal $\varphi : L \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla las dos condiciones

  1. $\varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in M.$
  2. $\varphi(x) \leq p(x), \quad \forall x \in L.$

En $\mathcal{O}$ definimos la relación binaria

$$(L_1, \varphi_1) \prec (L_2, \varphi_2) \Longleftrightarrow L_1 \subset L_2 \ \wedge \ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \ \forall x \in L_1.$$

Se trata, obviamente, de una relación de orden y además, el conjunto ordenado $(\mathcal{O}, \prec)$ es **inductivo**, es decir, toda cadena de $(\mathcal{O}, \prec)$ tiene alguna cota superior. Veamos que la última afirmación es cierta. En efecto, si $\mathcal{K}$ es una cadena de $(\mathcal{O}, \prec)$, podemos definir $\tilde{L} = \bigcup_{(L,\varphi)\in\mathcal{K}} L$, que, por ser $\mathcal{K}$ cadena, será un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$ y luego podemos considerar $\tilde{\varphi} : \tilde{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ si $x \in L$ y $(L, \varphi) \in \mathcal{K}$. La definición no es ambigua por ser $\mathcal{K}$ una cadena. Además, por la misma razón, $\tilde{\varphi}$ es lineal. Es claro que $(\tilde{L}, \tilde{\varphi})$ es una cota superior de $\mathcal{K}$. Una vez comprobado que $(\mathcal{O}, \prec)$ es un conjunto inductivo, podemos aplicar el lema de Zorn, que nos asegura que dicho conjunto tiene algún elemento maximal. Sea (L, φ) un elemento maximal de $(\mathcal{O}, \prec)$. Ahora hay que darse cuenta de que para este elemento maximal se tiene, necesariamente, $L = \mathbb{X}$. En efecto, si no fuera así, existiría $x_0 \in \mathbb{X} \setminus L$ y, por el primer paso, podríamos extender φ desde L a $L + [x_0]$ manteniendo la subordinación a p. Esto implicaría que (L, φ) no es maximal. Así termina la demostración.

■

Corolario 3.1.4 (Teorema de Hahn-Banach) *Sean $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$ y p una* **seminorma** *en $\mathbb{X}$, es decir, una aplicación $p : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty[$ que satisface las propiedades*

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \ \forall x, y \in \mathbb{X}$ *y*
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *y* $\forall x \in \mathbb{X}$.

Supongamos que $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ es un funcional lineal que satisface

$$|f(x)| \leq p(x), \ \ \forall x \in M. \tag{3.1.5}$$

Entonces existe $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal, que cumple las dos condiciones siguientes

1. $F(x) = f(x), \ \ \forall x \in M$ *y*
2. $|F(x)| \leq p(x), \ \ \forall x \in \mathbb{X}$.

Demostración.

- Supongamos, en primer lugar, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En este caso, basta observar que una seminorma es, en particular, un funcional de Minkowski y, además
$$|f(x)| \leq p(x) \Longrightarrow f(x) \leq p(x),$$
de forma que, sin más que aplicar el teorema 3.1.1, podemos asegurar que existe un funcional lineal $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que
$$F(x) = f(x) \ \ \forall x \in M \quad \text{y} \quad F(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$
Pero, por otro lado, para cualquier $x \in \mathbb{X}$, tenemos
$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x),$$
con lo que también es cierto que $-p(x) \leq F(x)$. Así pues, F cumple $-p(x) \leq F(x) \leq p(x), \ \ \forall x \in \mathbb{X}$, que es en este caso, la propiedad 2. del enunciado.

- Pasamos ahora al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Lo primero que hay que hacer es distinguir entre funcionales $\mathbb{R}-$lineales y funcionales $\mathbb{C}-$lineales y ver cómo se expresan estos últimos en términos de aquellos. Esto es muy sencillo. Dado $L : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, funcional $\mathbb{C}-$lineal, podemos escribirlo como
$$L(x) = \mathrm{Re}L(x) + i\mathrm{Im}L(x),$$
donde, tanto la parte real $\mathrm{Re}L$, como la parte imaginaria $\mathrm{Im}L$, son, desde luego, funcionales $\mathbb{R}-$lineales. Pero además, estos dos funcionales $\mathbb{R}-$lineales, pueden expresarse uno en términos del otro, ya que
$$\forall x \in \mathbb{X}, \ \ L(ix) = iL(x) = -\mathrm{Im}L(x) + i\mathrm{Re}L(x),$$
de modo que tenemos
$$\mathrm{Im}L(x) = -\mathrm{Re}L(ix), \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$
Se sigue que todo funcional $\mathbb{C}-$lineal L es de la forma
$$L(x) = \Lambda(x) - i\Lambda(ix) \tag{3.1.6}$$
para algún funcional $\mathbb{R}-$lineal Λ. Recíprocamente, si partimos de un funcional $\mathbb{R}-$lineal Λ y definimos L mediante la fórmula (3.1.6), obtenemos un funcional $\mathbb{C}-$lineal. En efecto, basta observar que
$$L(ix) = \Lambda(ix) - i\Lambda(-x) = \Lambda(ix) + i\Lambda(x) = iL(x), \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$
Podemos ahora comenzar la demostración del teorema en el caso complejo. Nuestro funcional $\mathbb{C}-$lineal $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, se podrá escribir como
$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix), \ \ \forall x \in M,$$

donde $\varphi(x) = \text{Re}f(x)$ es un funcional $\mathbb{R}-$lineal. Como $|\varphi(x)| = |\text{Re}f(x)| \leq p(x)\ \forall x \in M$, sabemos por el caso real tratado anteriormente, que existe un funcional $\mathbb{R}-$lineal $\Phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\Phi(x) = \varphi(x),\ \ \forall x \in M$ y además, $|\Phi(x)| \leq p(x),\ \ \forall x \in \mathbb{X}$. A partir de Φ construimos un funcional $\mathbb{C}-$lineal $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, mediante la fórmula

$$F(x) = \Phi(x) - i\Phi(ix),\ \ \forall x \in X.$$

Desde luego $F(x) = f(x)\ \ \forall x \in M$, y además

$$\forall x \in \mathbb{X},\ \exists \theta \in \mathbb{R}\ \ni\ |F(x)| = e^{i\theta}F(x) = F(e^{i\theta}x) = |\Phi(e^{i\theta}x)| \leq p(e^{i\theta}x) = p(x).$$

Esto termina la demostración.

■

Corolario 3.1.7 *Sean $\mathbb{X}$ un espacio normado, M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$, y $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$, un funcional lineal y* **continuo**. *Entonces existe un funcional lineal y continuo $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que*

1. $F(x) = f(x)\ \ \forall x \in M$ *y*
2. $\|F\| = \|f\|$.

Demostración. Todo lo que hemos de hacer es aplicar el corolario precedente con $p(x) = \|f\|\|x\|$.

■

La consecuencia más importante del teorema de Hahn-Banach es el hecho de que los espacios normados tienen espacios duales ricos o, en otras palabras, que tienen gran abundancia de funcionales lineales y continuos, cosa que, como veremos, deja de ocurrir en algunas clases más generales de espacios que consideraremos en el próximo capítulo. Esta abundancia de funcionales lineales y continuos se suele expresar diciendo que el dual $\mathbb{X}^\star$ de un espacio normado $\mathbb{X}$, **separa los puntos** de $\mathbb{X}$, lo cual quiere decir, que dados $x, y \in \mathbb{X}\ \ni\ x \neq y$, existe algún $x^\star \in \mathbb{X}^\star$, que verifica $x^\star(x) \neq x^\star(y)$. Esto es consecuencia del siguiente

Corolario 3.1.8 *Sean $\mathbb{X}$ un espacio normado y $x \in \mathbb{X}\ \ni\ x \neq 0$. Entonces existe*

$$x^\star \in \mathbb{X}^\star\ \ni\ \|x^\star\| = 1 \text{ y } x^\star(x) = \|x\|.$$

Podemos condensar este resultado en la siguiente expresión para la norma

$$\|x\| = \sup_{x^\star \in \mathbb{X}^\star\ \ni\ \|x^\star\|=1} |x^\star(x)|,$$

donde, además, sabemos que el supremo se alcanza.

Demostración. Se aplica el corolario 3.1.7 con $M = [x]$,

$$\begin{array}{ccc} [x] & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda\|x\| \end{array}$$

Es claro que $f \in M^\star$ con $\|f\| = 1$. El corolario anterior nos asegura que existe un funcional lineal $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $F(\lambda x) = f(\lambda x) = \lambda\|x\|$, y además $|F(y)| \leq \|y\|$, $\forall y \in \mathbb{X}$. En particular, $F(x) = \|x\|$ y $F \in \mathbb{X}^\star$ con $\|F\| = 1$. Podemos tomar $x^\star = F$.

■

No sólamente podemos separar puntos con funcionales lineales y continuos, sino también puntos y subespacios cerrados. En concreto, tenemos el siguiente resultado, que incluye al corolario 3.1.8

Corolario 3.1.9 *Sea M un subespacio cerrado del espacio normado $\mathbb{X}$ y sea $x \in \mathbb{X}$ tal que $x \notin M$. Entonces existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, que cumple las siguientes propiedades*

- $\|\Lambda\| = 1$,
- $\Lambda(y) = 0, \;\; \forall y \in M, \; y$
- $\Lambda(x) = \operatorname{dist}(x, M) = \inf\limits_{y\in M} \|x - y\|$.

Demostración. Consideremos el funcional lineal $f : M + [x] \longrightarrow \mathbb{K}$, definido del modo siguiente

$$f(y + \lambda x) = \lambda \operatorname{dist}(x, M) \quad \forall y \in M \;\text{ y }\; \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Es fácil probar que f es continuo y $\|f\| = 1$. En efecto, dados $y \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos

$$|f(y + \lambda x)| = |\lambda| \operatorname{dist}(x, M) \leq |\lambda| \left\| \frac{y}{\lambda} + x \right\| = \|y + \lambda x\|,$$

de forma que $f \in (M + [x])^\star$ y $\|f\| \leq 1$; pero, por la definición de $\operatorname{dist}(x, M)$, sabemos que existen $y_n \in M$, tales que $\|y_n + x\| \rightarrow \operatorname{dist}(x, M)$. Entonces

$$f\left(\frac{y_n + x}{\|y_n + x\|}\right) = \frac{\operatorname{dist}(x, M)}{\|y_n + x\|} \rightarrow 1,$$

y podemos afirmar ya que $\|f\| = 1$. Ahora si le aplicamos a f el corolario 3.1.7, concluimos que existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(M) = 0$ y $\Lambda(x) = \operatorname{dist}(x, M)$. Esto es, justamente, lo que queríamos demostrar.

■

La forma más útil de aplicar el corolario 3.1.9 está contenida en el siguiente **criterio de densidad** de subespacios

Corolario 3.1.10 *Sea M un subespacio vectorial del espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, las siguientes propiedades de M, son equivalentes:*

(a) M *es denso en* $\mathbb{X}$.

(b) $\Lambda \in \mathbb{X}^\star \ \wedge \ \Lambda(x) = 0 \ \forall x \in M \Longrightarrow \Lambda \equiv 0.$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ es inmediato. El recíproco se puede ver por reducción al absurdo usando el corolario 3.1.9. En concreto, si M no es denso en $\mathbb{X}$, es decir, si $\overline{M} \subsetneq \mathbb{X}$, según el corolario 3.1.9, podremos encontrar $\Lambda \in \mathbb{X}^\star \setminus \{0\} \ \ni \ \Lambda(M) = 0$, lo cual contradice a (b).

■

Finalizamos con lo que es básicamente una reformulación del corolario 3.1.8, pero que nos va a permitir introducir una clase importante de espacios de Banach, los espacios reflexivos.

Corolario 3.1.11 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Asociado a $\mathbb{X}$ tenemos su dual $\mathbb{X}^\star$, que sabemos que es un espacio de Banach, y nada nos impide considerar también el espacio dual de $\mathbb{X}^\star$, al que denotaremos por $\mathbb{X}^{\star\star}$, y al que a veces nos referiremos como al* **dual doble** *de $\mathbb{X}$. Para cada $x \in \mathbb{X}$, definimos un funcional lineal $\mathcal{J}(x)$ que actúa sobre $\mathbb{X}^\star$ mediante la fórmula*

$$\mathcal{J}(x)(x^\star) = x^\star(x) \quad \forall x^\star \in \mathbb{X}^\star.$$

Entonces $\mathcal{J}$ es una isometría lineal de $\mathbb{X}$ dentro del dual doble $\mathbb{X}^{\star\star}$.

Demostración. Es obvio que, para cada $x \in \mathbb{X}$, $\mathcal{J}(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{X}^\star, \mathbb{K})$. Además

$$|\mathcal{J}(x)(x^\star)| = |x^\star(x)| \leq \|x^\star\| \|x\|.$$

Esto demuestra que

$$\forall x \in \mathbb{X}, \ \ \mathcal{J}(x) \in \mathbb{X}^{\star\star} \ \text{ y se cumple } \ \|\mathcal{J}(x)\| \leq \|x\|. \tag{3.1.12}$$

Como, desde luego, $\mathcal{J} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}^{\star\star}$ es una aplicación lineal, resulta que $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X}^{\star\star})$. Para lo que necesitamos el teorema de Hahn-Banach, es para garantizar que la desigualdad de (3.1.12) es, de hecho, una igualdad. Esto es obvio si $x = 0$. En caso contrario, el corolario 3.1.8 nos asegura que existe $x^\star \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\|x^\star\| = 1$ y $x^\star(x) = \|x\|$. Entonces tenemos

$$\|x\| = x^\star(x) = |\mathcal{J}(x)(x^\star)| \leq \|\mathcal{J}(x)\| \|x^\star\| = \|\mathcal{J}(x)\|.$$

Esta desigualdad, junto con la de (3.1.12) , nos da lo que queríamos, es decir

$$\|\mathcal{J}(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

■

Vimos en el ejercicio 10 de la sección 1 del capítulo 1, que todo espacio normado $\mathbb{X}$, está contenido isométricamente en algún espacio de Banach en el cual es denso. A este espacio, esencialmente único, le llamábamos la completación de $\mathbb{X}$. Observemos que el corolario 3.1.11 nos da un método alternativo para contruir la completación de $\mathbb{X}$. Basta con tomar el cierre $\overline{\mathcal{J}(\mathbb{X})}$ de $\mathcal{J}(\mathbb{X})$ en el espacio de Banach $\mathbb{X}^{\star\star}$.

Definición 3.1.13 *Diremos que un espacio de Banach* $\mathbb{X}$ *es* **reflexivo** *si la isometría* $\mathcal{J}$ *definida en el corolario 3.1.11 es sobreyectiva, es decir, si* $\mathcal{J}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^{\star\star}$.

En la sección siguiente pondremos varios ejemplos de espacios reflexivos y de otros que no lo son. Para ello necesitamos estudiar primero los duales de los principales espacios de Banach que conocemos.

Ejercicios

1. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y supongamos que $\mathbb{Y}$ es de dimensión finita. Si $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es una transformación lineal, demostrar que T es continua si y sólo si su núcleo $T^{-1}(0)$ es cerrado.

2. (a) Demostrar que en cualquier espacio normado de dimensión infinita puede encontrarse una sucesión de vectores de norma 1 que distan uno de otro por lo menos 1/2.

   (b) Utilizar el apartado anterior para demostrar el resultado debido a F. Riesz de que los únicos espacios normados localmente compactos son los de dimensión finita.

3. Sea M un subespacio vectorial de dimensión finita del espacio normado $\mathbb{X}$. Demostrar que existe siempre un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{X}$, tal que $M \cap N = \{0\}$ y $\mathbb{X} = M + N$.

4. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach. Si $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es un operador lineal tal que, para cada $f \in \mathbb{Y}^\star$, $f \circ T \in \mathbb{X}^\star$, demostrar que T es acotado.

5. Sea M un subespacio del espacio normado $\mathbb{X}$. y sean $\mathcal{J}_\mathbb{X} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}^{\star\star}$ y $\mathcal{J}_M : M \longrightarrow M^{\star\star}$ las isometrías naturales de $\mathbb{X}$ y M dentro de sus respectivos biduales. Si j representa la inclusión $M \hookrightarrow \mathbb{X}$, demostrar que existe una isometría $\varphi : M^{\star\star} \longrightarrow \mathbb{X}^{\star\star}$, tal que $\mathcal{J}_\mathbb{X} \circ j = \varphi \circ \mathcal{J}_M$. Ver además que
$$\varphi(M^{\star\star}) = \{x^{\star\star} \in \mathbb{X}^{\star\star} \ : \ x^{\star\star}(y^\star) = 0 \ \forall y^\star \in \mathbb{X}^\star \ni y^\star(M) = 0\}$$

6. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach reflexivo y sea $\mathbb{Y}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$. Demostrar que $\mathbb{Y}$ es también un espacio de Banach reflexivo.

7. Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. Demostrar que
$$\mathbb{X} \text{ es reflexivo} \iff \mathbb{X}^\star \text{ es reflexivo.}$$

8. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados y sea $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

   (a) Si se define $T^\star : \mathbb{Y}^\star \longrightarrow \mathbb{X}^\star$ mediante $T^\star(f) = f \circ T$, comprobar que $T^\star \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}^\star, \mathbb{X}^\star)$ y $\|T^\star\| = \|T\|$. A $T^\star$ se le llama el **adjunto** de T.

   (b) Aplicando a $T^\star$ el procedimiento descrito en el apartado (a), obtenemos $T^{\star\star} \in \mathcal{B}(\mathbb{X}^{\star\star}, \mathbb{Y}^{\star\star})$. Si identificamos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ con sus imágenes respectivas mediante las isometrías naturales $\mathcal{J}_\mathbb{X}$ y $\mathcal{J}_\mathbb{Y}$, demostrar que $T^{\star\star}|_\mathbb{X} = T$.

   (c) Demostrar que $T^\star$ es inyectiva si y sólo si $T(\mathbb{X})$ es denso en $\mathbb{Y}$.

(d) Ver que si $T^\star(\mathbb{Y}^\star)$ es denso en $\mathbb{X}^\star$, entonces T es inyectiva y que el recíproco es cierto si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach reflexivo.

9. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados con $\mathbb{X} \neq \{0\}$ y supongamos que $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio de Banach con la norma usual
$$\|T\| = \sup\{|T(x)| \ : \ x \in \mathbb{X} \ \ni \ \|x\| \leq 1\}.$$
Demostrar que, entonces, $\mathbb{Y}$ tiene que ser también un espacio de Banach.

10. (a) En el espacio de Banach $l^\infty_{\mathbb{R}}$ de las sucesiones acotadas, con la norma del supremo, definimos el operador **desplazamiento** T mediante
$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_2, \cdots, x_n, \cdots)$$
y consideramos el subespacio M de $l^\infty_{\mathbb{R}}$ dado por
$$M = \{x - T(x) \ : \ x \in l^\infty_{\mathbb{R}}\}.$$
Demostrar que el vector $e = (1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ dista justamente 1 de M en $l^\infty_{\mathbb{R}}$ y utilizar el corolario 3.1.9 para concluir que existe un funcional lineal $\Lambda : l^\infty_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$, que cumple $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(M) = 0$ y $\Lambda(e) = 1$.

(b) Ver que para el funcional Λ encontrado en el apartado (a), $c_0 \subset \Lambda^{-1}(0)$ y deducir de ello que si $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ es tal que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

(c) Utilizar $\|\Lambda\| = 1$ para concluir que si $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ es tal que $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\Lambda(x) \geq 0$.

(d) Un funcional $L : l^\infty_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}$ que cumpla las propiedades

- $\|L\| = 1$,
- $L(x) = lim_{n\to\infty} x_n$ siempre que el límite exista,
- $L(x) \geq 0 \ \forall x \in l^\infty \ \ni \ x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y
- $L(x) = L(T(x)) \ \forall x \in l^\infty_{\mathbb{K}}$,

se llamará un **límite de Banach**. Los tres primeros apartados establecen la existencia de algún límite de Banach en el caso real. ¿ Cómo se demostraría un resultado análogo para el caso complejo?

11. Sea L un límite de Banach en l^∞, como se definió en el ejercicio anterior. Sea $x \in l^\infty \ \ni \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{2n-1} = 1$ y $x_{2n} = 0$, es decir, $x = (1, 0, 1, 0, \cdots)$. ¿Cual es el valor numérico de $L(x)$?

12. Demostrar la siguiente extensión del teorema clásico de Liouville:

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{X}$ es una función **entera acotada** que toma valores en el espacio normado $\mathbb{X}$, entonces f es constante.

13. Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado, cuyo dual $\mathbb{X}^\star$ se sabe que es **separable**. Demostrar que $\mathbb{X}$ es también separable.

3.2. Algunos ejemplos de espacios duales

Teorema 3.2.1 *$(l^1)^\star = l^\infty$; más concretamente, si para cada $y \in l^\infty$ definimos $\Lambda_y : l^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante*

$$\Lambda_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

obtenemos una aplicación

$$\begin{array}{rcl} l^\infty & \longrightarrow & (l^1)^\star \\ y & \longmapsto & \Lambda_y, \end{array} \tag{3.2.2}$$

que resulta ser una isometría lineal de l^∞ sobre $(l^1)^\star$.

Demostración. Dados $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in l^\infty$ y $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in l^1$,

$$|\Lambda_y(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sup_j |y_j| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|y\|_\infty \|x\|_1,$$

lo cual nos dice que

$$\Lambda_y \in (l^1)^\star \quad \text{y} \quad \|\Lambda_y\| \leq \|y\|_\infty,$$

de modo que la aplicación (3.2.2) es lineal y continua. A continuación vemos que, de hecho, es una isometría. Para ello utilizaremos los vectores $e_j \in l^1$, para $j \in \mathbb{N}$, cuyas coordenadas son

$$e_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{N} \setminus \{j\} \end{cases}$$

Dado $y \in l^\infty$, se tiene, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$y_j = \sum_{k=1}^{\infty} e_{j,k} y_k = \Lambda_y(e_j),$$

de modo que $|y_j| \leq \|\Lambda_y\| \|e_j\|_1 = \|\Lambda_y\|$ y, por tanto, $\|y\|_\infty \leq \|\Lambda_y\|$. Esta desigualdad, junto a la que vimos antes, nos dice que la aplicación (3.2.2) es una isometría. Ahora sólo queda probar que es "sobre". Para ello partimos de $\Lambda \in (l^1)^\star$ y queremos encontrar $y \in l^\infty$ tal que $\Lambda = \Lambda_y$. Lo primero que hacemos es observar que, para cada $x \in l^1$, podemos escribir

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j, \text{ en } l^1, \text{ ya que } \left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_1 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Entonces

$$\Lambda(x) = \Lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \Lambda(e_j) = \Lambda_y(x),$$

para $y = (\Lambda(e_j))_{j=1}^{\infty}$. Sólo hay que asegurarse de que $y \in l^{\infty}$; pero ésto es inmediato, ya que $|y_j| = |\Lambda(e_j)| \leq \|\Lambda\|\|e_j\|_1 = \|\Lambda\|$. Queda probado que $\Lambda = \Lambda_y$ y ello termina la demostración.

■

Teorema 3.2.3 $(c_0)^{\star} = l^1$; *más concretamente, si para cada* $y \in l^1$ *definimos* $\Lambda_y : c_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ *mediante*

$$\Lambda_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

obtenemos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} l^1 & \longrightarrow & (c_0)^{\star} \\ y & \longmapsto & \Lambda_y, \end{array} \tag{3.2.4}$$

que resulta ser una isometría lineal de l^1 *sobre* $(c_0)^{\star}$.

Demostración. Dados $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l^1$ y $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$,

$$|\Lambda_y(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \sup_j |x_j| = \|y\|_1 \|x\|_{c_0},$$

lo cual nos dice que

$$\Lambda_y \in (c_0)^{\star} \quad \text{y} \quad \|\Lambda_y\| \leq \|y\|_1,$$

de modo que la aplicación (3.2.4) es lineal y continua. A continuación vemos que, de hecho, es una isometría.

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \text{sgn}(y_j),$$

donde

$$\text{sgn}(y_j) = \begin{cases} \frac{|y_j|}{y_j} & \text{si } y_j \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } y_j = 0 \end{cases}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, si consideramos el vector

$$x = (\text{sgn}(y_1), \cdots, \text{sgn}(y_n), 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \in c_0,$$

podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j = |\Lambda_y(x)| \leq \|\Lambda_y\| \|x\|_{c_0} \leq \|\Lambda_y\|.$$

Así pues, $\|y\|_1 \leq \|\Lambda_y\|$, lo que nos da, junto a la desigualdad opuesta que vimos antes, que la aplicación (3.2.4) es una isometría. Queda por ver que es "sobre". Sea $\Lambda \in (c_0)^\star$. Dado un x arbitrario de c_0, observamos que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \text{ en } c_0, \text{ ya que } \left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_{c_0} = \sup_{n+1 \leq j < \infty} |x_j| \to 0 \text{ para } n \to \infty.$$

Por lo tanto

$$\Lambda(x) = \Lambda\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \Lambda(e_j) = \Lambda_y(x)$$

para $y = (\Lambda(e_j))_{j=1}^{\infty}$. Nos queda ver que $y \in l^1$. Pero, dado $n \in \mathbb{N}$, arbitrario, podemos escribir, con ciertos $\theta_j \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| = \sum_{j=1}^{n} |\Lambda(e_j)| = \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j} \Lambda(e_j) = \Lambda\left(\sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j} e_j\right) \leq \|\Lambda\|.$$

Vemos así que $\|y\|_1 \leq \|\Lambda\|$ y $\Lambda = \Lambda_y$, lo que completa la demostración.

■

Corolario 3.2.5 *Ni c_0 ni l^1 ni l^∞ son reflexivos.*

Demostración. Comenzamos mirando a c_0. La aplicación

$$\mathcal{J} : c_0 \longrightarrow c_0^{\star\star} = (l^1)^\star = l^\infty$$

se define como $\mathcal{J}(x)(y) = \Lambda_y(x) = \Lambda_x(y)$, es decir, con las identificaciones que hemos hecho, $\mathcal{J}(x) = x$. En otras palabras, $\mathcal{J}$ es, simplemente la inclusión de c_0 en l^∞, que, desde luego, no es "sobre". Esto nos dice que c_0 no es reflexivo.

Como c_0 es un subespacio cerrado de l^∞ y sabemos que los subespacios cerrados de un espacio reflexivo, son también reflexivos (problema 6 de la sección anterior), concluimos que tampoco l^∞ es reflexivo.

Pasemos ahora al caso de l^1. Como $l^1 = (c_0)^\star$ y c_0 no es reflexivo, podemos ya afirmar que l^1 no es reflexivo (problema 7 de la sección anterior). Damos, de todos modos, un argumento específico. Tenemos, como antes, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} l^1 & \xrightarrow{\mathcal{J}} & (l^1)^{\star\star} = (l^\infty)^\star \\ x & \longmapsto & \Lambda_x. \end{array}$$

Lo que complica un poco la situación es que no sabemos quién es $(l^\infty)^\star$. En realidad no necesitamos saberlo. Basta observar que, puesto que c_0 es un subespacio cerrado propio de l^∞, el corolario 3.1.10 nos asegura que existe $\Lambda \in (l^\infty)^\star \setminus \{0\}$, tal que $\Lambda(c_0) = 0$. Este funcional no puede ser de la forma Λ_x para ningún $x \in l^1$, pues en ese caso, el teorema 3.2.3 conduciría a $x = 0$. Por lo tanto, l^1 tampoco es reflexivo.

■

Teorema 3.2.6 *Sea $1 < p < \infty$. Entonces $(l^p)^\star = l^{p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p, es decir, el único que satisface $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Más concretamente, si para cada $y \in l^{p'}$ definimos $\Lambda_y : l^p \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante*

$$\Lambda_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

obtenemos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} l^{p'} & \longrightarrow & (l^p)^\star \\ y & \longmapsto & \Lambda_y, \end{array} \tag{3.2.7}$$

que resulta ser una isometría lineal de $l^{p'}$ sobre $(l^p)^\star$.

Demostración. Dados $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l^{p'}$ y $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l^p$, la desigualdad de Hölder nos conduce a

$$|\Lambda_y(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

lo cual nos dice que

$$\Lambda_y \in (l^p)^\star \quad \text{y} \quad \|\Lambda_y\| \leq \|y\|_{p'},$$

de modo que la aplicación (3.2.7) es lineal y continua. A continuación vemos que, de hecho, es una isometría. En efecto

$$\|y\|_{p'}^{p'} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^{p'} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^{p'-1} |y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

donde $x_j = |y_j|^{p'-1}(\mathrm{sgn} y_j)$ son las componentes de un vector $x \in l^p$, ya que

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^{(p'-1)p} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^{p'} = \|y\|_{p'}^{p'}.$$

Por lo tanto,

$$\|y\|_{p'}^{p'} = |\Lambda_y(x)| \leq \|\Lambda_y\| \|x\|_p = \|\Lambda_y\| \|y\|_{p'}^{p'/p},$$

o, en otras palabras

$$\|y\|_{p'} \leq \|\Lambda_y\|.$$

Esta desigualdad, junto a la que va en sentido contrario, que establecimos al comienzo de la demostración, nos asegura que la aplicación (3.2.7) es una isometría. Veamos, para terminar, que es "sobre". Para cada $x \in l^p$, podemos escribir

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \quad \text{donde la serie converge en } \; l^p,$$

pues, efectivamente

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\|_p = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \to 0 \text{ para } n \to \infty.$$

Entonces, para cada $\Lambda \in (l^p)^\star$ y cada $x \in l^p$, podemos poner

$$\Lambda(x) = \Lambda \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \Lambda(e_j).$$

Resulta que el vector $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ con $y_j = \Lambda(e_j)$ pertenece a $l^{p'}$. En efecto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'} = \sum_{j=1}^{n} |\Lambda(e_j)|^{p'} = \sum_{j=1}^{n} |\Lambda(e_j)|^{p'-1} \mathrm{sgn}(\Lambda(e_j))\Lambda(e_j).$$

Pero este número no es más que la imagen mediante Λ del vector

$$\sum_{j=1}^{n} |\Lambda(e_j)|^{p'-1} \mathrm{sgn}(\Lambda(e_j)) e_j,$$

que es un vector de l^p con norma

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{(p'-1)p} \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'} \right)^{1/p}.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'} \leq \|\Lambda\| \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'} \right)^{1/p}.$$

En definitiva, tomando el supremo en n, vemos que

$$\|y\|_{p'} \leq \|\Lambda\|$$

y llegamos a que $\Lambda = \Lambda_y$, como queríamos demostrar.

■

Corolario 3.2.8 *Para cada* $p \ni 1 < p < \infty$, l^p *es reflexivo.*

Demostración. Es evidente que la aplicación

$$\mathcal{J} : l^p \longrightarrow (l^p)^{\star\star} = (l^{p'})^\star = l^p,$$

que viene dada por

$$\mathcal{J}(x)(y) = \Lambda_y(x) = \Lambda_x(y),$$

no es otra, habida cuenta de las identificaciones intermedias, que la identidad en l^p.

■

Los teoremas 3.2.1 y 3.2.6 son casos particulares del siguiente resultado general, debido a F. Riesz.

Teorema 3.2.9 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma-$finito. Entonces, para todo $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mu)^\star = L^{p'}(\mu)$, donde p' es, como antes, el exponente conjugado de p. Más concretamente, si para cada $g \in L^{p'}(\mu)$, definimos $\Lambda_g : L^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante*

$$\Lambda_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x),$$

obtenemos una isometría de $L^{p'}(\mu)$ sobre $L^p(\mu)^\star$

$$\begin{array}{ccc} L^{p'}(\mu) & \longrightarrow & L^p(\mu)^\star \\ g & \longmapsto & \Lambda_g. \end{array} \tag{3.2.10}$$

Demostración. Dada $g \in L^{p'}(\mu)$, la desigualdad de Hölder garantiza que Λ_g está bien definido, y satisface

$$|\Lambda_g(f)| \leq \|g\|_{p'}\|f\|_p \ \forall f \in L^p(\mu),$$

de modo que $\Lambda_g \in L^p(\mu)^\star$ y $\|\Lambda_g\| \leq \|g\|_{p'}$. Tenemos así bien definido el operador lineal y continuo (3.2.10). Para ver que es una isometría se procede como en los teoremas 3.2.1 y 3.2.6.

Comencemos con el caso $p' < \infty$, es decir, $p > 1$. Tenemos

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_\Omega |g(x)|^{p'} d\mu(x) = \int_\Omega |g(x)|^{p'-1}\mathrm{sgn}(g(x))g(x)d\mu(x) = \Lambda_g(f)$$

para $f(x) = |g(x)|^{p'-1}\mathrm{sgn}(g(x))$, que es una función perteneciente a $L^p(\mu)$, ya que

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \int_\Omega |g(x)|^{(p'-1)p} d\mu(x) = \|g\|_{p'}^{p'}.$$

Entonces

$$\|g\|_{p'}^{p'} = |\Lambda_g(f)| \leq \|\Lambda_g\|\|f\|_p = \|\Lambda\|\|g\|_{p'}^{p'/p}.$$

Como $p' - \frac{p'}{p} = 1$, obtenemos, finalmente $\|g\|_{p'} \leq \|\Lambda_g\|$, que es la desigualdad que nos faltaba para concluir que la aplicación (3.2.10) es isometría en el caso $p > 1$.

Analicemos ahora el caso $p = 1$, o sea, $p' = \infty$. Supongamos $0 < \alpha < \|g\|_\infty$. Esto quiere decir que

$$\mu\left(\{x \ : \ |g(x)| > \alpha\}\right) > 0.$$

Como nuestro espacio de medida es $\sigma-$finito, existirá algún conjunto medible $A \subset \{x \ : \ |g(x)| > \alpha\}$, tal que $0 < \mu(A) < \infty$. Pero, entonces,

$$\alpha < \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g(x)| d\mu(x) = \Lambda_g(f),$$

para $f(x) = \frac{1}{\mu(A)} \chi_A(x) \mathrm{sgn}(g(x))$, que es una función de $L^1(\mu)$ con $\|f\|_1 = 1$. Llegamos a la desigualdad $\alpha < \|\Lambda_g\|$, que nos da, al acercarse α a $\|g\|_\infty$, $\|g\|_\infty \leq \|\Lambda_g\|$. Así completamos la demostración de que (3.2.10) es una isometría también para $p = 1$.

Queda por ver que la aplicación (3.2.10) es "sobre".

- Primero suponemos que μ es finita, es decir, que $\mu(\Omega) < \infty$. Partimos de $\Lambda \in L^p(\mu)^\star$ y pretendemos encontrar una $g \in L^{p'}(\mu)$, tal que $\Lambda = \Lambda_g$. Para ello definimos

$$\nu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ mediante } \ \nu(E) = \Lambda(\chi_E) \ \forall E \in \mathcal{M}.$$

Resulta que ν es una **medida compleja**. En efecto, si $(E_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión de conjuntos $\mathcal{M}-$medibles disjuntos dos a dos, tenemos

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\right) = \Lambda\left(\chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j}\right) = \Lambda\left(\sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}\right) = \sum_{j=1}^\infty \Lambda(\chi_{E_j}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(E_j).$$

La tercera igualdad es consecuencia de que

$$\chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j} = \sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}$$

en el sentido de la convergencia en $L^p(\mu)$, es decir

$$\begin{aligned} \left\| \chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j} - \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} \right\|_{L^p(\mu)} &= \left\| \chi_{\cup_{j=n+1}^\infty E_j} \right\|_{L^p(\mu)} = \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^\infty E_j\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=n+1}^\infty \mu(E_j)\right)^{1/p} \to 0 \ \text{ para } \ n \to \infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, es evidente que la medida ν es **absolutamente continua** con respecto a la medida μ, es decir,

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0.$$

Entonces se sigue del **teorema de Radon-Nikodym**, que existe $g \in L^1(\mu)$, tal que

$$\Lambda(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g(x) d\mu(x) = \int_\Omega \chi_E(x) g(x) d\mu(x) \ \forall \ E \in \mathcal{M}$$

y, por consiguiente

$$\Lambda(s) = \int_\Omega s(x)g(x)d\mu(x) \text{ para toda función simple } s.$$

Sean $A_n = \{x \in \Omega : |g(x)| \leq n\}$. Si ponemos $g_n(x) = \chi_{A_n}(x)g(x)$, tenemos $g_n \in L^{p'}(\mu)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y podemos calcular su norma como

$$\|g_n\|_{p'} = \sup_{\varphi \,\text{simple}\, \ni \|\varphi\|_p \leq 1} \left| \int_\Omega \varphi(x) g_n(x) d\mu(x) \right|.$$

Como

$$\left| \int_\Omega \varphi(x) g_n(x) d\mu(x) \right| = \left| \int_\Omega \varphi(x) \chi_{A_n}(x) g(x) d\mu(x) \right| = |\Lambda(\varphi\chi_{A_n})|,$$

y

$$|\Lambda(\varphi\chi_{A_n})| \leq \|\Lambda\| \|\varphi\chi_{A_n}\|_p \leq \|\Lambda\| \|\varphi\|_p \leq \|\Lambda\|,$$

llegamos, finalmente, a

$$\|g_n\|_{p'} \leq \|\Lambda\| \ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

y, así, vemos que $g \in L^{p'}(\mu)$. Ahora, basta observar que Λ y Λ_g coinciden sobre las funciones simples, que son densas en $L^p(\mu)$. Esto implica inmediatamente, que $\Lambda = \Lambda_g$, como queríamos demostrar.

- Supongamos ahora que $\mu(\Omega) = \infty$. Entonces, como estamos suponiendo que la medida μ es $\sigma-$finita, podremos escribir $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$, donde los conjuntos Ω_n son medibles, con $\mu(\Omega_n) < \infty\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y disjuntos dos a dos. Sea $\Lambda \in L^p(\mu)^\star$. Por el apartado anterior, sabemos que existe una función medible g en Ω, tal que $\chi_{\Omega_n} g \in L^{p'}(\mu)\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\Lambda(f) = \int_\Omega fgd\mu$ para todas las $f \in L^p(\mu)$ que se anulen fuera de algún Ω_n. Entonces $\forall N \in \mathbb{N}$, $\chi_{\cup_{n=1}^N \Omega_n} g \in L^{p'}(\mu)$ y $\Lambda(f) = \int_\Omega fgd\mu$ para toda $f \in L^p(\mu)$ que se anule fuera de $\bigcup_{n=1}^N \Omega_n$.

  Sea $f \in L^p(\mu)$ arbitraria. Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos $f_N = \chi_{\cup_{n=1}^N \Omega_n} f$. Tendremos $\Lambda(f_N) = \int_\Omega f_N gd\mu$ y $f_N \to f$ en $L^p(\mu)$ para $N \to \infty$, ya que $\|f - f_N\|_p^p = \int_{\cup_{N+1}^\infty \Omega_n} |f|^p d\mu \to 0$ para $N \to \infty$ (estamos aplicando la medida $E \mapsto \int_E |f|^p d\mu$ a la familia decreciente de conjuntos $(\cup_{N+1}^\infty \Omega_n)_{N=1}^\infty$, cuya intersección es el conjunto vacío). Se sigue que $\Lambda(f_N) \to \Lambda(f)$ para $N \to \infty$. Por otro lado

  $$\int_\Omega |f_N g| d\mu = \Lambda(|f_N| \text{sgn}(g)) \leq \|\Lambda\| \|f_N \text{sgn}(g)\|_p \leq \|\Lambda\| \|f\|_p,$$

  lo que nos lleva, utilizando el teorema de convergencia monótona, a la desigualdad

  $$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|\Lambda\| \|f\|_p.$$

Después, por el teorema de convergencia dominada

$$\Lambda(f) = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega f_N g d\mu = \int_\Omega \lim_{N\to\infty} f_N g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$

Finalmente, como $\left\| \chi_{\cup_{n=1}^N \Omega_n} g \right\|_{p'} \leq \|\Lambda\| \ \forall N \in \mathbb{N}$, obtenemos $\|g\|_{p'} \leq \|\Lambda\|$ y concluimos la demostración de que $\Lambda = \Lambda_g$.

■

Ejercicios

1. Demostrar que el espacio $L^1[0,1]$ no es reflexivo. Deducir que tampoco son reflexivos ni $L^\infty[0,1]$ ni $\mathcal{C}[0,1]$.

2. Demostrar que si $1 < p < \infty$, el teorema 3.2.9 sigue siendo cierto para un espacio de medida arbitrario, mientras que para el caso $p = 1$ es necesaria alguna restricción sobre el espacio de medida.

   (Sugerencia: Un funcional $\Lambda \in L^p(\mu)^\star$ siempre se anula fuera de algún conjunto $\sigma-$finito)

3. Demostrar que, para cualquier medida μ y cualquier $p \ni 1 < p < \infty$, el espacio $L^p(\mu)$ es reflexivo.

4. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma-$finito y sean p y p' exponentes conjugados, con $1 \leq p \leq \infty$. Sea g una función medible definida en Ω, tal que $fg \in L^1(\mu)$ para toda $f \in S$, el espacio de las funciones simples integrables, o lo que es lo mismo, aquellas que se anulan fuera de un conjunto de medida finita, y además, la cantidad

   $$M_{p'}(g) = \sup \left\{ \left| \int_\Omega fg d\mu \right| \ : \ f \in S \text{ y } \|f\|_p = 1 \right\}$$

   es finita. Demostrar que $g \in L^{p'}(\mu)$ y $\|g\|_{p'} = M_{p'}(g)$.

   ¿Se puede eliminar la condición de que μ sea $\sigma-$finita?

5. Proporcionar los detalles de la siguiente demostración, debida a J. von Neumann, del **teorema de Radon-Nikodym**:

   Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, un espacio de medida $\sigma-$finito y sea ν una medida compleja, $\sigma-$finita, absolutamente continua con respecto a μ. Se pretende demostrar que existe una función medible f, tal que

   $$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x) \quad \forall E \in \mathcal{M} \quad \text{tal que} \quad \nu(E) < \infty.$$

   (a) Ver, antes que nada, que se puede suponer que tanto μ como ν son medidas finitas positivas.

   (b) Considerar la medida $\rho = \mu + \nu$ y aplicar el teorema de representación de F. Riesz al funcional Λ definido como

   $$\Lambda(f) = \int_\Omega f(x) d\nu(x)$$

   sobre $L^2(\rho)$.

6. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida $\sigma-$finito y sea $1 \leq p \leq \infty$. Supongamos que g es una función medible definida en Ω, tal que $fg \in L^1(\mu)$ para toda $f \in L^p(\mu)$. Demostrar que $g \in L^{p'}(\mu)$ y

$$\|g\|_{p'} = \sup\left\{ \left| \int_\Omega fg d\mu \right| \ : \ f \in L^p(\mu) \ \ni \ \|f\|_p = 1 \right\}$$

¿Se puede relajar la condición sobre el espacio de medida?

7. Sea $(\mathbb{X}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de espacios normados. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ designamos la norma en $\mathbb{X}_\alpha$ como $\| - \|_\alpha$. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\mathbb{X}_p \equiv \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}}^{p} \mathbb{X}_\alpha \equiv \left\{ x \in \prod_\alpha \mathbb{X}_\alpha \ : \ \|x\| \equiv \left(\sum_\alpha \|x_\alpha\|_\alpha^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

También definimos

$$\mathbb{X}_\infty \equiv \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}}^{\infty} \mathbb{X}_\alpha \equiv \left\{ x \in \prod_\alpha \mathbb{X}_\alpha \ : \ \|x\| \equiv \sup_\alpha \|x_\alpha\|_\alpha < \infty \right\}.$$

Sea $\mathbb{X} = \mathbb{X}_p$, para algún $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Demostrar que $\mathbb{X}$ es un espacio normado y que $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, la proyección $P_\alpha : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}_\alpha$ es una aplicación lineal continua con $\|P_\alpha(x)\| \leq \|x\| \ \forall \ x \in \mathbb{X}$.

(b) $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach si y sólo si cada $\mathbb{X}_\alpha$ es un espacio de Banach.

(c) Cada proyección P_α es una aplicación abierta de $\mathbb{X}$ sobre $\mathbb{X}_\alpha$.

8. Si en el problema precedente $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, tiene sentido definir también

$$\mathbb{X}_{\infty,0} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ : \ x_n \in \mathbb{X}_n \text{ y } \|x_n\|_n \to 0 \text{ para } n \to \infty\}$$

como un subespacio de $\mathbb{X}_\infty$. Ver si las afirmaciones del ejercicio anterior siguen siendo ciertas para $\mathbb{X}_{\infty,0}$.

9. Con la misma notación del ejercicio 7, demostrar que, si $1 \leq p < \infty$, $\mathbb{X}_p$ es separable si y sólo si el conjunto $\mathcal{A}$ de índices es numerable y cada $\mathbb{X}_\alpha$ es separable. Ver además que $\mathbb{X}_\infty$ es separable si y sólo si el conjunto $\mathcal{A}$ es finito y cada $\mathbb{X}_\alpha$ es separable.

10. Demostrar que el espacio $\mathbb{X}_{\infty,0}$ del ejercicio 8 es separable si y sólo si cada espacio $\mathbb{X}_n$ es separable.

11. Demostrar que el dual del espacio $\mathbb{X}_p$ del ejercicio 7, con $1 \leq p < \infty$, es isométricamente isomorfo a

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}}^{p'} \mathbb{X}_\alpha^\star \ ,$$

donde p' es el exponente conjugado de p, es decir, el único que verifica $1/p + 1/p' = 1$.

12. Demostrar que el dual del espacio $\mathbb{X}_{\infty,0}$ del ejercicio 8 es isométricamente isomorfo a

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}}^{1} \mathbb{X}_n^\star.$$

Capítulo 4

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

4.1. Definiciones y primeras propiedades

Definición 4.1.1 *Sea* $\mathbb{X}$ *un espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$. *Sea* $\mathcal{T}$ *una topología sobre* $\mathbb{X}$. *Diremos que* $\mathcal{T}$ *es una* **topología vectorial** *ó* **lineal** *si cumple las dos condiciones siguientes*

(a) $\forall x \in \mathbb{X}$, *el conjunto* $\{x\}$ *es cerrado.*

(b) Las operaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} \times \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

son continuas.

Un **espacio vectorial topológico** *(usaremos, con frecuencia la abreviatura EVT) es un par* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *formado por un espacio vectorial* $\mathbb{X}$ *sobre el cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$, *junto con una topología vectorial* $\mathcal{T}$ *definida en* $\mathbb{X}$. *A veces hablaremos del EVT* $\mathbb{X}$, *sin mencionar explícitamente la topología* $\mathcal{T}$.

Dado un EVT $\mathbb{X}$, definimos, para cada $a \in \mathbb{X}$, el operador de **traslación**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{T_a} & \mathbb{X} \\ x & \longmapsto & T_a(x) \equiv x + a. \end{array}$$

También para cada $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, definimos el operador de **multiplicación**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{M_\lambda} & \mathbb{X} \\ x & \longmapsto & M_\lambda(x) \equiv \lambda x. \end{array}$$

Proposición 4.1.2 $\forall a \in \mathbb{X}$, *y* $\forall \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, T_a *y* M_λ *son homeomorfismos.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la propiedad (b) de la definición de EVT que T_a y M_λ son aplicaciones continuas. Por otro lado, los axiomas de espacio vectorial implican que T_a y M_λ son biyecciones cuyas inversas son, respectivamente, T_{-a} y $M_{1/\lambda}$. Así pues, se trata de homeomorfismos.

■

Corolario 4.1.3 *En un EVT $\mathbb{X}$, un conjunto $E \subset \mathbb{X}$ es abierto si y sólo si $\forall a \in \mathbb{X}$, $E + a$ es abierto. La topología queda determinada por un sistema fundamental de entornos de* 0, *que es lo que llamaremos una* **base local**.

■

Definición 4.1.4 *Un subconjunto E de un EVT $\mathbb{X}$ se dice que es* **acotado** *si para cada entorno V de* 0, *existe $s > 0$, tal que $\forall t > s$, $E \subset tV$.*

Se sigue de la proposición 1.1.10 del capítulo 1, que todo espacio normado es un EVT; pero veremos en este capítulo que hay muchos ejemplos naturales y útiles de EVT que no son normados. Comenzamos poniendo nombres a algunas clases importantes de EVT.

Definición 4.1.5 *Sea $\mathbb{X}$ un EVT. Diremos que*

(a) $\mathbb{X}$ *es* **localmente convexo** *si existe una base local $\mathcal{B}$ formada por conjuntos convexos.*

(b) $\mathbb{X}$ *es* **localmente acotado** *si* 0 *tiene algún entorno acotado.*

(c) $\mathbb{X}$ *es* **localmente compacto** *si* 0 *tiene algún entorno compacto.*

(d) $\mathbb{X}$ *es* **metrizable** *si su topología coincide con la topología asociada a alguna métrica.*

(e) $\mathbb{X}$ *es* **de tipo F** *si su topología viene dada por alguna* **métrica invariante completa**. *Una métrica o distancia d se dice que es* **invariante** *si $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ y se dice que es* **completa** *cuando el correspondiente espacio métrico es completo.*

(f) $\mathbb{X}$ *es un* **espacio de Frechet** *si $\mathbb{X}$ es un espacio locamente convexo que además es de tipo F.*

(g) $\mathbb{X}$ *es* **normable** *si existe una norma que induce sobre $\mathbb{X}$ la topología de partida.*

(h) $\mathbb{X}$ *tiene la* **propiedad de Heine-Borel** *si todo conjunto cerrado y acotado es compacto.*

Veremos que, entre los tipos de EVT que acabamos de introducir, existen las siguientes relaciones, que demostraremos más adelante.

- $\mathbb{X}$ localmente acotado $\Longrightarrow$ $\mathbb{X}$ tiene una base local numerable.
- $\mathbb{X}$ es metrizable $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{X}$ tiene una base local numerable.
- $\mathbb{X}$ es normable $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{X}$ es localmente convexo y localmente acotado.
- $\mathbb{X}$ es localmente compacto $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{X}$ es de dimensión finita.
- $\mathbb{X}$ localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel $\Longrightarrow$ $\mathbb{X}$ es de dimensión finita.

Lo primero que vamos a hacer es precuparnos por las propiedades de separación. Veremos que los axiomas de EVT implican que todo EVT es de Hausdorff, a pesar de que la única propiedad de separación que hemos pedido explícitamente es que los puntos sean cerrados (propiedad (a) de la definición 4.1.1). Necesitamos un lema previo sencillo.

Lema 4.1.6 *Sea W un entorno de 0 en el EVT $\mathbb{X}$. Entonces existe U, entorno abierto de 0, tal que $U = -U$ (se dice en ese caso que U es simétrico) y $U + U \subset W$, lo que implica, desde luego, que $U \subset W$.*

Demostración. Como la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}\times\mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

es continua y lleva $(0,0)$ a 0, dado W, entorno de 0, existirán V_1 y V_2, entornos abiertos de 0, tales que $V_1+V_2 \subset W$. Tomando luego $U = V_1\cap V_2\cap(-V_1)\cap(-V_2)$, tendremos un entorno abierto del 0 con las propiedades deseadas.

$\blacksquare$

Teorema 4.1.7 *Sean K, compacto y C, cerrado, subconjuntos disjuntos de un EVT $\mathbb{X}$. Entonces existe V, entorno abierto de 0, tal que*

$$(K+V)\cap(C+V) = \emptyset.$$

$K+V$ y $C+V$ son abiertos que contienen a K y C respectivamente.

Demostración. Si $K = \emptyset$, no hay nada que demostrar. Sea, pues, $K \neq \emptyset$. Usando que C es cerrado y $K \subset \mathbb{X}\setminus C$ y apelando al lema 4.1.6, podemos asociar a cada $x \in K$, un entorno abierto y simétrico del 0, al que llamaremos V_x, tal que

$$(x+V_x+V_x+V_x)\cap C = \emptyset.$$

Esto implica, por ser V_x simétrico, que

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset.$$

Como K es compacto, existirán $x_1, \cdots, x_n \in K$, tales que

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Si definimos $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, tendremos

$$K + V \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left(x_j + V_{x_j} + V\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left(x_j + V_{x_j} + V_{x_j}\right).$$

Ningún término de esta unión corta a $C + V$, de modo que resulta

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Observemos que

$$K + V = \bigcup_{x \in K} (x + V)$$

y, como cada $x + V$ es abierto, es claro que $K + V$ es un abierto que contiene a K. Igualmente $C + V$ es un abierto que contiene a C.

■

Observación. En realidad, en el teorema anterior, se tiene $\overline{K + V} \cap (C + V) = \emptyset$, ya que $K + V \subset \mathbb{X} \setminus (C + V)$ y $\mathbb{X} \setminus (C + V)$ es cerrado.

Corolario 4.1.8 *Si $\mathcal{B}$ es una base local del EVT $\mathbb{X}$, entonces, cada elemento de $\mathcal{B}$ contiene el cierre de algún elemento de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{B}$. Basta aplicar el teorema, junto con la observación que sigue a su demostración, a los conjuntos $K = \{0\}$ y $C = \mathbb{X} \setminus W$. Encontramos $V \in \mathcal{B}$, tal que

$$\overline{\{0\} + V} \cap ((\mathbb{X} \setminus W) + V) = \emptyset;$$

de donde se sigue

$$\overline{V} \subset \mathbb{X} \setminus ((\mathbb{X} \setminus W) + V) \subset W.$$

■

Corolario 4.1.9 *Todo EVT es de Hausdorff.*

Demostración. Sean x e y dos puntos distintos del EVT. Basta aplicar el teorema 4.1.7 con $K = \{x\}$ y $C = \{y\}$.

■

En el siguiente teorema coleccionamos algunos hechos básicos relativos al comportamiento de cierres e interiores.

Teorema 4.1.10 *Sea $\mathbb{X}$ un EVT. Entonces*

(a) Si $\mathcal{V}$ es la colección de todos los entornos de 0 y $\mathcal{B}$ es una base local cualquiera, se tiene que

$$\forall A \subset \mathbb{X}, \ \ \overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A+V) = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} (A+V).$$

(b) $\forall A, B \subset \mathbb{X}, \ \ \overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$.

(c) Si Y es un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$, entonces su cierre $\overline{Y}$, también es un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$.

(d) Si $C \subset \mathbb{X}$ es convexo, entonces, también su cierre $\overline{C}$ y su interior $\overset{\circ}{C}$ son convexos.

(e) Si $B \subset \mathbb{X}$ es un conjunto **equilibrado** *(lo cual quiere decir que $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \ni \ |\alpha| \leq 1$, se cumple $\alpha B \subset B$), entonces su cierre $\overline{B}$, también es equilibrado. Si además $0 \in \overset{\circ}{B}$, entonces, también $\overset{\circ}{B}$ es equilibrado.*

(f) Si $E \subset \mathbb{X}$ es un conjunto acotado, entonces su cierre $\overline{E}$, también es acotado.

Demostración.

(a)

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}\ , \ (x - V) \cap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{B}\, , \, x \in A + V.$$

(b) Sean $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$. Queremos demostrar que $a + b \in \overline{A+B}$. Para ello tomamos un entorno cualquiera W de $a + b$ y queremos ver que $W \cap (A + B) \neq \emptyset$. Ahora bien, por la continuidad de la suma, sabemos que existen W_1, entorno de a y W_2, entorno de b, tales que $W_1 + W_2 \subset W$. Como $a \in \overline{A}$, sabemos que $W_1 \cap A \neq \emptyset$, de forma que existirá $x \in W_1 \cap A$. Por la misma razón, puesto que $b \in \overline{B}$, existirá $y \in W_2 \cap A$. Entonces $x + y \in (W_1 + W_2) \cap (A + B) \subset W \cap (A + B)$. Por tanto, $W \cap (A + B) \neq \emptyset$, como queríamos demostrar.

(c) En primer lugar $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\overline{Y} = \overline{\alpha Y}$. Esto es obvio para $\alpha = 0$ y, para $\alpha \neq 0$ se sigue de que el operador de multiplicación M_α es un homeomorfismo (proposición 4.1.2).

Después, si tenemos α, y $\beta \in \mathbb{K}$, resulta

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

donde hemos usado la propiedad (b) que probamos en el apartado anterior.

(d) Sea C convexo. Para ver que $\overline{C}$ es convexo procedemos como en el apartado anterior. Si $0 < t < 1$, tenemos

$$(1-t)\overline{C} + t\overline{C} = \overline{(1-t)C + tC} \subset \overline{(1-t)C + tC} \subset \overline{C}.$$

Pasamos ahora a ver que $\overset{\circ}{C}$ es convexo. Sea, como antes, $0 < t < 1$. Desde luego, como $\overset{\circ}{C} \subset C$ y C es convexo, es claro que $(1-t)\overset{\circ}{C} + t\overset{\circ}{C} \subset C$. Pero $(1-t)\overset{\circ}{C}$ y $t\overset{\circ}{C}$ son abiertos, de forma que su suma también es un abierto. Se sigue, por tanto, que $(1-t)\overset{\circ}{C} + t\overset{\circ}{C} \subset \overset{\circ}{C}$.

(e) Sea $0 < |\alpha| \leq 1$. Entonces $\alpha\overline{B} = \overline{\alpha B} \subset \overline{B}$ y también $\alpha\overset{\circ}{B} = (\alpha B)^\circ \subset \alpha B \subset B$, de donde se sigue que $\alpha\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}$. Si se supone además que $0 \in \overset{\circ}{B}$, entonces $\alpha\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}$, incluso para $\alpha = 0$.

(f) Sea V un entorno de 0. Sabemos que $\exists W$, entorno de 0, tal que $\overline{W} \subset V$. Como E es acotado, para t grande, tendremos $E \subset tW$. Entonces, $\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$.

■

Necesitaremos el siguiente resultado técnico

Proposición 4.1.11 *Sea $\mathbb{X}$ un EVT. Entonces*

(a) $\forall V$, *entorno de* 0, $\exists U$, *entorno equilibrado de* 0, *tal que* $U \subset V$.

(b) $\forall V$, *entorno convexo de* 0, $\exists U$, *entorno convexo y equilibrado de* 0, *tal que* $U \subset V$.

Demostración.

(a) $V \Rightarrow \exists\delta > 0$ y W, entorno de 0, tales que $\alpha W \subset V$ si $|\alpha| < \delta$. Sea $U = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha W$. Claramente, U es entorno equilibrado de 0 y $U \subset V$.

(b) Sea, ahora V un entorno convexo de 0. Sea $A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha V$. Elegimos W, entorno equilibrado de 0, tal que $W \subset V$. Si $|\alpha| = 1$, $\alpha^{-1}W = W \subset V$, de donde $W \subset \alpha V$ y así, $W \subset A$, de modo que $\overset{\circ}{A}$ es un entorno de 0. Desde luego, $\overset{\circ}{A} \subset V$ y, como A es convexo, $\overset{\circ}{A}$ también será convexo. Queda por ver que $\overset{\circ}{A}$ es equilibrado. Sean $0 \leq r \leq 1$ y $|\beta| = 1$. Entonces $r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha V = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha V \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha V = A$, ya que, al ser αV un convexo que contiene a 0, $r\alpha V \subset \alpha V$.

■

Corolario 4.1.12 ▪ *Todo EVT tiene una base local equilibrada.*

- *Todo EVT localmente convexo tiene una base local convexa y equilibrada.*

En ambos casos los elementos de la base se pueden tomar abiertos.

Teorema 4.1.13 *Sea V un entorno de 0 en el EVT $\mathbb{X}$. Entonces*

(a) Si $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots \to \infty$, se tiene

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

(b) Todo compacto $K \subset \mathbb{X}$ es acotado.

(c) Si $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n \cdots \to 0$ y V es acotado, se sigue que la colección $(\delta_n V)_{n=1}^{\infty}$ es una base local de $\mathbb{X}$.

Demostración.

(a) Sea $x \in \mathbb{X}$. El conjunto $N_x = \{\alpha \in \mathbb{K} \ : \ \alpha x \in V\}$ es un entorno de 0 en $\mathbb{K}$, de manera que, para n grande tendremos $\frac{1}{r_n} \in N_x$, o lo que es lo mismo, $\frac{1}{r_n} x \in V$. Así pues, $x \in r_n V$ para n grande.

(b) Sea U un entorno abierto y equilibrado de 0 tal que $U \subset V$. Por lo que acabamos de ver $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} nU$ y, por ser K compacto, existirán números naturales $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$, tales que

$$K \subset n_1 U \cup n_2 U \cdots \cup n_s U = \ \text{(por ser } U \text{ equilibrado)} \ = n_s U.$$

Si $t > n_s$, entonces $K \subset tU \subset tV$.

(c) Sea U un entorno de 0 en $\mathbb{X}$. Como V se está suponiendo acotado, existirá $s > 0$, tal que $V \subset tU$, $\forall t > s$. Sea n suficientemente grande para que $s\delta_n < 1$. Entonces

$$V \subset \frac{1}{\delta_n} U \Longrightarrow U \supset \delta_n V.$$

∎

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial. Probar las siguientes afirmaciones, donde todos los conjuntos mencionados se supone que son subconjuntos de $\mathbb{X}$.

   (a) $2A \subset A + A$; aunque puede ocurrir que $2A \neq A + A$.

   (b) A es convexo si y sólo si $(s+t)A = sA + tA$ para todos los escalares positivos s y t.

   (c) Toda unión (y también toda intersección) de conjuntos equilibrados es equilibrado.

   (d) Toda intersección de convexos es convexo.

   (e) Si Γ es una colección de conjuntos convexos que está totalmente ordenada por inclusión,

   entonces la unión de todos los miembros de Γ es un convexo.

   (f) Si A y B son convexos, también lo es $A + B$.

   (g) Si A y B son equilibrados, también lo es $A + B$.

   (h) Demostrar que las partes (d), (e) y (f) también se cumplen con subespacios en lugar de convexos

2. La **envolvente convexa** de un conjunto A en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es, por definición el mínimo convexo que contiene a A. Le llamaremos $co(A)$. Demostrar que

$$co(A) = \left\{ t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \,:\, x_j \in A, t_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} t_j = 1\,,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial topológico. Todos los conjuntos mencionados mas abajo se supone que son subconjuntos de $\mathbb{X}$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

   (a) La envolvente convexa de cada abierto es, a su vez, abierta.

   (b) Si $\mathbb{X}$ es localmente convexo, entonces la envolvente convexa de cada conjunto acotado es acotada; pero ésto deja de ser cierto si no hay convexidad local.

   (c) Si A y B son acotados, también lo es $A + B$.

   (d) Si A y B son compactos, también lo es $A + B$.

   (e) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.

   (f) En general, la suma de dos cerrados puede no ser cerrado.

4. Sea $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,:\, |z_1 \leq |z_2|\}$. Demostrar que B es equilibrado pero su interior no lo es.

5. Demostrar que un conjunto E es acotado en un espacio vectorial topológico si y sólo si todo subconjunto numerable de E es acotado.

6. Sea $\mathbb{X}$ un EVT y sea M un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$. Ver que la topología natural del espacio cociente $\mathbb{X}/M$ es una topología vectorial e investigar qué propiedades de $\mathbb{X}$ permanecen al pasar al cociente.

7. Sea $\mathbb{X}$ un EVT y sea $A \subset \mathbb{X}$ un subconjunto cerrado. Demostrar que A es convexo si y sólo si
$$\forall x, y \in A,\ \frac{1}{2}(x+y) \in A.$$

8. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos $e_n(t) = e^{int}$, y consideramos también
$$f_n = e_{-n} + ne_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Todas estas funciones las vemos como elementos del espacio de Hilbert $\mathbb{X} = L^2[-\pi, \pi]$. Sea $\mathbb{X}_1$ el mínimo subespacio cerrado de $\mathbb{X}$ que contiene a los e_n, $n \geq 0$ y sea $\mathbb{X}_2$ el mínimo subespacio cerrado de $\mathbb{X}$ que contiene a los f_n, $n \geq 1$. Demostrar que $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$ es denso en $\mathbb{X}$ pero no es cerrado. Por ejemplo, el vector
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_{-n}$$
pertenece a $\mathbb{X}$ pero no pertenece a $\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2$.

4.2. Aplicaciones lineales

Teorema 4.2.1 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos EVT y sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Supongamos que T es continua en 0. Entonces, T es* **uniformemente continua**, *es decir*

$\forall W$ *entorno de* 0 *en* $\mathbb{Y}, \exists V$ *entorno de* 0 *en* $\mathbb{X} \ni y-x \in V \Rightarrow T(y)-T(x) \in W.$

Demostración. Que $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ sea continua en 0 quiere decir que, dado W entorno de 0 en $\mathbb{Y}$, podemos encontrar V entorno de 0 en $\mathbb{X}$, tal que $T(V) \subset W$. Pero entonces, como T es lineal,

$$y - x \in V \Longrightarrow T(y - x) = T(y) - T(x) \in W.$$

■

Teorema 4.2.2 *Sea $\mathbb{X}$ un EVT y sea $\Lambda : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal distinto del funcional 0. Utilizaremos la notación $\mathcal{N}(\Lambda)$ para designar al núcleo de Λ, es decir, $\mathcal{N}(\Lambda) = \Lambda^{-1}(0)$. Entonces, son equivalentes las siguientes propiedades*

(a) *Λ es continuo.*

(b) *El subespacio $\mathcal{N}(\Lambda)$ es cerrado.*

(c) *El núcleo $\mathcal{N}(\Lambda)$ no es denso en $\mathbb{X}$.*

(d) *Λ es acotado en algún entorno de 0.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) se sigue por ser $\{0\}$ un cerrado.
(b)$\Rightarrow$(c), ya que, por hipótesis $\overline{\mathcal{N}(\Lambda)} \neq \mathbb{X}$.
(c)$\Rightarrow$(d). Sea $x \in \mathbb{X} \setminus \overline{\mathcal{N}(\Lambda)}$. Entonces existirá algun V, entorno de 0 en $\mathbb{X}$, que podemos suponer equilibrado, tal que $(x + V) \cap \mathcal{N}(\Lambda) = \emptyset$. $\Lambda(V)$ será un subconjunto equilibrado del cuerpo $\mathbb{K}$. Esto implica que si $\Lambda(V)$ no fuera acotado, tendría que ser $\Lambda(V) = \mathbb{K}$. Pero esta última posibilidad conduce a una contradicción. En efecto si fuera $\Lambda(V) = \mathbb{K}$, existiría $y \in V$, tal que $\Lambda(y) = -\Lambda(x)$. Pero entonces, $x + y \in \mathcal{N}(\Lambda)$, lo cual está en contradicción con el hecho de que $(x + V) \cap \mathcal{N}(\Lambda) = \emptyset$.
(d)$\Rightarrow$(a). Si suponemos que $|\Lambda(x)| < M \ \forall x \in V$, entorno de 0 en $\mathbb{X}$ y nos dan $r > 0$, tendremos $|\Lambda(x)| < r \ \forall x \in W = (r/M)V$. Así pues, Λ es continuo en 0, y, por lo mismo, continuo.

■

Lema 4.2.3 *Supongamos que $\mathbb{Y}$ es un subespacio vectorial del EVT $\mathbb{X}$ y que $\mathbb{Y}$ es localmente compacto con la topología heredada de $\mathbb{X}$. Entonces $\mathbb{Y}$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$.*

Demostración. Como $\mathbb{Y}$ es localmente compacto, existirán K compacto $\subset \mathbb{Y}$ y U, entorno de 0 en $\mathbb{X}$, tal que $U \cap \mathbb{Y} \subset K$. Sea V un entorno simétrico de 0, que cumpla $\overline{V} + \overline{V} \subset U$. Entonces

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad \mathbb{Y} \cap (x + \overline{V}) \text{ es compacto.} \tag{4.2.4}$$

En efecto. Fijemos $x \in \mathbb{X}$ y también $y_0 \in \mathbb{Y} \cap (x + \overline{V})$. Para todo $y \in \mathbb{Y} \cap (x + \overline{V})$, se tiene que

$$y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \overline{V} + \overline{V} \subset U$$

y además, $y - y_0 \in \mathbb{Y}$, ya que $\mathbb{Y}$ es un subespacio vectorial. Así pues, $y - y_0 \in U \cap \mathbb{Y} \subset K$. Se sigue que

$$\mathbb{Y} \cap (x + \overline{V}) \subset y_0 + K;$$

pero $y_0 + K$ es un compacto de $\mathbb{Y}$ y el conjunto $\mathbb{Y} \cap (x + \overline{V})$ es cerrado en $\mathbb{Y}$. Como subconjunto cerrado de un compacto será compacto, lo que termina la demostración de 4.2.4.

Ahora pasamos a demostrar que $\mathbb{Y}$ es cerrado. Sea $x \in \overline{\mathbb{Y}}$. Utilizaremos la base local

$$\mathcal{B} = \{W \text{ abierto de } \mathbb{X} \ni 0 \in W \subset V\}.$$

Para cada $W \in \mathcal{B}$, sea $E_W = \mathbb{Y} \cap (x + W)$. Como $W \subset V$, cada E_W es compacto. Como $x \in \overline{\mathbb{Y}}$, ningún E_W es vacío. Así tenemos una familia de compactos $\{E_W : W \in \mathcal{B}\}$ que, claramente, tiene la propiedad de que cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía. Se sigue, entonces, que $\bigcap_{W \in \mathcal{B}} E_W \neq \emptyset$. Ahora

$$z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} E_W \Longrightarrow z \in \mathbb{Y} \text{ y } z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} (x + \overline{W}) = \{x\}.$$

Así queda demostrado que $x \in \mathbb{Y}$ y, en definitiva, que $\mathbb{Y}$ es cerrado.

■

Teorema 4.2.5 *Sea $\mathbb{X}$ un EVT sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. y sea $\mathbb{Y}$ un subespacio vectorial de dimensión finita (llamémosle n) de $\mathbb{X}$. Entonces*

(a) Todo isomorfismo lineal $\Phi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{Y}$ es un homeomorfismo.

(b) $\mathbb{Y}$ es cerrado.

Demostración. Antes que nada observamos que (b) es consecuencia de (a) y del lema 4.2.3, ya que $\mathbb{K}^n$ es siempre localmente compacto. Nos concentramos en demostrar (a). Lo hacemos por inducción sobre n.

Para $n = 1$. tendremos $\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(1) = \alpha u$, si llamamos u a $\Phi(1) \in \mathbb{Y}$. La continuidad de la multiplicación por escalares nos da inmediatamente que Φ es continua. Su inversa $\Phi^{-1} = \Lambda$ es un funcional lineal biyectivo al cual se puede aplicar el criterio de continuidad del teorema 4.2.2. Como $\Lambda^{-1}(0) =$

$\{0\}$, que es cerrado, resulta que Λ es continua y así queda visto que Φ es un homeomorfismo.

Si suponemos (a) cierto para una determinada dimensión n, veamos cómo podemos extender el resultado a dimensión $n+1$. Sea $\mathbb{Y}$ un subespacio de $\mathbb{X}$ de dimensión $n+1$ y sea $\Phi : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Y}$ un isomorfismo lineal. Si los vectores de la base canónica de $\mathbb{K}^{n+1}$ tienen como imágenes respectivas $u_1, \cdots, u_{n+1}$, será

$$\Phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n+1} u_{n+1}.$$

De nuevo basta apelar a la continuidad de las operaciones del espacio vectorial para concluir que Φ es continua. Su inversa la escribimos como

$$\Phi^{-1}(y) = (\Lambda_1(y), \cdots, \Lambda_{n+1}(y)),$$

donde $y = \Lambda_1(y)u_1 + \cdots + \Lambda_{n+1}(y)u_{n+1}$. Todo lo que hemos de ver es que cada uno de los funcionales lineales Λ_j es continuo. Para ello utilizamos el criterio del teorema 4.2.2. Pero el núcleo del funcional Λ_j es el subespacio vectorial engendrado por los n vectores que resultan de quitar u_j a la base $\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$. Ahora bien, por la hipótesis de inducción, todos estos espacios $n-$dimensionales son cerrados. Así resulta que Φ es homeomorfismo.

■

Tenemos la siguiente extensión del teorema de F. Riesz.

Teorema 4.2.6 *Sea $\mathbb{X}$ un EVT localmente compacto. Entonces $\mathbb{X}$ es de dimensión finita.*

Demostración. Estamos suponiendo que existe un entorno V de 0, tal que $\overline{V}$ es compacto. Se sigue que V es acotado y, de acuerdo con la parte (c) del teorema 4.1.13, $\{2^{-n}V\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local. Como $\overline{V}$ es compacto, tendremos

$$\overline{V} \subset (x_1 + \frac{1}{2}V) \cup \cdots \cup (x_m + \frac{1}{2}V)$$

para ciertos vectores $x_1, \cdots, x_m$. Sea $\mathbb{Y} = [x_1, \cdots, x_m]$, que, por ser de dimensión finita, será un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{X}$.

$$V \subset \mathbb{Y} + \frac{1}{2}V \Longrightarrow \frac{1}{2}V \subset \mathbb{Y} + \frac{1}{4}V.$$

Pero, entonces

$$V \subset \mathbb{Y} + \frac{1}{2}V \subset \mathbb{Y} + \mathbb{Y} + \frac{1}{4}V = \mathbb{Y} + \frac{1}{4}V.$$

Así podemos establecer que

$$V \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{Y} + 2^{-n}V) = \overline{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y}.$$

Multiplicando por escalares y usando el apartado (a) del teorema 4.1.13, resulta $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, como queríamos demostrar.

■

Corolario 4.2.7 *Si $\mathbb{X}$ es un EVT localmente acotado y que cumple la propiedad de Heine-Borel, entonces $\mathbb{X}$ tiene dimensión finita.*

Demostración. Por hipótesis, existe V, entorno acotado de 0; pero, entonces, $\overline{V}$ será un entorno cerrado y acotado de 0. La propiedad de Heine-Borel implica que $\overline{V}$ será compacto y, de ahí, por el teorema 4.2.6, $\mathbb{X}$ será de dimensión finita.

$\blacksquare$

Ejercicios

1. Supongamos que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios vectoriales topológicos, que $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ es lineal, que M es un subespacio cerrado de $\mathbb{X}$ tal que $T(x) = 0$ para todo $x \in M$. Llamemos $\pi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}/M$ a la aplicación cociente. Demostrar que existe una única $f : \mathbb{X}/M \longrightarrow \mathbb{Y}$ que satisface $T = f \circ \pi$. Probar que esta f es lineal y que T es continua si y sólo si f es continua. Ver también que T es abierta si y sólo si f es abierta.

2. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios vectoriales topológicos, y $\dim(\mathbb{Y}) < \infty$. Sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ lineal, tal que $T(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$.

   (a) Demostrar que T es una aplicación abierta.

   (b) Suponer, además, que el núcleo de T es cerrado y demostrar que, entonces, T es continua.

4.3. Espacios metrizables

Teorema 4.3.1 *Si $\mathbb{X}$ es un EVT con una base local numerable, entonces existe una distancia $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(a) d determina la topología de $\mathbb{X}$.

(b) Las bolas abiertas centradas en 0 son equilibradas y

(c) d es invariante.

Si además $\mathbb{X}$ es localmente convexo, entonces existe d con las tres propiedades ya reseñadas (a), (b) y (c) mas la propiedad adicional que sigue

(d) Las bolas son convexas.

Demostración. Partimos de una base local equilibrada $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.2}$$

Suponemos que los V_n son abiertos y, si $\mathbb{X}$ es localmente convexo, tomamos los V_n convexos. Utilizaremos el conjunto $\mathcal{D}$ de los números racionales diádicos de $[0,1]$, es decir, aquellos $r \in \mathbb{Q}$ de la forma

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n} \quad \ni c_n(r) = 0 \text{ o } 1$$

y sólo un número finito de $c_n's$ no se anulan. Para cualquier número real $t \geq 1$, definimos $S(t) = \mathbb{X}$ y para $r \in \mathcal{D}$, definimos

$$S(r) = c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + \cdots .$$

Consideramos después la función

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{X} & \xrightarrow{\varphi} & [0,\infty[\\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \inf\{r \geq 0 : x \in S(r)\} \end{array}$$

y, a partir de ella definimos $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow [0,\infty[$ mediante $d(x,y) = \varphi(x-y)$. Que d es una distancia con las propiedades requeridas se seguirá de la inclusión

$$S(r) + S(s) \subset S(r+s), \tag{4.3.3}$$

cuya justificación postponemos hasta el final de la demostración. Ahora nos concentramos en obtener las propiedades de d suponiendo (4.3.3).

Si $0 \leq r < t$, tendremos, a partir de 4.3.3 y del hecho obvio de que todos los $S(u)$ contienen a 0

$$S(r) \subset S(r) + S(t-r) \subset S(t).$$

Así vemos que la familia $\{S(r)\}_r$ es mnótona creciente. A partir de aquí vamos a ver que

$$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \ \forall x, y \in \mathbb{X}. \tag{4.3.4}$$

En efecto. Fijamos $x, y \in \mathbb{X}$. Podemos suponer que el segundo miembro de 4.3.4 es estrictamente menor que 1, pues en otro caso no habría nada que demostrar. Por la definición de φ, dado $\varepsilon > 0$, existirán $r, s \in \mathcal{D}$, tales que

$$\varphi(x) < r\,,\ \varphi(y) < s \text{ y } r + s < \varphi(x) + \varphi(y) + \varepsilon.$$

Entonces, $x \in S(r),\ y \in S(s)$ y, en virtud de 4.3.3 $x + y \in S(r + s)$, de donde resulta

$$\varphi(x+y) \leq r + s < \varphi(x) + \varphi(y) + \varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ se completa la demostración de 4.3.4. A partir de 4.3.4 se obtiene inmediatamente la propiedad triangular de d

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in \mathbb{X}.$$

Como cada $S(r)$ es equilibrado, se tiene $\varphi(x) = \varphi(-x) \ \forall x \in \mathbb{X}$, y así resulta la propiedad simétrica de d

$$d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Por otro lado, es claro que $\varphi(0) = 0$, y por ello $d(x, x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{X}$. Finalmente, si $x \neq 0$, entonces, para algún n, $x \notin V_n = S(2^{-n})$. Entonces $\varphi(x) \geq 2^{-n} > 0$. Esto implica que $d(x, y) = 0$ sólo si $x = y$. Hemos visto que d es una distancia y, por la manera en que ha sido definida es, desde luego, invariante.

Las bola abiertas de centro 0 son

$$\mathbf{B}(0, \delta) = \{x \in \mathbb{X} \,:\, \varphi(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} S(r).$$

Si $\delta < 2^{-n}$, $\mathbf{B}(0, \delta) \subset S(2^{-n}) = V_n$. De esta forma queda claro que las bolas abiertas de centro 0 forman una base local para la topología de $\mathbb{X}$, con lo cual tenemos demostrado (a). Como cada $S(r)$ es un conjunto equilibrado, también lo será $\mathbf{B}(0, \delta)$. Si cada V_n es convexo, también lo será cada $S(r)$ y, a partir de ahí, es inmediato ver que cada $\mathbf{B}(0, \delta)$ es, igualmente, un conjunto convexo.

Sólo queda por verificar (4.3.3). Lo hacemos por inducción. Dado $N \in \mathbb{N}$, llamamos P_N a la siguiente propiedad

$$(r + s < 1) \wedge (c_n(r) = c_n(s) = 0 \ \forall n > N) \Longrightarrow (S(r) + S(s) \subset S(r + s)).$$

P_1 es trivialmente cierta, ya que se reduce a $S(1/2) + S(0) \subset S(1/2)$ y $S(1/2) = \{0\}$. Ahora suponemos cierta P_N y queremos demostrar P_{N+1}. Sean $r, s \in \mathcal{D}$, tales que $r + s < 1$ y $c_n(r) = c_n(s) = 0 \ \forall n > N + 1$. Escribamos $r = r_0 +$

$c_{N+1}(r)2^{-N-1}$ y $s = s_0 + c_{N+1}(s)2^{-N-1}$. Entonces $S(r) = S(r_0) + c_{N+1}(r)V_{N+1}$ y $S(s) = S(s_0) + c_{N+1}(s)V_{N+1}$. Como estamos suponiendo que se verifica P_N, tendremos $S(r_0) + S(s_0) \subset S(r_0 + s_0)$. Por lo tanto

$$S(r) + S(s) \subset S(r_0 + s_0) + c_{N+1}(r)V_{N+1} + c_{N+1}(s)V_{N+1}.$$

Si $C_{N+1}(r) = c_{N+1}(s) = 0$, entonces, $r_0 = r$ y $s_0 = s$ y no hay nada que demostrar. Si $C_{N+1}(r) = 0$ y $c_{N+1}(s) = 1$, entonces

$$S(r) + S(s) \subset S(r_0 + s_0) + V_{N+1} = S(r_0 + s_0 + 2^{-N-1}) = S(r + s).$$

Si $C_{N+1}(r) = 1$ y $c_{N+1}(s) = 0$, la situación es la misma, con los papeles de r y s intercambiados. Finalmente si $C_{N+1}(r) = c_{N+1}(s) = 1$,

$$\begin{aligned} S(r) + S(s) \subset S(r_0 + s_0) + V_{N+1} + V_{N+1} &\subset S(r_0 + s_0) + V_N \\ = S(r_0 + s_0) + S(2^{-N}) &\subset S(r_0 + s_0 + 2^{-N}) = S(r + s), \end{aligned}$$

donde hemos vuelto a usar P_N para la última inclusión y la hipótesis (4.3.2) sobre los V_n para la penúltima.

■

Hasta ahora hemos manejado muchas veces sucesiones de Cauchy es espacios métricos, de forma que el concepto de sucesión de Cauchy en este contexto es totalmente familiar para nosotros. Se trata de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumplan la condición de Cauchy, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0.$$

Por otro lado, tiene perfecto sentido hablar de sucesiones de Cauchy en un EVT $\mathbb{X}$, aunque la topología de $\mathbb{X}$ no provenga de una métrica. Se dice que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de $\mathbb{X}$ es de Cauchy si

$$\forall V \text{ entorno de } 0 \text{ en } \mathbb{X}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ x_n - x_m \in V \ \forall n, m \geq n_0.$$

Desde luego, basta tomar los entornos de una base local. Si la topología de $\mathbb{X}$ proviene de una métrica d, las dos nociones de sucesión de Cauchy no tienen porqué coincidir. Sin embargo, cuando la métrica es invariante, necesariamente coinciden. En efecto, si d es una distancia invariante que determina la topología del EVT $\mathbb{X}$, las bolas abiertas centradas en 0 forman una base local y

$$x_n - x_m \in \mathbf{B}(0, \varepsilon) \Longleftrightarrow d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0) < \varepsilon.$$

La consecuencia es que

Teorema 4.3.5 *Si d_1 y d_2 son dos métricas invariantes en un espacio vectorial $\mathbb{X}$, que inducen sobre él la misma topología, entonces* *(a) d_1 y d_2 tienen las mismas sucesiones de Cauchy.*

(b) d_1 es completa si y sólo si d_2 es completa

Teorema 4.3.6 *(a) Si d es una métrica invariante en un espacio vectorial $\mathbb{X}$, entonces*

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{X} \ \ y \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Si $x_n \in \mathbb{X}$, EVT metrizable y si $x_n \to 0$ para $n \to \infty$, entonces existen $\gamma_n \in \mathbb{R}$, tales que $\gamma_n \to \infty$ y $\gamma_n x_n \to 0$ para $n \to \infty$.

Demostración.

(a) $d(nx, 0) \leq \sum_{k=1}^{n} d(kx, (k-1)x = nd(x, 0)$.

(b) El teorema de metrización 4.3.1 nos asegura que podemos tomar d invariante. Sabemos que $d(x_n, 0) \to 0$ para $n \to \infty$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existirá $n_k \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_k$, $d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}$. Definimos $\gamma_n = 1$ si $n < n_1$ y $\gamma_n = k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$. Para estos números tenemos, si $n_k \leq n < n_{k+1}$.

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(k x_n, 0) \leq k d(x_n, 0) < \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Así pues, $\gamma_n x_n \to 0$ para $n \to \infty$.

■

Si $\mathbb{X}$ es un EVT y d es una métrica compatible con la topología, los conjuntos acotados de $\mathbb{X}$ (definición 4.1.4) no tienen por qué coincidir con los conjuntos $d-$acotados, o sea, los que están contenidos en alguna bola asociada a d. Por ejemplo, para cualquier distancia d, si se define $d_1 = \frac{d}{1+d}$, resulta una nueva distancia d_1, que da la misma topología y para la que todos los conjuntos, incluso el total $\mathbb{X}$, son d_1-acotados.

Vimos que los compactos son siempre acotados (parte (b) del teorema 4.1.13) y ahora necesitamos observar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces el conjunto $S = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. En efecto, dado W, entorno equilibrado de 0, sea V otro entorno equilibrado de 0 tal que $V + V \subset W$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq N$, $x_n \in x_N + V$. También sabemos (parte (a) del teorema 4.1.13) que podemos encontrar $s > 1$ para el que $x_1, x_2, \cdots, x_N \in sV$. Entonces también $\forall n \geq n$,

$$x_n \in sV + V \subset sV + sV \subset sW,$$

con lo que queda visto que S es acotado.

Otra observación pertinente en este momento es que si $x \neq 0$, el conjunto $E = \{nx \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado. En efecto, podemos tomar V, entorno de 0, tal que $x \notin V$. Entonces $nx \notin nV$, de forma que E no es acotado. Como consecuencia de ésto, el único subespacio vectorial acotado es el $\{0\}$.

Tenemos la siguiente caracterización útil de los conjuntos acotados

Teorema 4.3.7 *Las siguientes propiedades de un subconjunto E de un EVT son equivalentes*

(a) E es acotado.

(b) Para toda sucesión $x_n \in E$ y toda sucesión de escalares $\alpha_n \to 0$, se sigue que $\alpha_n x_n \to 0$ para $n \to \infty$.

Demostración. (a)⇒(b) Sea V un entorno equilibrado de 0. Entonces $E \subset tV$ para algún $t > 0$. Existirá $N \in \mathbb{N}$, tal que $|\alpha_n|t < 1$ para cada $n > N$. Pero, entonces, si $n > N$, resulta

$$\alpha_n x_n = \alpha_n t \frac{x_n}{t} \in V,$$

ya que $\frac{x_n}{t} \in V$ y $|\alpha_n t| < 1$, siendo V equilibrado.
(b)⇒(a) Si E no fuera acotado, existiría V, entorno de 0, y una sucesión de números positivos $r_n \to \infty$, de modo que $E \not\subset r_n V$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos elegir para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E \ni x_n \notin r_n V$. Tenemos entonces $r_n^{-1} x_n \notin V$, de modo que $r_n^{-1} x_n \not\to 0$, lo cual está en contradicción con (b).

■

Teorema 4.3.8 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios vectoriales topológicos y sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Consideramos las siguientes propiedades*

(a) T es continua.

(b) T es acotada (es decir, transforma cada conjunto acotado en un conjunto acotado).

(c) $x_n \to 0$ para $n \to \infty \Rightarrow \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto acotado.

(d) $x_n \to 0$ para $n \to \infty \Rightarrow T(x_n) \to 0$ para $n \to \infty$.

Demostraremos que, siempre, (a)⇒(b)⇒(c). Si además, $\mathbb{X}$ es metrizable, también tenemos que (c)⇒(d)⇒(a), de modo que, en este último caso, las cuatro propiedades (a), (b), (c) y (d) son equivalentes.

Demostración. (a)⇒(b). Sea E acotado $\subset \mathbb{X}$. Queremos ver que $T(E)$ es acotado. Para ello tomamos W, entorno de 0 en $\mathbb{Y}$. Como T es continua y $T(0) = 0$, existirá V, entorno de 0 en $\mathbb{X}$, tal que $T(V) \subset W$. Puesto que E es acotado, será $E \subset tV$ para t grande. Entonces $T(E) \subset T(tV) = tT(V) \subset tW$. Queda así visto que $T(E)$ es acotado y hemos probado (b).

(b)⇒(c), ya que toda sucesión convergente es acotada.

A partir de ahora suponemos que $\mathbb{X}$ es metrizable.

(c)⇒(d). Sabemos que $\exists \gamma_n \to \infty \ni \gamma_n x_n \to 0$. Por lo tanto, $\{T(\gamma_n x_n)\}$ es un conjunto acotado de $\mathbb{Y}$. Se sigue que $T(x_n) = \frac{1}{\gamma_n} T(\gamma_n x_n) \to 0$ para $n \to \infty$.

Veamos, finalmente, que (d)⇒(a) . Si (a) no fuera cierta, existiría W, entorno de 0 en $\mathbb{Y}$, tal que $T^{-1}(W)$ no contiene ningún entorno de 0 de $\mathbb{X}$. Esto nos permite encontrar $x_n \to 0$ en $\mathbb{X}$, de modo que $T(x_n) \notin W$, lo cual contradice (d).

■

Los ejemplos más sencillos de espacios vectoriales topológicos que son metrizables pero no son normables son los espacios L^p para $0 < p < 1$. Vamos a examinarlos brevemente. Dado $0 < p < 1$, consideramos

$$\mathcal{L}^p = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medibles } \ni \delta_p(f) = \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

Es inmediato que δ_p cumple la siguiente desigualdad triangular

$$\delta_p(f+g) \leq \delta_p(f) + \delta_p(g), \tag{4.3.9}$$

a partir de la cual se sigue que $\mathcal{L}^p$ es un espacio vectorial complejo. Si ahora definimos para $f, g \in \mathcal{L}^p$

$$d(f,g) = \delta_p(f-g),$$

se sigue de (4.3.9) que d cumple la siguiente desigualdad triangular

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$$

Como, desde luego, d es simétrica por el modo en que ha sido definida $(d(f,g) = d(g,f))$, vemos que lo único que impide que d sea una distancia es que del hecho de ser $d(f,g) = 0$, no se puede concluir que f y g coincidan. Tan sólo se sigue que coinciden en casi todo punto. La situación es similar a la que ya conocemos para los espacios de Lebesgue correspondientes a exponentes ≥ 1 y se resuelve de la misma manera. Se considera el conjunto $M = \{f \in \mathcal{L}^p \ : \ \delta_p(f) = 0\}$, que es, claramente, un subespacio vectorial, y se define el espacio vectorial cociente $L^p = \mathcal{L}^p/M$. Tanto δ_p como d se pueden definir para las clases de equivalencia que forman L^p. Entonces d es una verdadera métrica sobre L^p y se comprueba exactamente igual que en el caso $p \geq 1$, que L^p es un espacio métrico completo. Las bolas $\mathbf{B}_r = \{f \in L^p : \delta_p(f) < r\}$ para $r > 0$, forman una base local. Como $B_1 = r^{-1/p} B_r$, es claro que B_1 es acotado. Así pues, podemos afirmar que

Proposición 4.3.10 *Para todo $p > 0$, L^p es un espacio de tipo F localmente acotado.*

Sin embargo, vamos a ver que para que L^p sea localmente convexo, es necesario que sea $p \geq 1$. De hecho, vamos a ver algo mucho más fuerte.

Proposición 4.3.11 *Si $0 < p < 1$, los únicos convexos abiertos de L^p son $\emptyset$ y L^p.*

Demostración. Sea $V \neq \emptyset$ un abierto convexo de L^p. Vamos a ver que $V = L^p$. Trasladando, si fuera preciso, suponemos que $0 \in V$. Entonces $V \supset \mathbf{B}_r$ para algún $r > 0$. Sea $f \in L^p$. Como $p < 1$, podemos afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n^{p-1}\delta_p(f) < r$. Podemos encontrar puntos $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ que dividen el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$, para cada uno de los cuales se cumple que

$$\int_{\Delta_j} |f(x)|^p dx = \frac{\delta_p(f)}{n}.$$

Consideramos ahora las funciones $g_j(x) = nf(x)\chi_{\Delta_j}(x)$, $1 \leq j \leq n$. Vemos que $\forall 1 \leq j \leq n$, $g_j \in V$, ya que $\delta_p(g_j) = n^p \frac{\delta_p(f)}{n} < r$, de forma que $g_j \in \mathbf{B}_r \subset V$. Como V es convexo y $f = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n)$, se sigue que $f \in V$. Por consiguiente, queda demostrado que $V = L^p$.

■

Corolario 4.3.12 *Para cada* $p \ni 0 < p < 1$, L^p *no es localmente convexo y, por lo tanto, tampoco es normable.*

Corolario 4.3.13 *Para cada* $p \ni 0 < p < 1$, *el único funcional lineal y continuo sobre* L^p *es el funcional* 0, *lo cual podemos abreviar escribiendo* $(L^p)^\star = 0$.

Demostración. Sea $\Lambda : L^p \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y continuo. Pongamos $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Para cada $r > 0$, el disco $\mathbf{D}_r$ es convexo. Como Λ es lineal, $\Lambda^{-1}(\mathbf{D}_r)$ es un convexo que, además será abierto por ser Λ continua. Si $0 < p < 1$, se sige de la proposición 4.3.11 que $\Lambda^{-1}(\mathbf{D}_r) = L^p$. Entonces, para cada $f \in L^p$, se tiene $\Lambda(f) < r$ $\forall r > 0$. Queda así claro que $\Lambda \equiv 0$.

■

Ejercicios

1. Sean $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = |\phi(x)-\phi(y)|$, donde $\phi(x) = x/(1+|x|)$. Demostrar que d_1 y d_2 son dos distancias en $\mathbb{R}$ que inducen la misma topología, aunque d_1 es completa y d_2 no es completa. ¿No está ésto en contradicción con la parte (b) del teorema 4.3.5?

2. Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico con distancia d. Si se define $d_1 = \frac{d}{1+d}$, ver que se obtiene una nueva distancia d_1, que da la misma topología y para la que todos los conjuntos, incluso el total $\mathbb{X}$, son d_1-acotados. ¿Como se relacionan la completitud de d y la de d_1?

3. Demostrar la desigualdad triangular (4.3.9) y ver que, también para $0 < p < 1$, L^p es completo.

4. Si N es un subespacio vectorial de un espacio vectorial $\mathbb{X}$, la **codimensión** de N en $\mathbb{X}$ es, por definición, la dimensión del espacio cociente $\mathbb{X}/N$.

   Sea $0 < p < 1$. Demostrar que todo subespacio de codimensión finita es denso en L^p.

4.4. Espacios localmente convexos

Definición 4.4.1 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.*

- *Llamaremos* **seminorma** *en $\mathbb{X}$, a cualquier aplicación $p : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla las dos condiciones siguientes*

  (a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in \mathbb{X}$.

  (b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\ \forall x \in \mathbb{X},\ y\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

- *Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en $\mathbb{X}$. Diremos que $\mathcal{P}$ es una* **familia separante de seminormas** *en $\mathbb{X}$ si*

$$\forall x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}\ \exists p \in \mathcal{P} \ \ni p(x) \neq 0.$$

- *Sea A convexo $\subset \mathbb{X}$. Supongamos, además, que A es* **absorbente**, *lo cual quiere decir, simplemente que*

$$\forall x \in \mathbb{X},\ \exists t > 0 \ \ni \ x \in tA$$

  (por ejemplo, vimos en la parte (a) del teorema 4.1.13 que todo entorno de 0 es absorbente). Al conjunto A le asociaremos una aplicación
  $\mu_A : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty[$, a la que llamaremos **funcional de Minkowski** *de A, que estará dada, por definición, por la fórmula*

$$\mu_A(x) = \operatorname{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in A\}.$$

  Es justamente para garantizar que $\mu_A(x)$ sea siempre un número bien definido, para lo que se necesita pedir que A sea absorbente.

Teorema 4.4.2 *Sea p una seminorma en el espacio vectorial $\mathbb{X}$. Entonces se cumplen las propiedades siguientes*

(a) $p(0) = 0$.

(b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)\ \forall x, y \in \mathbb{X}$.

(c) $p(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{X}$.

(d) $\{x \in \mathbb{X} : p(x) = 0\}$ *es un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$.*

(e) El conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : p(x) < 1\}$ es convexo, equilibrado y absorbente y $p = \mu_B$.

Demostración. (a) y (b) resultan inmediatamente de la definición de seminorma. (c) se sigue de (b) tomando $y = 0$.

Veamos (d). Sean $x, y \in \mathbb{X} \ni p(x) = p(y) = 0$ y$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0,$$

lo que prueba (d).

Pasamos a ver que (e) es cierta. Primero vemos que B es equilibrado. En efecto, sean $x \in B$ y $|\alpha| \leq 1$. Entonces $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < 1$, de modo que $\alpha x \in B$ y así queda demostrado que B es equilibrado. Vemos a continuación que B es convexo. Para ello suponemos $x, y \in B$ y tomamos un $t \ni 0 < t < 1$. Resulta $p((1-t)x + ty) \leq (1-t)p(x) + tp(y) < 1$, con lo que $(1-t)x + ty \in B$ y queda probada la convexidad. Ahora llega el momento de ver que B es absorbente. Partimos de un cierto $x \in \mathbb{X}$. Elegimos $s > p(x)$ y tenemos $p(s^{-1}x) < 1$, es decir, $s^{-1}x \in B$ o, en otras palabras, $x \in sB$. Esto demuestra que B es absorbente. Por otro lado, una vez que hemos llegado a $s^{-1}x \in B$, tenemos $\mu_B(x) \leq s$, y como esto ocurre para todo $s > p(x)$, obtenemos que $\mu_B \leq p$. Para ver la desigualdad en sentido contrario, partimos de $0 < t \leq p(x)$, de donde se sigue $p(t^{-1}x) \geq 1$, que nos permite afirmar que $t^{-1}x \notin B$. De aquí deducimos que $\mu_B(x) \geq p(x)$. Esto completa la demostración de que $p = \mu_b$, y por lo mismo, la de (e) y la del teorema.

■

Teorema 4.4.3 *Supongamos que A es un convexo absorbente del espacio vectorial $\mathbb{X}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Entonces*

(a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)\ \forall x, y \in \mathbb{X}$.

(b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)\ \forall x \in \mathbb{X}$ *y*$\forall t \geq 0$.

(c) Si, además A es equilibrado, entonces μ_A es una seminorma.

(d) Si $B = \{x \in \mathbb{X} : \mu_A(x) < 1\}$ *y* $C = \{x \in \mathbb{X} : \mu_A(x) \leq 1\}$, *entonces* $B \subset A \subset C$ *y* $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{X}$, definimos

$$S_A(x) = \{t > 0 : t^{-1}x \in A\}.$$

Como A es absorbente, tenemos que, necesariamente, $0 \in A$. Además, como A es convexo, resulta que

$$t \in S_A(x)\ \wedge\ s > t \Longrightarrow s^{-1}x = \left(1 - \frac{t}{s}\right) 0 + \frac{t}{s} t^{-1}x \in A \Longrightarrow s \in S_A(x).$$

Vemos, de este modo, que $S_A(x)$ es una semirrecta, cuyo extremo inferior es $\mu_A(x)$.

Comenzamos a demostrar (a). Sean $\mu_A(x) < s$ y $\mu_A(y) < t$ y escribamos $u = s + t$. Entonces, como $s^{-1}x \in A$ y $t^{-1}x \in A$, teniendo en cuenta que A es convexo y que $s/u + t/u = 1$, resulta que

$$u^{-1}(x+y) = \frac{s}{u}(s^{-1}x) + \frac{t}{u}(t^{-1}y) \in A,$$

de modo que $\mu_A(x+y) \leq s+t$ y esto demuestra (a). Ahora (b) y (c) son obvios. Pasamos, pues, a la demostración de (d). Si $\mu_A(x) < 1$, entonces $1 \in S_A(x)$ y así $x \in A$. Hemos probado de este modo que $B \subset A$. Por otro lado, si $x \in A$, tenemos $\mu_A(x) \leq 1$, es decir, $x \in C$. Así es que tenemos ya $B \subset A \subset C$. Esto implica que $S_B(x) \subset S_A(x) \subset S_C(x)$ $\forall x \in \mathbb{X}$, de forma que $\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ $\forall x \in \mathbb{X}$. Veamos, para terminar, que estas tres funciones son idénticas. Supongamos que $\mu_C(x) < s < t$. Entonces $s^{-1}x \in C$, de modo que $\mu_A(s^{-1}x) \leq 1$ y así

$$\mu_A(t^{-1}x) = \mu_A(t^{-1}ss^{-1}x) = \frac{s}{t}\mu_A(s^{-1}x) \leq \frac{s}{t} < 1.$$

Resulta que $t^{-1}x \in B$ y por ello, $\mu_B(t^{-1}x) \leq 1$, es decir, $\mu_B(x) \leq t$. Queda demostrado que $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$ y ésto completa la demostración.

■

Teorema 4.4.4 *Sea $\mathcal{B}$ una base local abierta convexa y equilibrada de un EVT $\mathbb{X}$. Asociamos a cada $V \in \mathcal{B}$ su funcional de Minkowski μ_V. Entonces $\{\mu_V\}_{V\in\mathcal{B}}$ es una familia separante de seminormas continuas en $\mathbb{X}$.*

Demostración. Puesto que cada V es convexo, equilibrado y absorbente, cada μ_V es una seminorma. Si $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, entonces $x \notin V$, para algún $V \in \mathcal{B}$. Para este V, será $\mu_V(x) \geq 1$. Así queda visto que $\{\mu_V\}_{V\in\mathcal{B}}$ es una familia separante. Queda por establecer la continuidad de las μ_V. Si $x \in V \in \mathcal{B}$, entonces $tx \in V$ para algún $t > 1$, pues V es abierto. Se sigue que $\mu_V < 1$ en V. Si $r > 0$, y $x - y \in rV$, se tiene $|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x-y) < r$. Esto prueba la continuidad de μ_V.

■

Teorema 4.4.5 *Supongamos que $\mathcal{P}$ es una familia separante de seminormas en el espacio vectorial $\mathbb{X}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Asociamos a cada $p \in \mathcal{P}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto*

$$V(p,n) = \{x \in \mathbb{X} \ : \ p(x) < \frac{1}{n}\}. \tag{4.4.6}$$

Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la familia (4.4.6). Entonces $\mathcal{B}$ es una base local abierta convexa y equilibrada para una topología $\mathcal{T}$ ex $\mathbb{X}$, que convierte a $\mathbb{X}$ en un EVT localmente convexo, tal que *(a) Toda $p \in \mathcal{P}$ es continua y*

(b) $E \subset \mathbb{X}$ es acotado si y sólo si para cada $p \in \mathcal{P}$, $p(E)$ es un conjunto acotado de números.

Demostración. Declaramos $A \subset \mathbb{X}$ abierto si y sólo si A es unión de trasladados de miembros de $\mathcal{B}$. Así tenemos, claramente, una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{X}$, que es invariante por traslaciones. Cada miembro de $\mathcal{B}$ es abierto, convexo y equilibrado y $\mathcal{B}$ es una base local para $\mathcal{T}$. Supongamos que $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$. Entonces $p(x) > 0$ para algún $p \in \mathcal{P}$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$, tal que $np(x) > 1$ y así tenemos que $x \notin V(p,n)$, de modo que $0 \notin x - V(p,n)$ y, por consiguiente, $x \notin \overline{\{0\}}$. Queda visto que $\{0\}$ es un conjunto cerrado y, como $\mathcal{T}$ es invariante por traslación, cada punto de $\mathbb{X}$ es un cerrado.

Vamos a demostrar a continuación la continuidad de las operaciones. Comenzamos con la suma. Sea U un entorno de 0. Entonces

$$U \supset V(p_1,n_1) \cap \cdots \cap V(p_m,n_m). \tag{4.4.7}$$

Pongamos $V = V(p_1,2n_1) \cap \cdots \cap V(p_m,2n_m)$. Como cada p_j es subaditiva ó, en otras palabras, satisface la desigualdad triangular, obtenemos inmediatamente $V + V \subset U$. Esto prueba la continuidad de la suma.

Examinamos ahora la multiplicación por escalares. Sean $x \in \mathbb{X}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Tomemos U y V como antes. Entonces $x \in sV$ para algún $s > 0$. Ponemos $t = \frac{s}{1+|\alpha|s}$. Si $y \in x + tV$ y $|\beta - \alpha| < 1/s$, entonces

$$\beta y - \alpha x = \beta(y-x) + (\beta - \alpha)x \in |\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subset V + V \subset U,$$

por ser $|\beta|t \leq 1$ y v equilibrado. Esto prueba la continuidad de la multiplicación por escalares.

Así tenemos que $\mathbb{X}$ es un EVT localmente convexo. La definición de $V(p,n)$ nos dice que cada $p \in \mathcal{P}$ es continua en 0 ($p(x) < 1/n$ si $x \in V(p,n)$). Pero $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ nos dice que p es continua en todo punto.

Finalmente probamos (b). Supongamos $E \subset \mathbb{X}$ acotado. Fijamos $p \in \mathcal{P}$. Como $V(p,1)$ es un entorno de 0, $E \subset kV(p,1)$ para k suficientemente grande. Así $p(x) < k$ $\forall x \in E$. Se sigue que cada $p \in \mathcal{P}$ está acotada sobre E. Recíprocamente si suponemos que E es un conjunto sobre el que cada $p \in \mathcal{P}$ está acotada, veamos que E es un conjunto acotado. Sea U un entorno del 0. Se cumplirá (4.4.7). Pero para cada $j = 1, \cdots, m$, $p_j < M_j$ sbre E. Si $n > M_j n_j$ para todo $1 \leq j \leq m$, se sigue que $E \subset nU$. Queda visto que E es acotado.

■

Observaciones

(a) En la demostración del teorema es necesario tomar intersecciones finitas de los $V(p,n)$. Estos conjuntos $V(p,n)$ por si solos, antes de hacer las intersecciones finitas, no tienen por qué formar una base, sino una subbase. Veamos un ejemplo. Tomemos $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ y $\mathcal{P} = \{p_1, p_2\}$, donde $p_j(x) = |x_j|$ para $j = 1, 2$.

(b) Si $\mathcal{B}$ es una base local abierta convexa y equilibrada de una topología $\mathcal{T}$ vectorial en $\mathbb{X}$ y consideramos la familia separante de seminormas $\{\mu_V : V \in \mathcal{B}\}$, sabemos que esta familia da lugar a una topología $\mathcal{T}_1$. Es natural preguntarse si, necesariamente, ha de ser $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$. Veamos que la respuesta es afirmativa. Como cada $p \in \mathcal{P}$ es continua respecto a $\mathcal{T}$, resulta que cada $V(p,n) \in \mathcal{T}$, de modo que tenemos $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$. Recíprocamente, si $W \in \mathcal{B}$ y $p = \mu_W$, se tiene $W = \{x : \mu_W(x) < 1\} = V(p,1) \in \mathcal{T}_1$, de donde se sigue que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.

(c) Si $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una familia separante de seminormas **numerable**, sabemos que $\mathcal{P}$ da lugar a una topología $\mathcal{T}$ con una base local numerable, ya que las partes finitas de $\mathbb{N}$ son un conjunto numerable. El teorema 4.3.1 nos dice que $\mathcal{T}$ es metrizable. Podemos dar una demostración directa de este hecho construyendo una métrica invariante mediante la fórmula

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}. \tag{4.4.8}$$

Es fácil ver que d es, en efecto, una métrica invariante. Para probar que es compatible con $\mathcal{T}$, vamos a ver que las bolas

$$\mathbf{B}_r = \{x \in \mathbb{X} : d(x,0) < r\}$$

forman una base local de $\mathcal{T}$. Como cada p_j es continua, y la serie de (4.4.8) converge uniformemente en $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, d es continua. Así, cada $\mathbf{B}_r$ es abierta. Por otro lado, si W es un entorno de 0, será

$$W \supset V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_k, n_k).$$

Si $x \in \mathbf{B}_r$, tendremos

$$\frac{2^{-j} p_j(x)}{1 + p_j(x)} < r \;\; \forall j = 1, 2, \cdots ,$$

lo que implica $p_j(x) < \phi_j(r) \to 0$ para $r \to 0$. Así pues, tomando r pequeño, podemos asegurar que $\mathbf{B}_r \subset W$.

La fórmula (4.4.8) nos da una forma mucho más sencilla que el teorema 4.3.1 para construir una distancia en este caso. Tiene, sin embargo, el pequeño inconveniente de que las bolas asociadas a esta distancia pueden no ser convexas.

Teorema 4.4.9 *Un EVT $\mathbb{X}$ es normable si y sólo si el 0 tiene un entorno convexo acotado. Dicho de otra forma*

$$\mathbb{X} \text{ es normable } \Longleftrightarrow \mathbb{X} \text{ es localmente convexo y localmente acotado.}$$

Demostración. Desde luego, si $\mathbb{X}$ es normable y $\| \ \|$ es una norma, entonces $B = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| < 1\}$ es un entorno convexo y acotado de 0.

Recíprocamente, sea V un entorno convexo y acotado. Entonces existe U, abierto, convexo y equilibrado, tal que $0 \in U \subset V$. Definimos $\|x\| = \mu_U(x)\ \forall x \in \mathbb{X}$. Sabemos por la parte (c) del teorema 4.1.13, que los conjuntos $\{rU\}_{r>0}$, forman una base local de la topología de $\mathbb{X}$. Si $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, entonces para algún $r > 0$, $x \notin rU$. Se sigue que $\|x\| \geq r$, y así se demuestra que $\| \ \|$ es una norma. Además, $rU = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| < r\}$, con lo que queda claro que la norma determina la topología de $\mathbb{X}$.

■

Ejemplos 4.4.10 (a) Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Consideramos el espacio vectorial

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \ \ni \ f \text{ es continua}\}.$$

Escribimos $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}, K_n$ es compacto y, además $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

Dada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$p_n(f) = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$

Obtenemos así una familia separante de seminormas p_n que satisfacen $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n \leq p_{n+1} \cdots$. Esta familia separante de seminormas determina una topología vectorial localmente convexa. La propiedad de monotonía de esta familia hace que la topología quede determinada por la siguiente base local

$$V_n = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \ : \ p_n(f) < \frac{1}{n}\}.$$

Al ser esta base local numerable, sabemos que el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ es metrizable y que obtenemos una distancia compatible con la topología mediante la fórmula

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}.$$

Veamos que el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ que acabamos de definir, es completo. Para ello, partimos de una sucesión de Cauchy f_j, $j \in \mathbb{N}$ y queremos probar que converge. Que sea de Cauchy quiere decir que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(f_j - f_k) \to 0$ cuando $j, k \to \infty$; en otras palabras, que la sucesión es uniformemente de Cauchy sobre cada K_n. Esto garantiza que f_j converge uniformemente sobre cada K_n a una cierta función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. A partir de aquí resulta muy fácil ver (aplicando, por ejemplo, el teorema de convergencia dominada), que $d(f_j, f) \to 0$, para $j \to \infty$. Esto finaliza la demostración de que d es completa y así podemos afirmar que

$\mathcal{C}(\Omega)$ **es un espacio de Frechet**.

$E \subset \mathcal{C}(\Omega)$ será acotado si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n < \infty$, tal que

$$|f(x)| \leq M_n \ \forall x \in K_n \text{ y } \forall f \in E.$$

Es claro que ningún V_n es acotado, pues podemos encontrar $f \in V_n$ para la cual $p_n(f)$ sea tan grande como queramos. Esto implica, desde luego, que

$\mathcal{C}(\Omega)$ **no es normable**.

(b) Supongamos ahora que Ω es un abierto no vacío del plano complejo $\mathbb{C}$. Podemos considerar, como antes, el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ y, dentro de él, el subespacio $\mathcal{H}(\Omega)$ formado por las funciones holomorfas. Como la convergencia en $\mathcal{C}(\Omega)$ es la convergencia uniforme sobre cada compacto, es inmediato comprobar que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$. Vamos a ver a continuación que

$\mathcal{H}(\Omega)$ **tiene la propiedad de Heine- Borel**

En efecto, sea $E \subset \mathcal{H}(\Omega)$ un conjunto cerrado y acotado. Por ser E acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existirá M_n, tal que

$$|f(z)| \leq M_n \ \forall f \in E \text{ y } \forall z \in K_n.$$

En otras palabras, E es una familia de funciones holomorfas, uniformemente acotadas sobre cada subconjunto compacto de Ω. Esto es lo que se llama una **familia normal**. Según el teorema de Montel sobre familias normales, dada una sucesión $f_j \in E$, podemos encontrar una subsucesión f_{j_k} que converge uniformemente sobre cada compacto. Como E es cerrado, el límite $f \in E$. Esto demuestra que E es compacto. Como, claramente, $\mathcal{H}(\Omega)$ es de dimensión infinita, el hecho de que tenga la propiedad de Heine-Borel implica que no es localmente acotado y, por consiguiente, podemos afirmar que

$\mathcal{H}(\Omega)$ **no es normable**.

(c) Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, consideramos el operador diferencial $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ y escribimos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Para $\alpha = 0$, convenimos que $D^\alpha f = f$. Vamos a definir una topología vectorial localmente convexa en el espacio vectorial

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ D^\alpha f \in \mathcal{C}(\Omega) \ \forall \alpha\}.$$

Como en el primer ejemplo, escribimos $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}, K_n$ es compacto y, además $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la seminorma

$$p_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| \ : \ x \in K_N, |\alpha| \leq N\}.$$

Obtenemos así una familia separante de seminormas que determina, de la forma habitual, una topología vectorial localmente convexa sobre $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Una base local de esta topología vendrá dada por los siguientes entornos de 0

$$V_N = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ : \ p_N(f) < \frac{1}{N}\}.$$

Veamos, en primer lugar, que el espacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ así definido, es completo. Sea $(f_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Quiere esto decir que, si fijamos $N \in \mathbb{N}$, $f_j - f_k \in V_N$ para todos los j, k suficientemente grandes; es decir

$$|D^\alpha f_j(x) - D^\alpha f_k(x)| < \frac{1}{N} \text{ si } x \in K_N, \ |\alpha| \leq N$$

y j, k son suficientemente grandes. Se sigue que, para cada α, $(D^\alpha f_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión uniformemente de Cauchy sobre cada compacto. Por lo tanto, convergerá uniformemente sobre compactos a cierta función g_α. En particular $f_j \to g_0$ uniformemente sobre compactos. Es inmediato comprobar que $g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y, para cada multi-índice α, $D^\alpha g_0 = g_\alpha$. En efecto, si ponemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j \to g_i \text{ para } j \to \infty,$$

donde la convergencia es uniforme sobre compactos, e integramos en la variable x_i, obtenemos

$$f_j(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) - f_j(x_1, \cdots, c \cdots, x_n) \to \int_c^{x_i} g_i(x_1, \cdots, t, \cdots, x_n) dt.$$

De ahí que la última integral coincida con $g_0(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) - g_0(x_1, \cdots, c, \cdots, x_n)$ y, por lo tanto, que

$$g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} g_0.$$

Por inducción se ve que para cada multi-índice α, $D^\alpha g_0 = g_\alpha$. Resulta luego inmediato que $f_j \to g_0$, en la topología de $\mathcal{C}(\Omega)$, para $j \to \infty$. La completitud queda demostrada. Como la familia de seminormas es numerable, el espacio será metrizable. Podemos afirmar que

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ **es un espacio de Frechet.**

Ahora veremos que, además

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ **tiene la propiedad de Heine-Borel.**

En efecto, supongamos que $E \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es cerrado y acotado. Por ser acotado, existirán constantes $M_n < \infty$, tales que $p_N(f) \leq M_N$, $\forall f \in E$, es decir,

$$|D^\alpha f(x)| \leq M_N, \text{ si } |\alpha| \leq N, \, x \in K_N \text{ y } f \in E.$$

Esto implica la equicontinuidad de la familia

$$\{D^\beta f \;:\; f \in E, |\beta| \leq n-1\} \text{ en } K_{N-1}.$$

Utilizando el teorema de Ascoli-Arzela y un argumento diagonal, concluimos que, para cualquier sucesión, $(f_j)_{j=1}^\infty$ de funciones pertenecientes a E, existe una subsucesión $f_{j'}$, tal que, para todo multi-índice, β, $D^\beta f_{j'}$ converge uniformemente sobre compactos. Pero esto es justamente decir que E es compacto.

Como, claramente, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tiene infinitas dimensiones, resulta que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ no puede ser localmente acotado y, por consiguiente

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ **no es normable**.

Terminaremos esta sección presentando algunas consecuencias del teorema de Hahn-Banach. Comenzamos con la siguiente versión geométrica de dicho teorema

Teorema 4.4.11 *Sean A y B conjuntos convexos disjuntos no vacíos de un espacio vectorial topológico $\mathbb{X}$. Entonces*

(a) Si A es abierto, existen $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$ y $t \in \mathbb{R}$, tales que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\lambda(x) &< t \quad \forall x \in A \quad y \\ \mathrm{Re}\Lambda(y) &\geq t \quad \forall y \in B. \end{aligned}$$

(b) Si A es compacto y B es cerrado y, además, $\mathbb{X}$ es localmente convexo, existen $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, con $t_1 < t_2$, tales que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\lambda(x) &< t_1 \quad \forall x \in A \quad y \\ \mathrm{Re}\Lambda(y) &> t_2 \quad \forall y \in B. \end{aligned}$$

Demostración. Como vimos en el capítulo anterior, todo funcional real es la parte real de algún funcional complejo, de modo que basta suponer que el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$.

(a) Tomemos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ fijos y escribamos $x_0 = b_0 - a_0$. Sea $C = A - B + x_0$. Es evidente que C es un entorno convexo de 0. Sabemos que a C le podemos asignar su funcional de Minkowski $\mu_c = p$, definido mediante

$$p(x) = \text{ínf}\{s > 0 \ : \ (1/s)x \in C\}.$$

Hemos visto que p cumple las dos propiedades (a) y (b) del teorema 4.4.3 y estas son justamente las que necesitamos para aplicar el teorema de Hahn-Banach a un funcional que esté controlado por p extendiéndolo de un subespacio de $\mathbb{X}$ a todo el espacio, de modo que se mantenga el control por p. Observemos que, como A y B son disjuntos, $x_0 \notin C$, y esto implica que $p(x_0) \geq 1$.

Sobre el subespacio $M = [x_0]$ definimos el funcional lineal f mediante $f(tx_0) = t$. Si $t \geq 0$, tenemos

$$f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$$

y si $t < 0$,

$$f(tx_0) = t < 0 \leq p(tx_0).$$

Así vemos que $f \leq p$ en M. Por el teorema 3.1.1 del capítulo 3, f se extiende a $\Lambda : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, tal que, $\Lambda \leq p$ en todo $\mathbb{X}$. Si $x \in C$, se tiene $\Lambda(x) \leq p(x) \leq 1$, o, escrito de otra forma, $\Lambda(-x) \geq -1$. En resumen, si $x \in C \cap (-C)$, que es un entorno de 0, resulta que $|\Lambda(x)| \leq 1$. En particular, esta desigualdad es cierta para alguna bola centrada en 0, lo cual garantiza que $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$.

Si tenemos $a \in A$ y $b \in B$, se cumple que

$$\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

ya que $\Lambda(x_0) = 1$ y C es abierto, lo que justifica el signo $<$. Así vemos que $\Lambda(a) < \Lambda(b)$. LLegamos, de este modo, a que $\Lambda(A)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos convexos disjuntos de $\mathbb{R}$ (o sea, intervalos), que $\Lambda(A)$ está a la izquierda de $\Lambda(B)$ y además $\Lambda(A)$ es abierto. Para concluir basta tomar como t el extremo derecho de $\Lambda(A)$.

(b) Sabemos, por el teorema 4.1.7, que existe un entorno convexo de 0, V, tal que $(A + V) \cap B = \emptyset$. Aplicando la parte (a) con $A + V$ en lugar de A, tenemos $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\Lambda(A+V)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$, o sea, intervalos, disjuntos, con $\Lambda(A+V)$ abierto, situado a la izquierda de $\Lambda(B)$. Por otro lado, $\Lambda(A)$ es un compacto. (b) resulta inmediatamente.

■

Vimos en el capítulo anterior, que el dual de un espacio normado, separa los puntos de éste. Ahora veremos que esta propiedad es cierta para espacios localmente convexos.

Corolario 4.4.12 *Si $\mathbb{X}$ es un espacio localmente convexo, entonces $\mathbb{X}^\star$ separa los puntos de $\mathbb{X}$.*

Demostración. Sean $x_1 \neq x_2$ dos puntos de $\mathbb{X}$. Basta aplicar la parte (b) del teorema 4.4.11 con $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$, para encontrar $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\Lambda(x_1) \neq \Lambda(x_2)$.

■

También podemos separar puntos de subespacios en espacios localmente convexos. En efecto, tenemos la siguiente versión del corolario 3.1.9 del capítulo 3.

Teorema 4.4.13 *Sea M un subespacio del espacio localmente convexo $\mathbb{X}$, y sea $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \overline{M}$. Entonces existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\Lambda(x_0) = 1$, pero $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Aplicando (b) del teorema 4.4.11 con $A = \{x_0\}$ y $B = \overline{M}$, sabemos que existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\Lambda(x_0)$ y $\Lambda(\overline{M})$ son disjuntos. Entonces $\Lambda(\overline{M})$ es un subespacio propio del cuerpo $\mathbb{K}$. Esto implica que $\Lambda(\overline{M}) = 0$ y $\Lambda(x_0) \neq 0$. Basta dividir por $\Lambda(x_0)$ para obtener el funcional que buscamos.

■

De hecho, a partir de esta propiedad de separación de vectores y subespacios, podemos recuperar, para espacios localmente convexos, el teorema de extensión de funcionales lineales y continuos. En concreto, obtenemos la siguiente versión del corolario 3.1.7 del capítulo precedente.

Teorema 4.4.14 *Si f es un funcional lineal y continuo sobre un subespacio M de un espacio localmente convexo $\mathbb{X}$, entonces existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\Lambda(x) = f(x)$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Desde luego, podemos suponer que f no es identicamente 0. Consideramos $M_0 = f^{-1}(0) \prec M$ y $x_0 \in M$, tal que $f(x_0) = 1$. Claramente, $x_0 \notin \overline{M_0}$, pues en caso contrario, sería $x_0 \in M \cap \overline{M_0}$, que es el cierre de M_0 en M, y, como f es continuo, esto implicaría que $f(x_0) = 0$. Aplicando el teorema 4.4.13, sabemos que existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que $\Lambda(x_0) = 1$ y $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in M_0$.

Ahora, si tomamos un $x \in M$ cualquiera y consideramos $x - f(x)x_0 \in M_0$, tendremos

$$\Lambda(x) - f(x) = \Lambda(x) - f(x)\Lambda(x_0) = \Lambda(x - f(x)X_0) = 0,$$

de modo que $\Lambda(x) = f(x)$ para cada $x \in M$.

■

Finalizamos con otro corolario del teorema 4.4.11, que será útil en el capítulo siguiente

Corolario 4.4.15 *Sea B un conjunto convexo, equilibrado y cerrado del espacio localmente convexo $\mathbb{X}$. Sea $x_0 \in \mathbb{X} \setminus B$. Entonces existe $\Lambda \in \mathbb{X}^\star$, tal que*

$$|\Lambda(x)| \leq 1 \; \forall \; x \in B; \;\; \textit{pero, sin embargo} \;\; \Lambda(x_0) > 1.$$

Demostración. Aplicamos (b) del teorema 4.4.11 con $A = \{x_0\}$. Como $0 \in \Lambda(B)$, tenemos

$$\mathrm{Re}\Lambda(x_0) < -s < -t < \mathrm{Re}\Lambda(x) \;\; \forall x \in B, \;\; \text{con } 0 < t < s.$$

Pero además, como $\Lambda(B)$ es equilibrado,

$$|\Lambda(x)| < t < s < |\Lambda(x_0)| \;\; \forall x \in B.$$

Si $\Lambda(x_0) = |\Lambda(x_0)|\, e^{i\theta}$, es suficiente considerar el nuevo funcional $\widetilde{\Lambda} = e^{-i\theta} s^{-1} \Lambda \in \mathbb{X}^\star$ para tener

$$\widetilde{\Lambda}(x_0) = s^{-1}|\Lambda(x_0)| > 1 \quad \text{y} \quad |\widetilde{\Lambda}(x)| = s^{-1}|\Lambda(x)| < s^{-1}t < 1 \; \forall x \in B.$$

Ejercicios

a) Sea $\mathbb{X}$ el espacio vectorial de todas las funciones complejas definidas sobre el intervalo $[0,1]$. En $\mathbb{X}$ damos una topología mediante las seminormas

$$p_x(f) = |f(x)| \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Esta topología se llama la **topología de la convergencia puntual**. Justificar esta terminología.

Demostrar que existe una sucesión f_n , $n \in \mathbb{N}$ en $\mathbb{X}$, tal que

(a) f_n converge a 0 en $\mathbb{X}$ para $n \to \infty$; pero sin embargo

(b) Si γ_n es cualquier sucesión de escalares tal que $\gamma_n \to \infty$, entonces $\gamma_n f_n$ no converge a 0.

(Sugerencia: Utilizar el hecho de que la colección de todas las sucesiones complejas que convergen a 0 tiene el mismo cardinal que $[0,1]$.)

b) (a) Sea $\mathcal{P}$ una familia separante de seminormas en un espacio vectorial $\mathbb{X}$. Sea $\mathcal{Q}$ la familia más pequeña de seminormas en $\mathbb{X}$ que contiene a $\mathcal{P}$ y es estable al tomar máximos (es decir, si p_1 y p_2 pertenecen a $\mathcal{Q}$, entonces $p = \text{máx}(p_1, p_2) \in \mathcal{Q}$). Si la construcción dada en la teoría se realiza partiendo de $\mathcal{P}$ ó de $\mathcal{Q}$, ver que se obtiene la misma topología. La única diferencia es que $\mathcal{Q}$ da directamente una base local, mientras que $\mathcal{P}$ da sólamente una subbase.

(b) Sea Λ un funcional lineal sobre $\mathbb{X}$. Demostrar que Λ es continuo si y sólo si existe $p \in \mathcal{Q}$, tal que $|\Lambda(x)| \leq Mp(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y una cierta constante $M < \infty$.

c) Sea $\mathcal{C}$ el espacio vectorial de todas las funciones complejas continuas definidas en $[0,1]$. Definamos

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

Sea $(\mathcal{C}, \sigma)$ el espacio $\mathcal{C}$ con la topología inducida por esta métrica y sea $(\mathcal{C}, \tau)$ el espacio vectorial topológico definido por las seminormas

$$p_x(f) = |f(x)| \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

(a) Demostrar que todos los conjuntos $\tau-$acotados son también $\sigma-$acotados, de forma que la aplicación identidad $\text{id} : (\mathcal{C}, \tau) \longrightarrow (\mathcal{C}, \sigma)$ es acotada.

(b) Ver que, sin embargo, id : $(\mathcal{C},\tau) \longrightarrow (\mathcal{C},\sigma)$ no es continua, aunque es continua por sucesiones gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Se sigue que $(\mathcal{C},\tau)$ no es metrizable. Demostrar directamente que $(\mathcal{C},\tau)$ no tiene una base local numerable.

(c) Demostrar que todo funcional lineal continuo sobre $(\mathcal{C},\tau)$ es de la forma

$$f \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j f(x_j)$$

para alguna elección de $x_1, \cdots, x_n \in [0,1]$ y algunos $c_j \in \mathbb{C}$.

(d) Probar que $(\mathcal{C},\sigma)$ no contiene más conjuntos abiertos convexos que $\emptyset$ y $\mathcal{C}$.

(e) Probar que id : $(\mathcal{C},\sigma) \longrightarrow (\mathcal{C},\tau)$ no es continua.

d) Demostrar que los espacios $\mathcal{C}(\Omega)$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, no tienen la propiedad de Heine-Borel.

e) Demostrar que la topología del espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ del problema anterior, no depende de la elección particular de los compactos K_n, que se utilizaron en teoría, siempre que cumplan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \qquad \text{y} \qquad K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \,.$$

Hacer lo mismo para $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

4.5. Topologías débiles

Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías en un conjunto $\mathbb{X}$, y $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, se suele decir que $\mathcal{T}_1$ es más débil que $\mathcal{T}_2$ ó que $\mathcal{T}_2$ es más fuerte que $\mathcal{T}_1$. Ello equivale a que la aplicación

$$(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2) \xrightarrow{\text{id}} (\mathbb{X}, \mathcal{T}_1) \tag{4.5.1}$$

sea continua ó, en otras palabras, a que la aplicación

$$(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\text{id}} (\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$$

sea abierta.

Proposición 4.5.2 *Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, y además $\mathcal{T}_1$ es de Hausdoff y $\mathcal{T}_2$ es compacta, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Demostración. $A \in \mathcal{T}_2 \Longrightarrow \mathbb{X} \setminus A$ es cerrado en $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2) \Longrightarrow \mathbb{X} \setminus A$ es compacto en $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2) \Longrightarrow$ por ser la identidad (4.5.1) continua $\mathbb{X} \setminus A$ es compacto en $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1) \Longrightarrow \mathbb{X} \setminus A$ es cerrado en $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1) \Longrightarrow A \in \mathcal{T}_1$.

■

Utilizando esta terminología podemos escribir

Proposición 4.5.3 *Dado un EVT $\mathbb{X}$ y un subespacio cerrado $M \prec \mathbb{X}$, si consideramos la proyección canónica*

$$\mathbb{X} \xrightarrow{\pi} \mathbb{X}/M,$$

la topología cociente $\mathcal{T}_M$ es la más fuerte que hace que π sea continua y la más débil que hace que π sea abierta.

Demostración. Por definición

$$\mathcal{T}_M = \{A \subset \mathbb{X}/M \, : \, \pi^{-1}(A) \, \text{es abierto en } \mathbb{X}\}.$$

Se comprueba (problema 6 de la sección 1) que $\mathcal{T}_M$ es una topología vectorial. Lo que queremos ver ahora es que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías en $\mathbb{X}/M$, tales que π es continua con $\mathcal{T}_1$ y abierta con $\mathcal{T}_2$, entonces, $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}_2$. La primera inclusión se sigue inmediatamente de la definición de $\mathcal{T}_M$ y la segunda es consecuencia de que $\forall A \subset \mathbb{X}/M, \; A = \pi(\pi^{-1}(A))$.

■

Definición 4.5.4 (Topologías iniciales) *Sea* $\mathbb{X}$ *un conjunto y supongamos que nos dan una familia* $\mathcal{F}$ *de aplicaciones*

$$\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}_f,$$

donde cada $\mathbb{Y}_f$ *es un espacio topológico. Entonces tiene sentido hablar de la mínima topología, esto es, de la más débil, entre todas las que hacen que todas las aplicaciones* f *sean continuas. A esta topología, cuyos miembros serán uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos de la forma* $f^{-1}(A)$, *donde* $A \in \mathbb{Y}_f$, *se la conoce como topología inicial inducida por la familia* $\mathcal{F}$ *o, abreviando mal,* $\mathcal{F}-$ *topología.*

El ejemplo más sencillo de topología inicial es la topología producto. En él se parte de una familia de espacios topológicos $(\mathbb{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ y se quiere definir una topología natural en el producto cartesiano

$$\mathbb{X} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{X}_\alpha = \left\{ x : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{X}_\alpha \;\ni\; x(\alpha) \in \mathbb{X}_\alpha \ \forall \alpha \in \mathcal{A} \right\}.$$

Por definición, la topología producto es la topología inicial inducida por la familia de las proyecciones canónicas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\pi_\alpha} & \mathbb{X}_\alpha \\ x & \longmapsto & x(\alpha), \end{array}$$

esto es, la mínima topología que hace continuas todas las proyecciones π_α. Se sigue que esta topología tendrá como base la familia de los conjuntos que son intersección finita de conjuntos del tipo $\pi_\alpha^{-1}(A)$, donde A es un abierto de $\mathbb{X}_\alpha$.

Proposición 4.5.5 *Supongamos que tenemos una familia* $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}_f\}$ *de aplicaciones del conjunto* $\mathbb{X}$ *en los espacios topológicos* $\mathbb{Y}_f$. *Si cada uno de los espacios* $\mathbb{Y}_f$ *es de Hausdorff y la familia* $\mathcal{F}$ **separa puntos** *(lo cual quiere decir que para cada* $p \neq q$, *puntos de* $\mathbb{X}$, *existe alguna* $f \in \mathcal{F}$, *tal que* $f(p) \neq f(q)$*), entonces, el espacio topológico dado sobre* $\mathbb{X}$ *por la* $\mathcal{F}-$*topología, también es de Hausdorff.*

Demostración. En efecto, dados dos puntos $p \neq q$ de $\mathbb{X}$, sabemos que existe $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}_f$, tal que $f(p) \neq f(q)$. Como $\mathbb{Y}_f$ es de Hausdorff, existirán abiertos V_p y V_q de $\mathbb{Y}_f$, tales que $f(p) \in V_p$, $f(q) \in V_q$ y $V_p \cap V_q = \emptyset$. Así obtenemos $f^{-1}(V_p)$ y $f^{-1}(V_q)$, abiertos de la $\mathcal{F}-$topología de $\mathbb{X}$, que son disjuntos y contienen respectivamente a p y q.

■

Uno de los teoremas más importantes de la topología general,que no demostramos; pero que necesitamos utilizar es el siguiente

Teorema 4.5.6 (Teorema de Tychonov) *Todo producto cartesiano (aunque sea no numerable) de espacios compactos, es compacto.*

Corolario 4.5.7 *Si $(\mathbb{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia de espacios topológicos compactos y de Hausdorff, el producto $\mathbb{X} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{X}_\alpha$, también es un espacio compacto de Hausdorff. Además, en este caso, la topología no se puede reforzar sin perder la compacidad ni se puede debilitar sin perder la propiedad de Hausdorff.*

Demostración. Ya sabemos, por el teorema de Tychonov, que $\mathbb{X}$ es compacto. Además, es claro que la familia de las proyecciones canónicas π_α separa puntos, de modo que basta aplicar la proposición 4.5.5, para concluir que $\mathbb{X}$ es Hausdorff.

Por otro lado, si llamamos $\mathcal{T}$ a la topología producto y tenemos otras dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ en $\mathbb{X}$, tales que $\mathcal{T}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{T} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{T}_2$, se sigue de la proposición 4.5.2, que $\mathcal{T}_1$ no puede ser de Hausdorff y $\mathcal{T}_2$ no puede ser compacta.

■

Proposición 4.5.8 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio topológico compacto y sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de funciones continuas reales definidas en $\mathbb{X}$, tal que $\mathcal{F}$ separa los puntos de $\mathbb{X}$. Entonces $\mathbb{X}$ es metrizable.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|\phi_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Formamos

$$d(p,q) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(p) - f_n(q)|, \quad \forall p,q \in \mathbb{X}.$$

Es claro que d es una métrica en $\mathbb{X}$, pues $\mathcal{F}$ separa puntos y, también es evidente que d es continua. Se sigue, entonces, que las bolas

$$\mathbf{B}(p,r) = \{q \in \mathbb{X} : d(p,q) < r\}$$

son abiertos de la topología original de $\mathbb{X}$. Si llamamos $\mathcal{T}$ a dicha topología y $\mathcal{T}_d$ a la que induce la métrica d, hemos visto que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}_d$ es Hausdorff y $\mathcal{T}$ es compacta, una nueva aplicación de la proposición 4.5.2, nos da que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, con lo que queda probada la metrizabilidad de $\mathbb{X}$.

■

Lema 4.5.9 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sean $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n, \Lambda \in \mathbb{X}'$, dual algebraico de $\mathbb{X}$ (en otras palabras, $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n, \Lambda$ son funcionales lineales definidos en $\mathbb{X}$. Sea*

$$M = \{x \in \mathbb{X} \,:\, \Lambda_1(x) = \cdots = \Lambda_n(x) = 0\}.$$

Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes

(a) $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} \ni \Lambda = \alpha_1 \Lambda_1 + \cdots + \alpha_n \Lambda_n$.

(b) $\exists \gamma \in [0, \infty[\ni |\Lambda(x)| \le \gamma \max\limits_{1 \le j \le n} |\Lambda_j(x)| \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

(c) $\Lambda(x) = 0 \quad \forall x \in M$.

Demostración. Es claro que (a)⇒(b)⇒(c). Sólo tenemos que probar que (c)⇒(a). Para ello, comenzamos suponiendo que se cumple (c). Definimos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \pi(x) = (\Lambda_1(x), \cdots, \Lambda_n(x)) \end{array}$$

Tenemos

$$\pi(x) = \pi(x') \Leftrightarrow x - x' \in M \overset{(c)}{\Rightarrow} \Lambda(x) = \Lambda(x').$$

De aquí se deduce que existe un funcional lineal $F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, tal que $F(\pi(x)) = \Lambda(x) \ \forall x \in \mathbb{X}$. Como sabemos que los funcionales lineales sobre $\mathbb{K}^n$ vienen dados por los vectores de $\mathbb{K}^n$, podemos escribir

$$F(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

para cada $(u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, con unos ciertos $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\Lambda(x) = F(\pi(x)) = F(\Lambda_1(x), \cdots, \Lambda_n(x)) = \alpha_1 \Lambda_1(x) + \cdots + \alpha_n \Lambda_n(x),$$

que es, precisamente la propiedad (a) que queríamos de mostrar ■

Teorema 4.5.10 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y sea $Y \prec \mathbb{X}'$ un subespacio separante. Entonces la $Y-$topología $\mathcal{T}_Y$ convierte a $\mathbb{X}$ en un espacio localmente convexo cuyo dual es Y, es decir $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_Y)^\star = Y$.*

Demostración. La topología $\mathcal{T}_Y$ es la topología localmente convexa dada por la familia separante de seminormas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{p_\Lambda} & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & |\Lambda(x)| \end{array}$$

asociadas a los funcionales $\Lambda \in Y$. Sabemos que, esta topología hace continuas a las seminormas p_Λ y, por consiguiente, a cad funcional $\Lambda \in Y$.

Queremos ver que, recíprocamente, cada funcional lineal $\Lambda \in \mathbb{X}'$ que sea $\mathcal{T}_Y-$continuo, debe pertenecer a Y. Al ser Λ continuo, existirá un entorno de 0,

$$V = \{x \in \mathbb{X} \ : \ |\Lambda_j(x)| < r; \ j = 1, \cdots, n\},$$

definido por ciertos $\Lambda_j \in Y$ y ciertos $r_j > 0$, tal que $|\Lambda(x)| < 1$ para cada $x \in V$. Pero entonces, para cualquier $x \in \mathbb{X}$, tenemos

$$y = \frac{x}{\text{máx}_j |\Lambda_j(x)|} \frac{\text{mín}_j r_j}{2} \in V,$$

de donde $|\Lambda(y)| < 1$. Esto se puede escribir poniendo que

$$|\Lambda(x)| \leq \gamma \max_{1 \leq j \leq n} |\Lambda_j(x)|,$$

con $\gamma = \frac{2}{\text{mín}_j r_j}$. Ahora basta aplicar el lema 4.5.9 para concluir que

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Lambda_j \in Y.$$

■

EJEMPLOS 4.5.11 (a) **La topología débil de un EVT** Sea $\mathbb{X}$ un EVT con topología $\mathcal{T}$, cuyo dual topológico $\mathbb{X}^\star$ separa puntos (por ejemplo, sabemos por el teorema de Hahn-Banach que, si $\mathcal{T}$ es localmente convexa, entonces $\mathbb{X}^\star$ separa los puntos de $\mathbb{X}$). Entonces, la $\mathbb{X}^\star-$ topología, es decir, la mínima topología en $\mathbb{X}$ que hace que todos los funcionales $\Lambda : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ pertenecients a $\mathbb{X}^\star$ sean continuos, es lo que sellama la **topología débil** de $\mathbb{X}$. La designaremos como $\mathcal{T}_d$, mientras que, cuando sea necesario, llamaremos a $\mathcal{T}$ la **topología original** de $\mathbb{X}$. Como, desde luego, $\mathcal{T}$ también hace continuos a los funcionales de $\mathbb{X}^\star$, es claro que $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Esto justifica el término "topología débil", ya que se trata de debilitar la topología original, preservando la continuidad de los funcionales de $\mathbb{X}^\star$.

Sabemos, por el teorema 4.5.10 que el EVT $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_d)$, al que a veces denotaremos abreviadamente como $\mathbb{X}_d$, es un espacio local mente convexo cuyo dual es $\mathbb{X}^\star$.

Hay que distinguir bien los conceptos asociados a la topología original y sus contrapartidas para la topología débil. Por ejemplo, no hay que confundir lo que quiere decir que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a 0 originalmente (es decir, en la topología $\mathcal{T}$), con el hecho de que converja débilmente a 0, lo cual significa, como sabemos, que

$$\forall \Lambda \in \mathbb{X}^\star, \Lambda(x_n) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

(b) **La topología débil-$\star$ de un dual**

Ejercicios

a) (a) Sea $1 < p < \infty$. Demostrar que l^p contiene sucesiones que convergen débilmente pero no convergen fuertemente.

(b) Sin embargo, ver que toda sucesión débilmente convergente en l^1 converge también fuertemente (*difícil*), a pesar de que la topología débil de l^1 es diferente de su topología fuerte. ¿Cómo es ésto posible?

(c) Demostrar que si $0 < p < 1$, $(l^p)^\star = l^\infty$ y que el conjunto de los x tales que $\sum |x_n| < 1$ es débilmente acotado pero no es originalmente acotado.

(d) Para $0 < p \leq 1$, sea $\mathcal{T}_p$ la topología débil$-\star$ inducida sobre l^∞ por l^p. Si $0 < p < r \leq 1$, demostrar que las topologías $\mathcal{T}_p$ y $\mathcal{T}_r$ son diferentes (¿es alguna más débil que la otra?); pero que inducen la misma topología sobre cada conjunto acotado en norma de l^∞. *Sugerencia:* Usar el teorema de Banach-Alaoglu.

b) Para $n \in \mathbb{N}$, consideramos las funciones $f_n(t) = e^{int}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, que vemos como elementos del espacio de Banach $L^p[-\pi, \pi]$, $1 \leq p < \infty$. Demostrar que $f_n \to 0$ débilmente en L^p, pero no fuertemente.

c) Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Frechet de infinitas dimensiones. Probar que $\mathbb{X}^\star$ con la topología débil$-\star$ es de primera categoría en sí mismo.

d) $L^\infty[0,1]$ tiene una topología dada por la norma $|| \, ||_\infty$ y una topología débil$-\star$ como dual de L^1. Demostrar que el subespacio $\mathcal{C}$ de $L^\infty[0,1]$ formado por las funciones continuas, es denso en una de las topologías pero no en la otra. Hacer lo mismo con çerrado.$^{\text{en}}$ lugar de "denso".

e) Demostrar que la bola unidad cerrada (en norma) de c_0 no es débilmente compacta. Recordar que $(c_0)^\star = l^1$.

f) Sean $f_N(t) = N^{-1} \sum_{n=1}^{N^2} e^{int}$. Demostrar que $f_N \to 0$ débilmente en $L^2[-\pi, \pi]$. Entonces, sabemos que una sucesión de combinaciones convexas de las f_N converge a 0 en la norma de L^2. Encontrar dicha sucesión. Ver que las medias $g_N = N^{-1}(f_1 + \cdots + f_N)$ no valen.

g) Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial topológico tal que $\mathbb{X}^\star$ separa los puntos de $\mathbb{X}$. Demostrar que la topología débil$-\star$ de $\mathbb{X}^\star$ es metrizable si y sólo si $\mathbb{X}$ tiene una base de Hamel finita o numerable.

h) Sea $B : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Z}$ una aplicación bilineal que es continua en cada variable separadamente, donde $\mathbb{X}$ es un $F-$espacio e $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ son espacios vectoriales topológicos. Demostrar que si $x_n \to x - 0$ en $\mathbb{X}$ e $y_n \to y_0$ en $\mathbb{Y}$,entonces $B(x_n, y_n) \to B(x_0, y_0)$ en $\mathbb{Z}$. Si $\mathbb{Y}$ es metrizable, se sigue que B es continua.

i) Para $f \in L^2[-\pi,\pi]$, pongamos $\Lambda_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)$. Demostrar que $\{f \in L^2[-\pi,\pi] \,:\, \exists \operatorname{lím}_{n\to\infty} \Lambda_n(f)\}$ es un subespacio denso de $L^2[-\pi,\pi]$ de primera categoría.

Capítulo 5

TEORÍA DE OPERADORES

5.1. Anuladores y dualidad

Comenzamos mirando de nuevo a la relación que existe entre un espacio de Banach $\mathbb{X}$ y su dual $\mathbb{X}^\star$.

Algunos de los resultados que damos en esta sección podrían haber figurado perfectamente en el capítulo 3, pues son teoremas de dualidad. La razón de postponerlos hasta aquí es que, en algunos de ellos interviene la topología débil-$\star$ de $\mathbb{X}^\star$ y resulta útil disponer de la teoría general de espacios vectoriales topológicos cubierta en el capítulo 4.

Para nuestros propósitos actuales, va a resultar conveniente introducir la notación

$$\langle x, x^\star \rangle$$

para representar a $x^\star(x)$ con $x \in \mathbb{X}$ y $x^\star \in \mathbb{X}^\star$. La idea es que queremos ver la dualidad como un acoplamiento o apareamiento entre $\mathbb{X}$ y $\mathbb{X}^\star$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} \times \mathbb{X}^\star & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, x^\star) & \mapsto & \langle x, x^\star \rangle \end{array}$$

que, en muchos aspectos, se comporta como el producto escalar para espacios de Hilbert.

En la misma línea, para los **anuladores**, que definimos a continuación, vamos a utilizar una notación que está inspirada en el caso de los espacios de Hilbert.

Definición 5.1.1 *Supongamos que $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach y $\mathbb{X}^\star$ su dual.*

- *Para un subespacio vectorial M de $\mathbb{X}$, se define su anulador $M^\perp$ como el siguiente subconjunto de $\mathbb{X}^\star$*

$$M^\perp = \{x^\star \in \mathbb{X}^\star \,:\, \langle x, x^\star \rangle = 0 \; \forall\, x \in M\}.$$

- *Para un subespacio vectorial N de $\mathbb{X}^\star$, se define su anulador $^\perp N$ como el siguiente subconjunto de $\mathbb{X}$*

$$^\perp N = \{x \in \mathbb{X} \,:\, \langle x, x^\star \rangle = 0 \,\forall\, x^\star \in N\}.$$

Teorema 5.1.2 *Con las hipótesis de la definición 5.1.1, tenemos*

(a) $M^\perp$ es un subespacio vectorial débil$-\star$ cerrado de $\mathbb{X}^\star$.

(b) $^\perp N$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbb{X}$.

(c) $^\perp(M^\perp)$ es, precisamente, el cierre de M en $\mathbb{X}$.

(d) $(^\perp N)^\perp$ es, precisamente, el cierre de N en la topología débil$-\star$ de $\mathbb{X}^\star$.

Demostración. (a)

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} J(x)^{-1}(0).$$

Cada $J(x)^{-1}(0)$ es débil$-\star$ cerrado, puesto que se trata de la imagen recíproca del cerrado $\{0\}$ por la aplicación débil$-\star$ continua $J(x)$. Así resulta (a).

(b)

$$^\perp N = \bigcap_{x^\star \in N} (x^\star)^{-1}(0).$$

Se concluye como en (a).

(c) La proposición

$$m \in M \;\wedge\; x^\star \in M^\perp \;\Rightarrow\; \langle m, x^\star \rangle = 0$$

puede escribirse como una inclusión

$$M \subset {}^\perp(M^\perp).$$

Pero, como, de acuerdo con (b), $^\perp(M^\perp)$ es un cerrado, se sigue que, de hecho

$$\overline{M} \subset {}^\perp(M^\perp).$$

Terminaremos la demostración de (c) si conseguimos probar que, también

$$\overline{M} \supset {}^\perp(M^\perp).$$

Para ver ésto comenzamos tomando $x \notin \overline{M}$. El teorema de Hahn-Banach nos asegura que existe $x^\star \in M^\perp$, tal que $\langle x, x^\star \rangle \neq 0$. Esto nos dice que $x \notin {}^\perp(M^\perp)$, como queríamos demostrar.

(d) La demostración sigue los pasos de la del apartado anterior. Comenzamos por la inclusión obvia

$$N \subset ({}^{\perp}N)^{\perp},$$

que, teniendo en cuenta que $({}^{\perp}N)^{\perp}$ es débil$-\star$ cerrado, como vimos en (a), nos conduce a

$$\widetilde{N} \subset ({}^{\perp}N)^{\perp},$$

donde $\widetilde{N}$ representa el cierre de N en la topología débil$-\star$ de $\mathbb{X}^{\star}$. Para concluir sólo necesitamos probar la inclusión opuesta

$$\widetilde{N} \supset ({}^{\perp}N)^{\perp}.$$

Procedemos exactamente como en el punto anterior. Si $x^{\star} \notin \widetilde{N}$, teniendo en cuenta la identificación del dual de $(\mathbb{X}^{\star},\ \text{débil}-\star)$ con $\mathbb{X}$ y aplicando el teorema de Hahn-Banach, podemos afirmar que existe $x \in {}^{\perp}N$ tal que $\langle x, x^{\star}\rangle \neq 0$. Esto nos dice, justamente, que $x^{\star} \notin ({}^{\perp}N)^{\perp}$ y así acabamos.

■

Teorema 5.1.3 *Sea M un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach $\mathbb{X}$. Entonces*

(a)

$$M^{\star} = \mathbb{X}^{\star}/M^{\perp}.$$

Más concretamente, dado $m^{\star} \in M^{\star}$, el teorema de Hahn-Banach nos asegura que $m^{\star}$ puede extenderse a $x^{\star} \in \mathbb{X}^{\star}$. Pues bien, si definimos

$$\mathcal{E}(m^{\star}) = x^{\star} + M^{\perp}, \tag{5.1.4}$$

obtenemos un isomorfismo isométrico $\mathcal{E}$ de $M^{\star}$ sobre $\mathbb{X}^{\star}/M^{\perp}$.

(b)

$$(\mathbb{X}/M)^{\star} = M^{\perp}.$$

Más concretamente, si $\pi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}/M$ es la proyección canónica y para cada $y^{\star} \in (\mathbb{X}/M)^{\star}$ definimos

$$\mathcal{F}(y^{\star}) = y^{\star} \circ \pi,$$

obtenemos un isomorfismo isométrico $\mathcal{F}$ de $(\mathbb{X}/M)^{\star}$ sobre $M^{\perp}$.

Demostración. (a) Lo primero que hay que hacer es asegurarse de que la definición (5.1.4) es buena. Para ello, supongamos que $x^{\star},\ y^{\star} \in \mathbb{X}^{\star}$ son dos extensiones del mismo $m^{\star} \in M^{\star}$. Entonces , $x^{\star} - y^{\star} \in M^{\perp}$ y, por consiguiente,

$$x^{\star} + M^{\perp} = y^{\star} + M^{\perp}.$$

Así queda visto que la definición (5.1.4) es buena.

Por otro lado, en la situación de (5.1.4), es claro que

$$\|m^\star\| \leq \|x^\star + h^\star\| \ \ \forall\, h^\star \in M^\perp,$$

de modo que

$$\|m^\star\| \leq \inf_{h^\star \in M^\perp} \|x^\star + h^\star\| = \|x^\star + M^\perp\|_{\mathbb{X}^\star/M^\perp}.$$

Además, sabemos, por el teorema de Hahn-Banach, que cada $m^\star \in M^\star$ se puede extender a un $x^\star \in \mathbb{X}^\star$ con $\|x^\star\| = \|m^\star\|$. Esto nos dice que, en efecto, $\mathcal{E}$ es una isometría. Finalmente, es claro que $\mathcal{E}$ es "sobre", pues $\forall x^\star \in \mathbb{X}^\star$, $x^\star + M^\perp = \mathcal{E}(x^\star\,|_M)$.

(b) Es claro que $\mathcal{F}(y^\star) = y^\star \circ \pi \in M^\perp$. Además $\|\mathcal{F}(y^\star)\| = \|y^\star \circ \pi\| \leq \|y^\star\|\,\|\pi\| = \|y^\star\|$, ya que, como sabemos (ver problema 6 de la sección 3 del capítulo 1) $\|\pi\| = 1$.

Para ver que $\mathcal{F}$ es "sobre", tomamos $x^\star \in M^\perp$ y definimos $y^\star : \mathbb{X}/M \longrightarrow \mathbb{K}$ poniendo $y^\star(x+M) = x^\star(x)$. Desde luego $y^\star$ está bien definida, puesto que, si $x+M = x'+M$, entonces $x-x' \in M$ y, como $x^\star \in M^\perp$, tenemos $x^\star(x-x') = 0$, o lo que es lo mismo, $x^\star(x) = x^\star(x')$.

Por otra parte, $y^\star \in (X/M)^\star$. En efecto, por la definición

$$|y^\star(x+M)| = |x^\star(x)| \leq \|x^\star\|\,\|x\|.$$

En realidad, podemos tomar, en lugar de x, cualquier $x+m$ con $m \in M$, de forma que

$$|y^\star(x+M)| \leq \|x^\star\| \inf_{m \in M} \|x+m\| = \|x^\star\|\|x+M\|_{\mathbb{X}/M}.$$

Se sigue que $y^\star \in (\mathbb{X}/M)^\star$ con $\|y^\star\| \leq \|x^\star\|$ y, desde luego $\mathcal{F}(x^\star) = y^\star \circ \pi = x^\star$. Obtenemos así la sobreyectividad de $\mathcal{F}$ y la desigualdad que nos faltaba para ver que es un isomorfismo isométrico.

■

Definición 5.1.5 *Dado* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, *llamaremos* **rango** *de* T *a la imagen* $T(\mathbb{X})$ *y utilizaremos la notación* $\mathcal{R}(T) = T(\mathbb{X})$.

También recordamos la notación

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{X} \,:\, T(x) = 0\}$$

que usamos, sistemáticamente, para el núcleo de T.

El adjunto $T^\star$ de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se definió en el problema 8 de la primera sección del capítulo 3. Dado que la noción de adjunto va a jugar un papel fundamental en este capítulo, damos aquí de nuevo su definición.

Proposición 5.1.6 *Dado $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, la fórmula*

$$\langle x, T^\star(y^\star)\rangle = \langle T(x), y^\star\rangle \ \ \forall x \in \mathbb{X},\ y^\star \in \mathbb{Y}^\star,$$

define $T^\star \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}^\star, \mathbb{X}^\star)$ y se cumple $\|T^\star\| = \|T\|$.

Demostración.

$$|\langle x, T^\star(y^\star)\rangle| \le \|T\|\|x\|\|y^\star\| \ \ \forall x \in \mathbb{X},\ y^\star \in \mathbb{Y}^\star,$$

implica que, para todo $y^\star \in \mathbb{Y}^\star$, $T^\star(y^\star) \in \mathbb{X}^\star$ con $\|T^\star(y^\star)\| \le \|T\|\|y^\star\|$. En resumidas cuentas, $T^\star \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}^\star, \mathbb{X}^\star)$ con $\|T^\star\| \le \|T\|$.

Por otro lado

$$\|T(x)\| = \sup_{\|y^\star\| \le 1} |\langle T(x), y^\star\rangle| \le \|x\|\|T^\star\|,$$

de donde $\|T\| \le \|T^\star\|$.

■

Teorema 5.1.7 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Entonces*

$$\mathcal{N}(T^\star) = \mathcal{R}(T)^\perp \quad y \quad \mathcal{N}(T) = {}^\perp\mathcal{R}(T^\star).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} y^\star \in \mathcal{N}(T^\star) \Leftrightarrow T^\star(y^\star) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \langle x, T^\star(y^\star)\rangle = 0 \ \forall x \in \mathbb{X} \\ &\Leftrightarrow \ \langle T(x), y^\star\rangle = 0 \ \forall x \in \mathbb{X} \Leftrightarrow y^\star \in \mathcal{R}(T)^\perp. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow T(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \langle T(x), y^\star\rangle = 0 \ \forall y^\star \in \mathbb{Y}^\star \\ &\Leftrightarrow \ \langle x, T^\star(y^\star)\rangle = 0 \ \forall y^\star \in \mathbb{Y}^\star \Leftrightarrow x \in {}^\perp\mathcal{R}(T^\star). \end{aligned}$$

■

Corolario 5.1.8 *En la situación del teorema precedente*

(a) $\mathcal{N}(T^\star)$ es débil$-\star$ cerrado en $\mathbb{Y}^\star$.

(b) $\mathcal{R}(T)$ es denso en $\mathbb{Y} \Longleftrightarrow T^\star$ es inyectivo.

(c) T es inyectivo $\Longleftrightarrow \mathcal{R}(T^\star)$ es débil$-\star$ denso en $\mathbb{X}^\star$.

Demostración. (a) es consecuencia de la identidad

$$\mathcal{N}(T^\star) = \mathcal{R}(T)^\perp$$

contenida en el teorema 5.1.7 y del hecho de que todo anulador en $\mathbb{Y}^\star$ es débil$-\star$ cerrado, como establecimos en el teorema 5.1.2.

(b) Según el criterio de densidad que vimos en el capítulo 3 (corolario 3.1.10), $\mathcal{R}(T)$ es denso en $\mathbb{Y} \iff \mathcal{R}(T)^{\perp} = \{0\}$. Ahora bien, sabemos por el teorema 5.1.7 que $\mathcal{R}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T^{\star})$ y, desde luego, $\mathcal{N}(T^{\star}) = \{0\}$ es equivalente a decir que $T^{\star}$ sea inyectivo.
La demostración de (c) es idéntica a la de (b) teniendo en cuenta que el dual de $(\mathbb{X}^{\star},\ \text{débil} - \star)$ es $\mathbb{X}$.

■

Lo mismo que hemos caracterizado cuándo $\mathcal{R}(T)$ es denso en $\mathbb{Y}$ en términos de $T^{\star}$, también podemos caracterizar cuándo $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en $\mathbb{Y}$ y, al final, combinando las dos cosas, obtendremos un criterio para saber cuándo es $\mathcal{R}(T) = \mathbb{Y}$ mirando a $T^{\star}$. Pero antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.1.9 *Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach y sabemos que existe una constante $c > 0$, tal que*

$$\|T^{\star}(y^{\star})\| \geq c\|y^{\star}\| \ \ \forall\, y^{\star} \in \mathbb{Y}^{\star},$$

entonces se verifica que

$$T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \supset c\mathbf{B}_{\mathbb{Y}}.$$

Demostración. Como vimos en el capítulo 2 (lema 2.2.2), basta que demostremos que

$$\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \supset c\mathbf{B}_{\mathbb{Y}},$$

o, lo que es lo mismo, que

$$y_0 \notin \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \Longrightarrow \|y_0\| \geq c. \tag{5.1.10}$$

Para probar (5.1.10), tomamos $y_0 \notin \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$. Como $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$ es cerrado, convexo y equilibrado, el teorema 4.4.11 del capítulo 4 nos asegura que existe $y^{\star} \in \mathbb{Y}^{\star}$, tal que

$$|\langle y, y^{\star}\rangle| \leq 1\ \forall y \in \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \ \text{ pero, sin embargo, } 1 < |\langle y_0, y^{\star}\rangle|.$$

Para cada $x \in \mathbf{B}_{\mathbb{X}}$, como, desde luego, $T(x) \in \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$, se tiene

$$|\langle x, T^{\star}(y^{\star})\rangle| = |\langle T(x), y^{\star}\rangle| \leq 1.$$

Esto implica, junto con la hipótesis, que

$$c\|y^{\star}\| \leq \|T^{\star}(y^{\star})\| \leq 1,$$

y, por consiguiente

$$1 < |\langle y_0, y^{\star}\rangle| \leq \|y_0\|\,\|y^{\star}\| \leq (1/c)\|y_0\|,$$

o, en otras palabras, $\|y_0\| > c$, como queríamos demostrar.

■

Teorema 5.1.11 *Para $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en $\mathbb{Y}$

(b) $\mathcal{R}(T^\star)$ es cerrado débil–$\star$ en $\mathbb{X}^\star$.

(c) $\mathcal{R}(T^\star)$ es cerrado en $\mathbb{X}^\star$.

Demostración. Está claro que (b) $\Rightarrow$ (c), de forma que sólo necesitamos ver que (a) $\Rightarrow$ (b) y que (c) $\Rightarrow$ (a).
(a) $\Rightarrow$ (b) : Sabemos que $\mathcal{N}(T) = {}^\perp\mathcal{R}(T^\star)$, de modo que

$$\mathcal{N}(T)^\perp = ({}^\perp\mathcal{R}(T^\star))^\perp = \widetilde{\mathcal{R}(T^\star)} = \text{ cierre débil} - \star \text{ de } \mathcal{R}(T^\star) \text{ en } \mathbb{X}^\star.$$

Se sigue que, para ver que (a) $\Rightarrow$ (b), basta demostrar que $\mathcal{N}(T)^\perp \subset \mathcal{R}(T^\star)$. Veamos esto. Sea $x^\star \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Definimos $\Lambda : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathbb{K}$ haciendo $\Lambda(T(x)) = \langle x, x^\star \rangle$. Lo primero que hay que comprobar es que Λ está bien definido. En efecto, si $T(x) = T(x')$, entonces $x - x' \in \mathcal{N}(T)$, y, como estamos suponiendo que $x^\star \in \mathcal{N}(T)^\perp$, resulta que $x^\star(x) = x^\star(x')$.

Una vez que sabemos que Λ está bien definido y que es lineal (la linealidad es de comprobación inmediata), hay que ver si es continuo. Para ello usamos el **teorema de la aplicación abierta** para el operador $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{R}(T)$. Aquí es fundamental la hipótesis (a) de que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado pues, ello implica que $\mathcal{R}(T)$ es un espacio de Banach y podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta. Lo que obtenemos es que la aplicación $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ es abierta, lo que se puede traducir del modo siguiente

$$\exists K \in]0, \infty[\ni \forall y \in \mathcal{R}(T)\ \exists x \in \mathbb{X} \ni T(x) = y \text{ y además } \|x\| \leq K\|y\|.$$

Entonces

$$|\Lambda(y)| = |\Lambda(T(x))| = |\langle x, x^\star \rangle| \leq \|x\|\,\|x^\star\| \leq K\|y\|\,\|x^\star\|.$$

Así queda demostrado que $\Lambda \in \mathcal{R}(T)^\star$. Se sigue del teorema de Hahn-Banach que Λ puede extenderse a $\mathbb{Y}$, es decir, existe $y^\star \in \mathbb{Y}^\star$ tal que $y^\star\,|_{\mathcal{R}(T)} = \Lambda$. Tenemos después

$$\langle T(x), y^\star \rangle = \Lambda(T(x)) = \langle x, x^\star \rangle,$$

es decir, $T^\star(y^\star) = x^\star$, y así $x^\star \in \mathcal{R}(T^\star)$, como queríamos demostrar.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Definimos $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \overline{\mathcal{R}(T)})$ mediante $S(x) = T(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Puesto que $\mathcal{R}(S)$ es denso en $\overline{\mathcal{R}(T)}$, se sigue del corolario 5.1.8 (b), que
$S^\star : \overline{\mathcal{R}(T)}^\star \longrightarrow \mathbb{X}^\star$ es inyectivo. Si $z^\star \in \overline{\mathcal{R}(T)}^\star$, el teorema de Hahn-Banach nos dice que existe algún $y^\star \in \mathbb{Y}^\star$, que es una extensión de $z^\star$ a $\mathbb{Y}$ con $\|y^\star\| = \|z^\star\|$. $\forall x \in \mathbb{X}$, se cumple

$$\langle x, T^\star(y^\star) \rangle = \langle T(x), y^\star \rangle = \langle S(x), z^\star \rangle = \langle x, S^\star(z^\star) \rangle,$$

de forma que $S^\star(z^\star) = T^\star(x^\star)$. Tenemos, entonces, $\mathcal{R}(S^\star) = \mathcal{R}(T^\star)$. Como estamos suponiendo que $\mathcal{R}(T^\star)$ es cerrado en $\mathbb{X}^\star$, resulta que $\mathcal{R}(S^\star)$ es cerrado en $\mathbb{X}^\star$ y, por lo tanto, completo. Si utilizamos el teorema de la aplicación abierta para $S^\star : \overline{\mathcal{R}(T)}^\star \longrightarrow \mathcal{R}(S^\star)$, encontramos $c > 0$, tal que

$$c\|z^\star\| \leq \|S^\star(z^\star)\| \quad \forall z^\star \in \overline{\mathcal{R}(T)}^\star.$$

Pero, entonces, por el lema 5.1.9, la aplicación $S : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}(T)}$ es abierta. Como consecuencia resulta que $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, y obtenemos (a).

■

Corolario 5.1.12 *Para $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios de Banach, se tiene la equivalencia siguiente*

$$\mathcal{R}(T) = \mathbb{Y} \iff \exists\, c > 0 \quad \ni \quad \|T^\star(y^\star)\| \geq c\|y^\star\| \quad \forall y^\star \in \mathbb{Y}^\star.$$

Demostración. Desde luego, $\mathcal{R}(T) = \mathbb{Y}$ si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ es a la vez denso y cerrado. A su vez, esto ocurre, según el corolario 5.1.8 y el teorema 5.1.11, precisamente si $T^\star$ es inyectivo y $\mathcal{R}(T^\star)$ es cerrado en $\mathbb{X}^\star$.

Entonces, si $\mathcal{R}(T) = \mathbb{Y}$, tenemos $T^\star : \mathbb{Y}^\star \longrightarrow \mathcal{R}(T^\star)$ lineal y biyectivo sobre el espacio completo $\mathcal{R}(T^\star)$. Se sigue que esta aplicación es un isomorfismo y, por consiguiente, se cumple la desigualdad del enunciado.

Recíprocamente, si sabemos que para alguna $c > 0$,

$$\|T^\star(y^\star)\| \geq c\|y^\star\| \quad \forall y^\star \in \mathbb{Y}^\star, \tag{5.1.13}$$

resulta inmediatamente que $T^\star$ es inyectiva. Para ver que $\mathcal{R}(T) = \mathbb{Y}$ sólo nos queda demostrar que $\mathcal{R}(T^\star)$ es cerrado en $\mathbb{X}^\star$. Lo vemos del modo siguiente. Supongamos una sucesión de vectores $T^\star(y_n^\star) \in \mathcal{R}(T^\star$, tal que $T^\star(y_n^\star) \to x^\star$ para $n \to \infty$. Se trata de probar que $x^\star \in \mathcal{R}(T^\star)$. Pero entonces $T^\star(y_n^\star)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}^\star$ y, como consecuencia de (5.1.13), $y_n^\star$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Y}^\star$. Por la completitud de $\mathbb{Y}^\star$, existe $y^\star \in \mathbb{Y}^\star$ tal que $y_n^\star \to y^\star$ cuando $n \to \infty$. Esto implica que $T^\star(y_n^\star) \to T^\star(y^\star)$ y, por consiguiente, $x^\star = T^\star(y^\star) \in \mathcal{R}(T^\star)$, como queríamos demostrar.

■

5.2. Operadores compactos

Definición 5.2.14 *Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espacios normados. Un operador lineal $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ se dice que es* **compacto** *si transforma $\mathbf{B}_\mathbb{X}$, la bola unidad abierta del espacio $\mathbb{X}$, en un conjunto relativamente compacto; es decir, si el conjunto $\overline{T(\mathbf{B}_\mathbb{X})}$ es compacto.*

Como todo conjunto compacto es acotado, se sigue que para un operador compacto T, $T(\mathbf{B}_\mathbb{X})$ es un conjunto acotado, de modo que T es continuo.

Designaremos mediante $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ al conjunto de todos los operadores lineales compactos de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$. Como ya hemos dicho

$$\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Cuando $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, pondremos, simplemente, $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ en lugar de $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Proposición 5.2.15 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un operador lineal T del espacio de Banach $\mathbb{X}$ en el espacio de Banach $\mathbb{Y}$.*

(a) T es compacto.

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito de puntos $y_1, \cdots, y_n$ de $\mathbb{Y}$ tal que $T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{B}(y_j, \varepsilon)$.

(c) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de vectores $x_n \in \mathbb{X}$ con $\|x_n\| = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión (x_{n_j}) para la cual, la sucesión $T(x_{n_j})$ converge en $\mathbb{Y}$.

Demostración. En efecto (b) nos dice que $T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})$ es **totalmente acotado**, lo que implica que su cierre $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$ también es totalmente acotado. Este cierre es, desde luego, completo. Ahora sólo hay que recordar que, para un espacio métrico, ser compacto equivale a ser completo y totalmente acotado.

(c) resulta inmediatamente, de aplicar la caracterización mediante sucesiones, de la compacidad de un espacio métrico.

■

En todo el capítulo y, mientras no se diga lo contrario, todos los espacios normados que consideremos, serán completos, es decir, espacios de Banach.

Proposición 5.2.16 *(a) Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y su rango $\mathcal{R}(T)$ es de dimensión finita (a veces abreviaremos ésto diciendo que T es "de rango finito"), entonces T es compacto.*

(b) Si $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y su rango $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, entonces $\mathcal{R}(T)$ tiene dimensión finita.

(c) $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Demostración. (a) Por ser un subespacio de dimensión finita, sabemos que $\mathcal{R}(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{Y}$. Por otro lado $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathcal{R}(T)$. Será entonces compacto, ya que los espacios de dimensión finita tienen, como es bien sabido, la propiedad de Heine-Borel.

(b) Si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, tenemos $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \subset \mathcal{R}(T)$. Por el Teorema de la Aplicación Abierta, $T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \supset r\mathbf{B}_{\mathcal{R}(T)}$ para algún $r > 0$. Entonces, por ser T

compacto, resulta que $\overline{\mathbf{B}_{\mathcal{R}(T)}}$ es compacto ; en otras palabras, $\mathcal{R}(T)$ es un espacio localmente compacto. Aplicando el Teorema de F. Riesz 4.2.6 del capítulo anterior, concluimos que $\mathcal{R}(T)$ tiene dimensión finita.

(c) Que $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un subespacio de $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es consecuencia de la continuidad de las operaciones que implica que la suma de dos conjuntos compactos es un compacto y que un múltiplo escalar de un conjunto compacto es un compacto.

Veamos ahora que $\mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Para ello suponemos que $T_n \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y que $T_n \to T$ en $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Hemos de ver que T es compacto. Para ello comprobaremos que cumple la condición (b) de la proposición 5.2.15. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos n tal que $\|T_n - T\| < \varepsilon/2$. Por otro lado, como T_n es compacto, sabemos que existen puntos $y_1, \cdots, y_J$ de $\mathbb{Y}$, tales que

$$T_n(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \subset \bigcup_{j=1}^{J} \mathbf{B}(y_j, \varepsilon/2). \tag{5.2.17}$$

Entonces, dado $x \in \mathbf{B}_{\mathbb{X}}$, sabemos que $\|T(x) - T_n(x)\| \leq \|T - T_n\| \, \|x\| < \varepsilon/2$. Además, por 5.2.17, existirá $j \ni 1 \leq j \leq J$ y $\|T_n(x) - y_j\| < \varepsilon/2$. Se sigue que $\|T(x) - y_j\| \leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - y_j\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Por lo tanto, concluimos que

$$T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \subset \bigcup_{j=1}^{J} \mathbf{B}(y_j, \varepsilon),$$

que es lo que queríamos demostrar.

■

Combinando (a) y (c) de la Proposición 5.2.16, podemos afirmar que

Corolario 5.2.18 *Todo límite en $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de operadores de rango finito, es compacto.*

Tiene sentido preguntarse por la validez del recíproco del Corolario 5.2.18, o sea:

(A) ¿Es todo $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un límite en $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de operadores de rango finito?

Este es un famoso problema acerca de espacios de Banach, que se resistió mucho tiempo hasta que, finalmente, Per Enflo pudo contestar negativamente la pregunta (A) en un celebrado trabajo publicado en Acta Mathematica en 1973.

Lo que es crucial para la respuesta de (A) es la estructura del espacio $\mathbb{Y}$. Se dice que el espacio de Banach $\mathbb{Y}$ tiene la **propiedad de aproximación** si para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{Y}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un operador $P \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{Y})$, con rango finito, tal que $\|P(x) - x\| \leq \varepsilon \; \forall x \in K$. Es inmediato que si $\mathbb{Y}$ tiene la propiedad de aproximación, entonces la respuesta a la pregunta (A) es positiva. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, basta considerar el compacto $K = \overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$

y, con el operador de rango finito P asociado a K y ε, darse cuenta de que $\|P \circ T - T\| \leq \varepsilon$.

Observamos que un espacio de Banach $\mathbb{Y}$ tiene la propiedad de aproximación si y sólo si cada subespacio separable de $\mathbb{Y}$ tiene dicha propiedad. En efecto, dado un subconjunto compacto K de $\mathbb{Y}$, el espacio $\overline{[K]}$ es separable, de forma que, si los subespacios separables de $\mathbb{Y}$ tienen la propiedad de aproximación, dado $\varepsilon > 0$, podremos encontrar $P \in \mathcal{B}(\overline{[K]}, \overline{[K]})$, con rango finito, tal que $\|P(x) - x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in K$. Ahora sólo hay que extender P de $\mathcal{B}(\overline{[K]}, \overline{[K]})$ a $\mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{Y})$. Pero para ésto se puede usar el Teorema de Hahn-Banach, que es aplicable porque el rango de P es finito.

Cuando $\mathbb{Y}$ tiene una **base de Schauder** (la definición está en el problema 5.2.20 de la sección 3 del capítulo 2), $\mathbb{Y}$ tiene la propiedad de aproximación. Para demostrar ésto, observamos que, si $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de $\mathbb{Y}$ y definimos

$$P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,$$

obtenemos $P_n \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{Y})$, tales que $\|P_n(x) - x\| \to 0$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{Y}$. Ver el problema 2 al final de la sección.

A partir de lo dicho, resulta claro que el problema de aproximación (A), tiene mucho que ver con este otro famoso problema, que se conoce como **problema de la base**

(B) ¿Tiene todo espacio de Banach separable alguna base de Schauder?.

Si la respuesta de (B) fuera positiva, también lo sería la de (A). Así pues, la respuesta negativa para (A) que obtuvo Per Enflo, implica también una respuesta negativa para (B).

Proposición 5.2.19 *Supongamos que tenemos*

$$\mathbb{X} \xrightarrow{S} \mathbb{Y} \xrightarrow{T} \mathbb{E}\,,$$

donde S y T son operadores lineales continuos. Entonces si alguno de los operadores S ó T es compacto, también lo es su composición $T \circ S$.

En particular, para un espacio de Banach $\mathbb{X}$, $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ es un ideal bilátero del álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

Demostración. (a) Si S es compacto, $\overline{S(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}$ será compacto. Pero entonces, $\overline{T \circ S(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} = T\left(\overline{S(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})}\right)$ también es compacto, por ser la imagen de un compacto mediante una aplicación continua.

(b) Si T es compacto, como $S(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}) \subset \|S\|\,\mathbf{B}_{\mathbb{Y}}$, resulta que $\overline{T \circ S(\mathbf{B}_{\mathbb{X}})} \subset \|S\|\,\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{Y}})}$ es compacto, por ser un subconjunto cerrado de un compacto.

■

Teorema 5.2.20 (Schauder) *Sea* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. *Entonces*

$$T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \Longleftrightarrow T^\star \in \mathcal{K}(\mathbb{Y}^\star, \mathbb{X}^\star).$$

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Sea $(y_n^\star)_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathbf{B}_{\mathbb{Y}^\star}$. Hemos de probar que hay una subsucesión de $(T^\star(y_n^\star))_{n=1}^\infty$ que converge en $\mathbb{X}^\star$. Observemos que

$$|y_n^\star(y) - y_n^\star(y')| \leq \|y_n^\star\| \, \|y - y'\| \leq \|y - y'\|,$$

de forma que si ponemos $f_n = y_n^\star \mid_{\overline{T(\mathbf{B}_\mathbb{X})}}$, tenemos una sucesión **equicontinua** de funciones $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, sobre el compacto $\overline{T(\mathbf{B}_\mathbb{X})}$. El **Teorema de Ascoli** asegura que existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ que converge uniformemente. Entonces

$$\begin{aligned}
\|T^\star(y_{n_j}^\star) - T^\star(y_{n_k}^\star)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left| T^\star(y_{n_j}^\star - y_{n_k}^\star)(x) \right| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left| (y_{n_j}^\star - y_{n_k}^\star)(T(x)) \right| = \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

para $j, k \to \infty$. Lo que hemos visto es que $\Big(T^\star(y_{n_j}^\star)\Big)_{j=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}^\star$. Como $\mathbb{X}^\star$ es completo, $\Big(T^\star(y_{n_j}^\star)\Big)_{j=1}^\infty$ converge, que es lo que queríamos demostrar.

Para demostrar la implicación en sentido contrario, aunque podríamos emplear un argumento análogo al que acabamos de dar, vamos a utilizar las inclusiones canónicas de $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ en sus duales dobles, es decir, las aplicaciones $J_\mathbb{X} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}^{\star\star}$ y $J_\mathbb{Y} : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Y}^{\star\star}$ definidas mediante $\langle x^\star, J_\mathbb{X}(x) \rangle = \langle x, x^\star \rangle$ y $\langle y^\star, J_\mathbb{Y}(y) \rangle = \langle y, y^\star \rangle$ respectivamente. Tenemos

$$\langle y^\star, J_\mathbb{Y}(T(x)) \rangle = \langle T(x), y^\star \rangle = \langle x, T^\star(y^\star) \rangle = \langle T^\star(y^\star), J_\mathbb{X}(x) \rangle = \langle y^\star, T^{\star\star}(J_\mathbb{X}(x)) \rangle,$$

es decir,

$$J_\mathbb{Y} \circ T = T^{\star\star} \circ J_\mathbb{X}.$$

Como $J_\mathbb{X}$ es isometría, se sigue que

$$J_\mathbb{Y}\left(T(\mathbf{B}_\mathbb{X})\right) \subset T^{\star\star}(\mathbf{B}_{\mathbb{X}^{\star\star}}). \tag{5.2.21}$$

Entonces, si $T^\star$ es compacto, sabemos por la primera parte de esta demostración, que $T^{\star\star}$ también es compacto. Esto implica que $T^{\star\star}(\mathbf{B}_{\mathbb{X}^{\star\star}})$ es totalmente acotado y, en virtud de (5.2.21), $J_\mathbb{Y}\left(T(\mathbf{B}_\mathbb{X})\right)$ también es totalmente acotado. Como $J_\mathbb{Y}$ es una isometría, resulta que $T(\mathbf{B}_\mathbb{X})$ es totalmente acotado y, en definitiva, que el operador T es compacto.

∎

Teorema 5.2.22 (Alternativa de Fredholm) *Si* $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, *entonces*

(a) $\mathcal{N}(T - I)$ *es de dimensión finita.*

(b) $\mathcal{R}(T - I)$ *es cerrado; de hecho,* $\mathcal{R}(T - I) = {}^{\perp}\mathcal{N}(T^{\star} - I)$.

(c) $\mathcal{N}(T - I) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathcal{R}(T - I) = \mathbb{X}$.

(d) $\dim \mathcal{N}(T - I) = \dim \mathcal{N}(T^{\star} - I)$.

Demostración. (a) Consideramos $M = \mathcal{N}(T - I)$, que es un subespacio cerrado. Para cada $x \in M$ se tiene que $T(x) = x$, de modo que

$$\mathbf{B}_M = T(\mathbf{B}_M) \subset T(\mathbf{B}_{\mathbb{X}}).$$

De aquí se deduce, por ser T compacto, que $\mathbf{B}_M$ es un conjunto relativamente compacto de M. Pero entonces, por el teorema de F. Riesz (4.2.6 del capítulo anterior), M es de dimensión finita.

(b) Del hecho de que $\mathcal{N}(T - I)$ sea de dimensión finita, se deduce que es un subespacio complementado, es decir, que existe un subespacio vectorial cerrado N de $\mathbb{X}$, tal que $\mathbb{X} = \mathcal{N}(T - I) \oplus N$ (ver el problema 3 de la sección primera del capítulo 3). Definimos $S : N \longrightarrow \mathbb{X}$ mediante $S(x) = T(x) - x$. Entonces S es inyectiva y $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T - I)$. Para que $\mathcal{R}(S)$ sea cerrado, es necesario y suficiente que se cumpla que

$$\exists c > 0 \ni c\|x\| \leq \|S(x)\| \; \forall x \in N. \tag{5.2.23}$$

La necesidad es consecuencia del teorema de la aplicación abierta y la suficiencia se ve de la forma siguiente: Si $S(x_n) \to x$ cuando $n \to \infty$, $(S(x_n))_{n=1}^{\infty}$ será una sucesión de Cauchy y, por (5.2.23), lo mismo puede decirse de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente, $S(x_n) \to S(x_0)$ cuando $n \to \infty$. Queda así probado que $x = S(x_0) \in \mathcal{R}(S)$.

Sólo nos queda demostrar (5.2.23). Lo hacemos por reducción al absurdo. Si (5.2.23) no fuera cierto, podríamos encontrar una sucesión de vectores $x_n \in N$, tal que $\|x_n\| = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $S(x_n) = T(x_n) - x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como T es compacto, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $T(x_{n_k})$ converge hacia cierto vector $\tilde{x}$. Pero entonces, como $T(x_n) - x_n \to 0$, resulta que también $x_{n_k} \to \tilde{x}$. Todos los x_{n_k} están en N y N es cerrado. Por lo tanto, $\tilde{x} \in N$. Por otro lado $S(\tilde{x}) = 0$. Como S es inyectiva, $\tilde{x} = 0$, lo cual es imposible pues $\|x_n\| = 1 \; \forall n$ y ello fuerza a que sea $\|\tilde{x}\| = 1$.

Una vez que sabemos que $\mathcal{R}(T - I)$ es cerrado, podemos aplicar el teorema 5.1.7, según el cual

$$\mathcal{N}(T^{\star} - I) = \mathcal{R}(T - I)^{\perp}.$$

Entonces

$${}^{\perp}\mathcal{N}(T^{\star} - I) = {}^{\perp}(\mathcal{R}(T - I)^{\perp}) = \mathcal{R}(T - I)$$

por el teorema 5.1.2.

(c) Comenzamos probando que

$$\mathcal{N}(T-I)=\{0\} \Longrightarrow \mathcal{R}(T-I)=\mathbb{X}.$$

Para ello, suponemos que $\mathcal{N}(T-I)=\{0\}$ y que, sin embargo, $\mathcal{R}(T-I)=M_1 \underset{\neq}{\subset} \mathbb{X}$. M_1 es un espacio de Banach (es cerrado, como vimos en la prueba del apartado anterior), $T(M_1)=M_1$ y $T\mid_{M_1}\in \mathcal{K}(M_1)$. Consideramos $M_2=(T-I)(M_1)$, que es un subespacio cerrado de M_1. Por otro lado, $M_2 \underset{\neq}{\subset} M_1$, pues, al ser $T-I$ inyectivo, se tiene

$$x\in \mathbb{X}\setminus M_1 \Longrightarrow (T-I)(x)\in M_1\setminus M_2.$$

Procediendo repetidamente de la misma forma, es posible obtener una sucesión decreciente de subespacios cerrados

$$M_1 \underset{\neq}{\subset} M_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots M_j \underset{\neq}{\subset} \cdots, \quad j\in\mathbb{N}$$

donde $M_{j+1}=(T-I)(M_j), \quad \forall j\in\mathbb{N}$. Podemos aplicar la observación del problema 2 de la sección 1 del capítulo 3, para encontrar una sucesión de vectores $u_n\in M_n$, tales que

$$\|u_n\|=1 \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(u_n,M_{n+1})\geq \frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Entonces, como si $n>m$ podemos escribir

$$T(u_n)-T(u_m)=T(u_n)-u_m+u_m-T(u_m)=v_{n,m}-u_m,$$

con $v_{n,m}=T(u_n)+(u_m-T(u_m))\in M_{m+1}$. Se sigue que $\|T(u_n)-T(u_m)\|\geq 1/2$, lo cual es incompatible con el hecho de ser T compacto, ya que, al serlo, alguna subsucesión de $(T(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser convergente.

Para finalizar este punto, probamos ahora que

$$\mathcal{R}(T-I)=\mathbb{X} \Longrightarrow \mathcal{N}(T-I)=\{0\}.$$

Suponemos que $\mathcal{R}(T-I)=\mathbb{X}$. Entonces, por el teorema 5.1.7, tenemos

$$\mathcal{N}(T^\star-I)=\mathcal{R}(T-I)^\perp=\{0\}.$$

Ahora bien, sabemos por el teorema 5.2.20, que $T^\star\in\mathcal{K}(\mathbb{X}^\star)$, de forma que si aplicamos a $T^\star$ lo que acabamos de demostrar, podemos afirmar que $\mathcal{R}(T^\star-I)=\mathbb{X}^\star$; pero, de nuevo por el teorema 5.1.7, $\mathcal{N}(T-I)={}^\perp\mathcal{R}(T^\star-I)={}^\perp\mathbb{X}^\star=0$, que es lo que queríamos demostrar.

(d) Escribamos $d = \dim \mathcal{N}(T-I)$ y $d^\star = \dim \mathcal{N}(T^\star - I)$. Comenzamos viendo que $d^\star \leq d$. Lo hacemos por rducción al absurdo. Supongamos que $d^\star > d$. Como $\mathcal{N}(T-I)$ es de dimensión finita, sabemos por el lema **??** que $\mathcal{N}(T-I)$ es un subespacio complementado, es decir, que existe un subespacio vectorial cerrado M de $\mathbb{X}$, tal que

$$\mathbb{X} = \mathcal{N}(T-I) \oplus M.$$

Llamemos P a la correspondiente proyección de $\mathbb{X}$ sobre $\mathcal{N}(T-I)$. Del mismo modo, como $\mathcal{N}(T^\star - I)$ es de dimensión finita y

$$(\mathbb{X}/\mathcal{R}(T-I))^\star = \mathcal{R}(T-I)^\perp = \mathcal{N}(T^\star - I),$$

vemos que $(\mathbb{X}/\mathcal{R}(T-I))$ tiene dimensión finita y, por consiguiente, también $\mathcal{R}(T-I)$ es complementado según el lema **??**. Así tendremos N, subespacio cerrado de $\mathbb{X}$, con $\dim N = d^\star$ (la misma que la de $(\mathbb{X}/\mathcal{R}(T-I))$), tal que

$$\mathbb{X} = \mathcal{R}(T-I) \oplus N.$$

Puesto que estamos suponiendo que $d < d^\star$, existirá un operador lineal

$$L : \mathcal{N}(T-I) \longrightarrow N \;\text{ inyectivo pero no sobreyectivo}$$

Consideramos $S = T + L \circ P$. S es, desde luego, un operador compacto. Vamos a ver que $\mathcal{N}(S-I) = \{0\}$. En efecto, si

$$0 = S(x) - x = T(x) - x + L(P(x)), \text{ dado que } T(x) - x \in \mathcal{R}(T-I) \text{ y } L(P(x)) \in N,$$

se tendrá, necesariamente, que $T(x) - x = 0$ y $L(P(x)) = 0$. Pero, entonces, $x \in \mathcal{N}(T-I)$, de forma que $P(x) = x$. Ahora podemos escribir $L(x) = L(P(x)) = 0$. Como $L : \mathcal{N}(T-I) \longrightarrow N$ es inyectiva, llegamos finalmente a que $x = 0$, con lo que queda demostrado que $\mathcal{N}(S-I) = \{0\}$.

Por el punto (c), ya demostrado, sabemos que $\mathcal{N}(S-I) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathcal{R}(S-I) = \mathbb{X}$. Pero si tomamos $y \in N \setminus L(\mathcal{N}(T-I))$, vamos a ver que $y \notin \mathcal{R}(S-I)$. En efecto, si fuera $y = S(x) - x = T(x) - x + L(P(x))$, tendríamos $y - L(P(x)) = T(x) - x$, pero como $y - L(P(x)) \in N$ y $T(x) - x \in \mathcal{R}(T-I)$, se seguiría $T(x) - x = 0$, o, lo que es lo mismo, $y = L(P(x))$, en contra de lo que habíamos supuesto. Asíqueda demostrado que $d^\star \leq d$. Si aplicamos lo ya probado al operador adjunto $T^\star$, obtenemos

$$\dim(\mathcal{N}(T^{\star\star} - I)) \leq \dim(\mathcal{N}(T^\star - I)) \leq \dim(\mathcal{N}(T-I));$$

pero, teniendo en cuenta que $\mathcal{N}(T^{\star\star} - I) \supset \mathcal{N}(T-I)$, llegamos, finalmente a $d^\star = d$.

∎

Ejercicios

1. Definimos $T : c_0 \longrightarrow l_2$ mediante
$$T((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (x_j/j)_{j=1}^{\infty}.$$
Sean $\mathbb{X} = c_0$, $\mathbb{Y} = \mathcal{R}(T)$. Consideramos $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dado por $S(x) = T(x)$ para toda $x \in \mathbb{X}$. Demostrar que S no es compacto y que, sin embargo, S es límite en $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de una sucesión de operadores de rango finito. ¿Como es ésto posible? ¿Por qué no contradice este ejemplo al Corolario 5.2.18?

2. Sea $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una base de Schauder del espacio de Banach $\mathbb{X}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos
$$P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,$$
Demostrar que $\|P_n(x) - x\| \to 0$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{X}$.

3. Demostrar que el subespacio generado por un compacto en un espacio normado, es siempre separable.

4. Sea M un subespacio vectorial del espacio normado $\mathbb{X}$. Sea $S \in \mathcal{B}(M, M)$ un operador de rango finito. Explicar cómo puede aplicarse el Teorema de Hahn-Banach para extender S a $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ sin aumentar su norma.

5. Demostrar que un operador compacto en un espacio normado de dimensión infinita, no tiene inverso acotado.

6. Sea $T : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ el operador definido del modo siguiente:
$$T\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty},$$
para una sucesión fija $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números . Demostrar que T es compacto si y sólo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

7. Demostrar que el operador $T : \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ definido mediante $T(f)(x) = xf(x)$, no es compacto.

8. Sea $K(x, y)$ continua en $[0,1] \times [0,1]$. Demostrar que el operador T definido en $\mathcal{C}[0,1]$ mediante la fórmula
$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$
es compacto.

9. Sea $1 < p < \infty$. Supongamos que $K(x, y)$ es una función perteneciente a $L^{p'}([0,1] \times [0,1])$, donde p' es el exponente conjugado del p, es decir, $1/p + 1/p' = 1$. Demostrar que T, definido mediante
$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$
es un operador compacto de $L^p[0,1]$ en $L^{p'}[0,1]$.

   Sugerencia: Puede ser útil comenzar suponiendo que K es continua.

10. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores del espacio de Banach $\mathbb{X}$. Se dice que la sucesión converge débilmente a x y se escribe $x_n \rightharpoonup x$ si para cada $x^\star \in \mathbb{X}^\star$, la sucesión de números $x^\star(x_n)$ converge a $x^\star(x)$.

    Demostrar que
$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es acotada en } \mathbb{X}.$$

11. Demostrar que si $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ y la sucesión x_n converge débilmente a x en $\mathbb{X}$, entonces $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ en $\mathbb{Y}$.

12. Sea T definido, para $f \in L^p[0, \rightarrow[$ mediante la fórmula
$$T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$
Demostrar que T es acotado en $L^p[0, \rightarrow[$, pero no compacto.

5.3. Teoría espectral

Definición 5.3.24 *Para $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, se define el* **espectro** *de T como el conjunto $\sigma(T)$ dado por*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}$$

En la definición anterior, un operador se llama invertible si es un elemento invertible del álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, o sea, si el operador tiene un inverso continuo. En realidad, como estamos suponiendo que $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach, tener inverso continuo es lo mismo que ser biyectiva, por el teorema de la aplicación abierta. En resumidas cuentas, $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

(a) $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq \mathbb{X}$, es decir, $T - \lambda I$ no es "sobre", o bien

(b) $\mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, es decir, $T - \lambda I$ no es inyectiva.

En el caso (b) se dice que λ es un autovalor de T.

Definición 5.3.25 *λ es un* **autovalor** *o valor propio de T si existe algún $x \neq 0$ tal que $T(x) = \lambda x$. Estos vectores x se llaman* **autovectores** *o* **vectores propios** *de T para el autovalor λ. A $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ se le llama* **autoespacio** *o* **espacio propio**.

Ejemplo 5.3.26 *En general, no todos los elementos del espectro son autovalores. Por ejemplo, si consideramos $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, dado por*

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots),$$

es evidente que $0 \in \sigma(T)$, pero, sin embargo, 0 no es autovalor de T.

Proposición 5.3.27

$$\sigma(T) \subset \overline{\mathbf{D}}(0, \|T\|) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $|\lambda| > \|T\|$. Sólo tenemos que probar que $T - \lambda I$ es biyectivo. Dado $y \in \mathbb{X}$, buscamos $x \in \mathbb{X}$, tal que $T(x) - \lambda x = y$, o, lo que es lo mismo, $x = \lambda^{-1}(T(x) - y)$. Consideremos la aplicación $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, dada por $F(x) = \lambda^{-1}(T(x) - y)$. Esta aplicación verifica que

$$\|F(x) - F(x')\| = \|\lambda^{-1}T(x - x')\| \leq |\lambda|^{-1}\|T\| \, \|x - x'\|.$$

Entonces, como $|\lambda|^{-1}\|T\| < 1$, resulta que F es una aplicación contractiva. Se sigue del **teorema del punto fijo de Banach**, que F tiene un único punto fijo, lo cual equivale, justamente, a decir que $T - \lambda I$ es biyectivo, que es lo que queríamos demostrar.

■

Proposición 5.3.28 $\sigma(T)$ *es compacto.*

Demostración. Acabamos de ver que $\sigma(T)$ es acotado, de forma que sólo nos queda comprobar que también es cerrado. Esto lo veremos demostrando que el conjunto complementario es abierto. Para ello, miramos a un λ_0 fijo perteneciente a $\mathbb{K} \setminus \sigma(T)$ y vamos a ver que existe $\varepsilon > 0$, tal que $\mathbf{D}(\lambda_0, \varepsilon) \subset \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. En otras palabras, suponiendo que $T - \lambda_0 I$ es invertible, hemos de ver que, para todo λ cercano a λ_0, $T - \lambda I$, también es invertible. Usamos de nuevo el teorema del punto fijo de Banach. Dado $y \in \mathbb{X}$, buscamos $x \in \mathbb{X}$, tal que

$$y = T(x) - \lambda x = T(x) - \lambda_0 x - (\lambda - \lambda_0)x,$$

o, habida cuenta de que $T - \lambda_0 I$ es invertible,

$$x = (T - \lambda_0 I)^{-1}(y + (\lambda - \lambda_0)x) = \Phi(x).$$

Ahora vemos que la aplicación $\Phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ que acabamos de definir, es contractiva para λ cercano a λ_0. En efecto

$$\|\Phi(x) - \Phi(x')\| \leq |\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \|x - x'\|,$$

de forma que Φ es contractiva si $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon = 1/\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|$. Esto termina la demostración.

■

Teorema 5.3.29 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. Entonces*

(a) $0 \in \sigma(T)$.

(b) Para todo $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, λ es un autovalor de T.

(c) Sólo 0 puede ser punto de acumulación de $\sigma(T)$, de forma que se tienen exclusivamente las tres posibilidades siguientes

- $\sigma(T) = \{0\}$ *o bien*
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es un conjunto finito, o bien*
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión con límite* 0.

Demostración. (a) Si fuera $0 \notin \sigma(T)$, T sería invertible y tendríamos $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Pero entonces (proposición 5.2.19), $I = T^{-1} \circ T$ sería un operador compacto, de modo que $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{X}}$ sería un conjunto compacto, lo que implica, por el teorema 4.2.6 de F. Riesz, que $\mathbb{X}$ es de dimensión finita, en contra de lo que estamos suponiendo.

(b) Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Queremos ver que λ es un autovalor, o sea, que $\mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Pero, si, por el contrario, fuera $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$, entonces el teorema 5.2.22 nos dice que tendríamos $\mathcal{R}(T-\lambda I)=\mathbb{X}$, de forma que $T-\lambda I$ sería invertible o, en otras palabras, $\lambda \notin \sigma(T)$, en contradicción con la hipótesis.

(c) Supongamos que tenemos $\lambda_n \in \sigma(T)\setminus\{0\}$, distintos y tales que $\lambda_n \to \lambda$. Vamos a ver que $\lambda = 0$. Ya sabemos, por (b), que cada λ_n es un autovalor. Sean $e_n \neq 0$, tales que $(T-\lambda_n I)(e_n)=0$. Consideremos $M_n=[e_1,\cdots,e_n]$. Los vectores $e_n,\ n\in\mathbb{N}$, son linealmente independientes. En efecto, podemos ver ésto por inducción. Supuesto cierto para $\{e_1,\cdots,e_n\}$, con un n fijo, si fuera $e_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$, tendríamos

$$\lambda_{n+1}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j=\lambda_{n+1}e_{n+1}=T(e_{n+1})=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j T(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j e_j.$$

Como, por hipótesis de inducción, hemos supuesto que $\{e_1,\cdots,e_n\}$, son linealmente independientes, se sigue que $\lambda_{n+1}\alpha_j=\alpha_j\lambda_j,\ \forall j\in\{1,\cdots,n\}$. Por lo tanto, $\alpha_j=0,\ \forall j\in\{1,\cdots,n\}$, lo cual es absurdo, pues lleva a $e_{n+1}=0$.

Tenemos, entonces

$$M_1 \underset{\neq}{\subset} M_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} M_n \underset{\neq}{\subset}$$

y $(T-\lambda_n I)(M_n)\subset M_{n-1}$. Aplicando el lema de Riesz **??**, podemos considerar

$$u_n\in M_n \text{ con } \|u_n\|=1 \text{ y } \operatorname{dist}(u_n,M_{n-1})\geq\frac{1}{2},\quad \forall n\geq 2.$$

Sean $2\leq m<n$, de modo que $M_{m-1}\subset M_m\subset M_{n-1}\subset M_n$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(u_n)}{\lambda_n}-\frac{T(u_m)}{\lambda_m}\right\| &= \left\|\frac{T(u_n)-\lambda_n u_n}{\lambda_n}-\frac{T(u_m)-\lambda_m u_m}{\lambda_m}+u_n-u_m\right\| \\ &\geq \operatorname{dist}(u_n,M_{n-1})\geq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Si fuera $\lambda_n\to\lambda\neq 0$, entonces, como T es compacto, existiría una subsucesión de $T(u_n)$, digamos $T(u_{n_k})$, que sería convergente. Pero, en ese caso, $\lambda_{n_k}^{-1}T(u_{n_k})$ también sería convergente, lo cual está en contradicción con el hecho que acabamos de ver de que las distancias entre los vectores de esta sucesión son siempre mayores o iguales que $1/2$.

Observemos que, como consecuencia del punto (c) que acabamos de probar,

$$\forall r>0,\quad \sigma(T)\setminus\mathbf{D}(0,r)\ \text{ es siempre finito.}$$

■

Observación: Dada una sucesión cualquiera $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares que tiendan a cero, se puede construir muy fácilmente un operador compacto T para el cual $\sigma(T) = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. En efecto, basta considerar

$$\begin{array}{ccc} \ell^2 & \xrightarrow{T} & \ell^2 \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Que T es compacto se prueba viendo que es límite de operadores de rango finito (como en el problema 6 de la sección anterior). Este ejemplo también sirve para ver que el 0 puede ser autovalor o no serlo, como se hizo en el ejemplo 5.3.26.

Para finalizar esta sección vamos a estudiar la **descomposición espectral de un operador compacto autoadjunto** en un espacio de Hilbert. Así pues, en lo que resta de sección, vamos a suponer que $\mathbb{X}$ es un **espacio de Hilbert**. Vamos a identificar el dual $\mathbb{X}^\star$ con $\mathbb{X}$, mediante la identificación que proporciona el teorema de representación de Riesz 1.3.16 del capítulo 1. De esta forma, si tenemos $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, podemos ver al adjunto como el operador $T^\star \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, definido por

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^\star(y)\rangle.$$

Esta definición coincide formalmente con la que tenemos en general para espacios de Banach; pero ahora, el apareamiento de dualidad coincide con el producto escalar en $\mathbb{X}$.

Definición 5.3.30 *$T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ se dice que es* **autoadjunto** *si $T^\star = T$, es decir, si*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \ \ \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

En realidad, no hace falta suponer que T es acotado. En efecto, vimos en la sección 2 del capítulo 2 (teorema 2.2.12) que la condición de la definición anterior implica ya la acotación de T.

Proposición 5.3.31 *Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ es autoadjunto y llamamos*

$$m = \inf_{\|x\|_{\mathbb{X}}=1} \langle T(x), x\rangle \ \ y \ \ M = \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}}=1} \langle T(x), x\rangle,$$

entonces

$$\sigma(T) \subset [m, M] \ \ y \ \ m, M \in \sigma(T).$$

Demostración. En primer lugar, vemos que las definiciones de m y M tienen sentido. En efecto, como T es autoadjunto $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$, de modo que $\langle T(x), x\rangle$ es siempre real. Tenemos, en general

$$m\|x\|^2 \langle T(x), x\rangle \leq M\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Lo primero que vamos a demostrar es que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. En efecto, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se cumple

$$\|(T - \lambda I)(x)\| \|x\| \geq |\langle \lambda x - T(x), x\rangle| \geq |\mathrm{Im}\,(\lambda)| \|x\|^2. \tag{5.3.32}$$

Veamos cómo se deduce, a partir de (5.3.32), que $T - \lambda I$ es biyectivo, o, en otras palabras, que $\lambda \notin \sigma(T)$.

Que $T - \lambda I$ es inyectivo, resulta evidente, pues si $T(x) - \lambda x = 0$, se lee automáticamente en (5.3.32) que $x = 0$.

Por otro lado, (5.3.32) implica que $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ es cerrado. El argumento es el siguiente. Sean $T(x_n) - \lambda x_n \to x$. Entonces $T(x_n) - \lambda x_n$ es una sucesión de Cauchy y, por (5.3.32), también x_n es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{X}$. Se sigue que $x_n \to y$, para algún $y \in \mathbb{X}$ y, por consiguiente $T(x_n) - \lambda x_n \to T(y) - \lambda y$, de forma que $x = T(y) - \lambda y \in \mathcal{R}(T - \lambda I)$.

Una vez que sabemos que $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ es cerrado, volvemos a aplicar (5.3.32) para demostrar que $\mathcal{R}(T-\lambda I)^{\perp} = \{0\}$, con lo que queda demostrado que $T-\lambda I$ es sobreyectivo.

La demostración de que $\sigma(T) \in [m, M]$ es similar. Si $\lambda > M$, tenemos

$$\|(T - \lambda I)(x)\| \|x\| \geq |\langle \lambda x - T(x), x\rangle| \geq (\lambda - M)\|x\|^2,$$

que, exactamente como antes, nos conduce a que $\lambda \notin \sigma(T)$.

Del mismo modo, si $\lambda < m$, se obtiene

$$\|(T - \lambda I)(x)\| \geq (m - \lambda)\|x\|,$$

y, a partir de ahí, $\lambda \notin \sigma(T)$.

Pasamos a demostrar que $M \in \sigma(T)$. Para ello consideramos la forma bilineal

$$B(x, y) = \langle Mx - T(x), y\rangle,$$

que es, claramente, hermitiana y positiva (es decir, $B(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$). Esto es todo lo que hace falta para que se cumpla la desigualdad de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz

$$|\langle Mx - T(x), y\rangle| \leq \langle Mx - T(x), x\rangle^{1/2} \langle My - T(y), y\rangle^{1/2},$$

de la que resulta inmediatamente

$$\|Mx - T(x)\| \leq C\langle Mx - T(x), x\rangle^{1/2}.$$

Tomemos ahora una sucesión $x_n \in \mathbb{X}$ con $\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $\langle T(x_n), x_n\rangle \to M$ para $n \to \infty$. Entonces

$$\|Mx_n - T(x_n)\| \leq C\langle Mx_n - T(x_n), x_n\rangle^{1/2} \to 0 \text{ para } n \to \infty.$$

Esto implica, en particular, que $MI - T$ no puede tener inverso continuo; pues, si lo tuviera, sería $x_n = (MI-T)^{-1}(MI-T)(x_n) \to 0$, lo que constituye una contradicción dado que $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Así queda demostrado que $M \in \sigma(T)$.

La demostración de que $m \in \sigma(T)$ se puede hacer de la misma forma o bien obtenerse de lo que hemos probado ya, sin más que cambiar T por $-T$.

■

Corolario 5.3.33 *Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ es un operador autoadjunto con $\sigma(T) = \{0\}$, entonces $T = 0$.*

Demostración. Puesto que $m, M \in \sigma(T)$, se sigue que $m = M = 0$ y, en consecuencia, $\langle T(x), x\rangle = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{X}$. Entonces, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{X}$, se tiene la siguiente identidad de polarización

$$\begin{aligned} 4\langle T(x), y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &+ \ i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle \end{aligned}$$

Naturalmente, esto implica que $T = 0$, como queríamos demostrar.

■

Estamos ya en condiciones de presentar el **teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.**

Teorema 5.3.34 *Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Hilbert y sea T un operador compacto autoadjunto en $\mathbb{X}$. Entonces $\mathbb{X}$ tiene una base ortonormal formada por autovectores de T.*

Demostración. Sea $(\lambda_n)_{n\geq 1}^N$, donde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la sucesión de los autovalores de T, excluido el 0. Ponemos $\lambda_0 = 0$. Sean $M_0 = \mathcal{N}(T)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \mathcal{N}(T - \lambda_n I)$. Los M_n con $n \in \mathbb{N}$ son de dimensión finita; pero M_0 puede ser de dimensión infinita.

Vemos, en primer lugar, que los subespacios $M_n, \ n \geq 0$ son ortogonales dos a dos. En efecto, sean $x \in M_n$, $y \in M_m$, con $n \neq m$. Entonces, como $T(x) = \lambda_n x$ y $T(y) = \lambda_m y$, tenemos

$$\lambda_n\langle x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \lambda_m\langle x, y\rangle,$$

que implica $(\lambda_n - \lambda_m)\langle x, y\rangle = 0$, y, dado que $\lambda_n \neq \lambda_m$, llegamos a $\langle x, y\rangle = 0$, como queríamos demostrar.

Ahora, si llamamos $M = \left[\bigcup_{n=0}^{N} M_n\right]$, todo lo que queda por demostrar es que M es denso en $\mathbb{X}$, o, lo que es lo mismo, que $M^\perp = \{0\}$. Veámoslo.

Comenzamos observando que $T(M) \subset M$ y, por consiguiente, $T(M^\perp) \subset M^\perp$. En efecto, si $x \in M^\perp$ e $y \in M$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = 0$ por ser $T(y) \in M$.

El operador $T_0 = T\,|_{M^\perp}$ es autoadjunto y compacto. Por otro lado, $\sigma(T_0) = \{0\}$. Efectivamente, si $\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$, sabemos que λ será un autovalor de T_0, es decir, que existirá algún $x \in M^\perp$, con $x \neq 0$, tal que $T_0(x) = \lambda x$. Pero entonces $\lambda = \lambda_n$ para algún $n \geq 0$ y $x \in M^\perp \cap M_n = \{0\}$, lo cual es absurdo. Una vez que hemos visto que $\sigma(T_0) = \{0\}$, deducimos, por el corolario anterior, que $T_0 = 0$. Entonces $M^\perp \subset \mathcal{N}(T) = M_0 \subset M$ y, en definitiva, $M^\perp = \{0\}$, como queríamos demostrar.

$\blacksquare$