Análisis Funcional. Grado de Matemáticas de la UAM *Curso 2018/19*

Parcial 2, 8 de mayo de 2019, 13:30 - 15:30.

Apellidos ____________________.____________________ Nombre ____________________ Grupo ______

1. Dada una función $f(t)$ en $[0,2\pi]$, denotamos por $S_N f$ las sumas parciales de su serie de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$, es decir,
$$\big(S_N f\big)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$
Las medias de Fejér de estas sumas parciales vienen dadas por $\big(\Phi_N f\big)(t) = \dfrac{S_0 f(t) + \cdots + S_{N-1} f(t)}{N}$.
Demostrar que existe una función $f \in L^1[0,2\pi]$ tal que la sucesión de valores $\{(\Phi_N f)(0)\}_{N=1}^{\infty}$ de sus medias de Fejér en $t=0$ no está acotada. Recordar que
$$\big(\Phi_N f\big)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_N(s-t) f(s)\, ds; \qquad \Phi_N(s) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{Ns}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2$$
($\Phi_N(s)$ se llaman los núcleos de Fejér).
[En clase hemos demostrado una afirmación parecida para los núcleos de Dirichlet en el contexto del espacio $C_{per}[0,2\pi]$ de funciones continuas y periódicas en $[0,2\pi]$.]

2. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en un espacio de Banach X.
   (a) Sea L el subespacio cerrado, generado por los vectores x_n. Demostrar que un vector $g \in X$ pertenece a L si y solo si para todo funcional $h \in X'$ tal que $\langle x_n, h\rangle = 0$ para todo n, se tiene también $\langle g, h\rangle = 0$.
   (b) Dada una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ de vectores en ℓ^∞, demostrar que existe un funcional lineal $h : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ continuo y no nulo, tal que $\langle x_n, h\rangle = 0$ para todo n.

3. Dados un espacio de Banach X, un operador continuo $A \in L(X)$ y un funcional $f \in X'$, demostrar que son equivalentes las afirmaciones:
   (i) $|\langle x, f\rangle| \le \|Ax\|, \quad \forall x \in X;$
   (ii) $\exists g \in X'$ tal que $\|g\|_{X'} \le 1$ y $A'g = f$.
   Aquí $A' \in L(X')$ es el operador adjunto a A.

4. Sean X un espacio de Banach (sobre $\mathbb{K}$), $x_0 \in X$ un vector, $\{f_n\}$ una sucesión de funcionales *no nulos* en X' y $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión de escalares. Demostrar que todo entorno $B(x_0,\varepsilon)$ de x_0 contiene al menos un vector x tal que
$$\forall n, \quad \langle x, f_n\rangle \ne a_n.$$