Análisis Funcional. Grado de Matemáticas de la UAM *Curso 2018/19*

Parcial 2, 8 de mayo de 2019, 13:30 - 15:30.

Soluciones

1. Dada una función f en $[0, 2\pi]$, denotamos por $S_N f$ las sumas parciales (simétricas) de su serie de Fourier. Las medias de Fejér de estas sumas parciales vienen dadas por

$$\big(\Phi_N f\big)(t) = \frac{S_0 f(t) + \cdots + S_{N-1} f(t)}{N}.$$

Demostrar que existe una función $f \in L^1[0, 2\pi]$ tal que la sucesión de valores $\{(\Phi_N f)(0)\}_{N=1}^{\infty}$ de sus medias de Fejér en $t = 0$ no está acotada. Recordar que

$$\big(\Phi_N f\big)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_N(s-t) f(s)\, ds; \qquad \Phi_N(s) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{Ns}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2$$

($\Phi_N(s)$ se llaman los núcleos de Fejér).

[En clase hemos demostrado una afirmación parecida para los núcleos de Dirichlet y el espacio $C_{per}[0, 2\pi]$ de funciones continuas y periódicas en $[0, 2\pi]$.]

Solución: Para cualquier N, la aplicación

$$f \in L^1[0, 2\pi] \mapsto \big(\Phi_N f\big)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_N(s) f(s)\, ds$$

es un funcional lineal, definido sobre $L^1[0, 2\pi]$. Por el Teorema de Riesz, $L^1[0, 2\pi]' = L^\infty[0, 2\pi]$. Es fácil ver que cada una de las funciones $\Phi_N(s)$ está acotada en $[0, 2\pi$ (el denominador se anula solo para $s = 0$ y $s = 2\pi$; en estos puntos hay límite finito por la regla de L'Hôpital).

Según el principio de acotación uniforme, para demostrar que existe una función $f \in L^1[0, 2\pi]$ tal que los valores $\langle f, \Phi_n \rangle$ no están uniformemente acotados, basta demostrar que

$$\sup_N \|\Phi_N\|_{L^\infty[0,2\pi]} = \infty. \tag{1}$$

Esto es obvio. Efectivamente, ya hemos visto que las funciones Φ_N son continuas en $[0, 2\pi]$. Luego

$$\|\Phi_N\|_{L^\infty[0,2\pi]} = \|\Phi_N\|_{C[0,2\pi]} \geq \lim_{s \to 0} \Phi_N(s) = \text{ (L'Hôpital) } = \frac{1}{N} \left(\frac{N/2}{1/2} \right)^2 = N \to +\infty$$

cuando $N \to +\infty$. Esto demuestra (1).

2. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en un espacio de Banach X.

   (a) Sea L el subespacio cerrado, generado por los vectores x_n. Demostrar que un vector $g \in X$ pertenece a L si y solo si para todo funcional $h \in X'$ tal que $\langle x_n, h \rangle = 0$ para todo n, se tiene también $\langle g, h \rangle = 0$.

   (b) Dada una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ de vectores en ℓ^∞, demostrar que existe un funcional lineal $h : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ continuo y no nulo, tal que $\langle x_n, h \rangle = 0$ para todo n.

Solución: **(a)**

1. Supongamos primero que $g \in L$, $h \in X'$ y que $\langle x_n, h \rangle = 0$ para todo n. Queremos comprobar que entonces se tiene $\langle g, h \rangle = 0$. Por definición, L es el cierre de la variedad lineal $\widetilde{L}$, que consiste de todas las combinaciones lineales finitas de vectores x_n. Si $\tilde{g} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ es un vector en $\widetilde{L}$, entonces

$$\langle \tilde{g}, h \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, h \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x_j, h \rangle = 0,$$

por la hipótesis. Si escogemos ahora cualquier vector g en L, entonces existe una sucesión de vectores $\tilde{g}_n \in \widetilde{L}$, que tienden a g. Por continuidad de h,

$$\langle g, h \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \tilde{g}_n, h \rangle = 0.$$

2. Recíprocamente, supongamos ahora que para todo funcional $h \in X'$,

$$\langle x_n, h \rangle = 0 \ \forall n \implies \langle g, h \rangle = 0. \tag{2}$$

Tenemos que concluír que $g \in L$. Si $g \notin L$, podemos considerar el espacio $L + \langle g \rangle$, generado por vectores del espacio L y el vector g. Es decir,

$$\langle g \rangle = \{cg : \ c \in \mathbb{K}\}; \qquad L + \langle g \rangle = \{\ell + cg : \ell \in L, c \in \mathbb{K}\}.$$

El conjunto $L + \langle g \rangle$ es una variedad lineal, y $\dim(L + \langle g \rangle)/L = 1$. Afirmamos que $L + \langle g \rangle$ es cerrado. Efectivamente, consideremos el espacio cociente de Banach X/L, definido en clase, y la proyección canónica $\pi : X \to X/L$. Entonces $L + \langle g \rangle$ es la antiimagen por π del espacio $< \pi(g) >$, que es cerrado por tener dimensión finita, igual a 1. Como la proyección canónica $\pi : X \to X/L$ es continua, $L + \langle g \rangle = \pi^{-1}(< \pi(g) >)$ es también cerrado.

Por uno de los ejercicios, la proyección paralela $L + \langle g \rangle \to \langle g \rangle$, que manda L en 0 y deja invariante cualquier vector del espacio $\langle g \rangle$, es continua. Componiéndola con cualquier isomorfismo $m : \langle g \rangle \to \mathbb{K}$ del espacio vectorial $\langle g \rangle$ sobre $\mathbb{K}$, obtenemos un funcional lineal continuo $h_0 : L + \langle g \rangle \to \mathbb{K}$, tal que

$$h_0 | L = 0, \quad \text{pero } h_0(g) \neq 0.$$

Según el Teorema de Hahn-Banach, se puede extender h_0 a un funcional lineal continuo $h : X \to \mathbb{K}$ (conservando su norma). Entonces $h(x_n) = 0$ para todo n (ya que $x_n \in L$, pero $h(g) \neq 0$. Es una contradicción con (2), lo que demuestra nuestra afirmación.

(b) Sea $L \subset \ell^\infty$ el subespacio (cerrado) de ℓ^∞, generado por los vectores x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces el conjunto de combinaciones lineales finitas de estos vectores con coeficientes en $\mathbb{Q}$ es numerable y es denso en L respecto de la norma de ℓ^∞ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, utilizamos aquí el cuerpo $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ en vez de $\mathbb{Q}$). Esto nos dice que L es siempre separable. Como ℓ^∞ no es separable (se vió en clase), $L \neq \ell^\infty$. Igual que en el razonamiento anterior, podemos encontrar un vector $g \in \ell^\infty$, que no está en L, y luego un funcional $h \in X'$ no nulo tal que $h|L = 0$, pero $h(g) \neq 0$. Es el funcional que hemos buscado.

3. Dados un espacio de Banach X, un operador continuo $A \in L(X)$ y un funcional $f \in X'$, demostrar que son equivalentes las afirmaciones:

   (i) $|\langle x, f \rangle| \leq \|Ax\|, \quad \forall x \in X;$

   (ii) $\exists g \in X'$ tal que $\|g\|_{X'} \leq 1$ y $A'g = f$.

Solución: Es más fácil ver que (ii) $\implies$ (i). Efectivamente,

$$\text{(ii)} \implies |\langle x, f \rangle| = |\langle x, A'g \rangle| = |\langle Ax, g \rangle| \leq \|g\| \|Ax\| \leq \|Ax\|$$

(según (ii), $\|g\| \leq 1$).

(i) $\implies$ (ii). Supongamos (i). Entonces podemos definir un funcional lineal g_0 sobre el rango $AX \subset X$, poniendo

$$\langle Ax, g_0 \rangle := \langle x, f \rangle.$$

Observamos que AX es una subvariedad lineal de X, que puede ser no cerrada. La hipótesis (i) nos dice que el funcional g_0 es acotado en AX: $|\langle y, g_0\rangle| \leq \|y\|$ para todo $y \in AX$. Luego $\|g_0\| \leq 1$. En particular, se sique que g_0 está bien definido. Hay una forma única de extender g_0 al cierre $\overline{AX}$ en X sin aumentar su norma. Por el teorema de Hahn-Banach, luego podemos encontrar la extensión $g : X \to \mathbb{K}$ de g_0, $g \in X'$, tal que $\|g\| = \|g_0\|$ y $g\big|\overline{AX} = g_0$. Entonces $\|g\|_{X'} \leq 1$. Finalmente, para todo $x \in X$,

$$\langle x, A'g\rangle = \langle Ax, g\rangle = \langle Ax, g_0\rangle = \langle x, f\rangle .$$

Esto significa que $A'f = g$.

4. Sean X un espacio de Banach (sobre $\mathbb{K}$), $x_0 \in X$ un vector, $\{f_n\}$ una sucesión de funcionales *no nulos* en X' y $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión de escalares. Demostrar que todo entorno $B(x_0, \varepsilon)$ de x_0 contiene al menos un vector x tal que

$$\forall n, \quad \langle x, f_n\rangle \neq a_n.$$

Solución: Es un ejemplo de aplicación del Teorema de Baire. Dado un funcional no nulo $f \in X'$ y un escalar a, el conjunto $H_{f,a} = \{x \in X : \langle x, f\rangle = a\}$ se suele llamar un hiperplano. Veamos primero que su interior es vacío. Efectivamente, busquemos cualquier vector $y \in X$ tal que $\langle y, f\rangle \neq 0$ (Hahn-Banach asegura su existencia). Sea $p_0 \in H_{f,a}$. Luego $p_0 + ty \notin H_{f,a}$ para todo $t \in \mathbb{K}$, $t \neq 0$ (porque $\langle p_0 + ty, f\rangle \neq a$). Esto implica que cualquier entorno de p_0 contiene puntos que no pertenecen al hiperplano $H_{f,a}$. Por tanto, el interior de $H_{f,a}$ es vacío. Ya que $H_{f,a}$ es cerrado, deducimos que cualquier hiperplano $H_{f,a}$ es un conjunto diseminado.

Sean $x_0 \in X$, $f_n \in X'$ ($f_n \neq 0$), $a_n \in \mathbb{K}$ y $\varepsilon > 0$, como en el enunciado en el problema. Entonces las intersecciones $H_{f_n,a_n} \cap \overline{B(x_0, \varepsilon/2)}$ son subconjuntos diseminados de la bola cerrada $\overline{B(x_0, \varepsilon/2)}$. Como $\overline{B(x_0, \varepsilon/2)}$ es un espacio métrico completo no vacío, por el Teorema de Baire concluimos que la unión de los hiperplanos H_{f_n,a_n} no puede cubrir toda la bola cerrada $\overline{B(x_0, \varepsilon/2)}$. Por lo tanto, existe un $x \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que $\langle x, f_n\rangle \neq a_n$ para todo n.