1. **a)** Dados espacios normados X e Y sobre $\mathbb{K}$, definir la norma de un operador lineal $T : X \to Y$ y dar sus distintas caracterizaciones. Suponiendo que $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ son dos operadores lineales, demostrar que $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Dar un ejemplo, cuando la desigualdad es estricta.

   b) Supongamos que el espacio normado $L(X, Y)$ de operadores lineales de X a Y es de Banach. ¿Se sigue que X es de Banach? ¿Se sigue que Y es de Banach? Justificarlo en cada caso.

   c) Se dice que un operador lineal $T : X \to Y$ alcanza su norma si $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$ para algún vector $x \in X$ no nulo. Dada una función medible φ en $[0, 1]$, se considera el operador T, definido por $Tf(x) = \varphi(x)f(x)$, donde $f \in L^1[0, 1]$.

   ¿Para qué funciones φ es T acotado como operador lineal de $L^1[0, 1]$ a $L^1[0, 1]$? Calcular su norma. ¿Para qué funciones φ, el operador T alcanza su norma?

   Solución:

   a) La norma de un operador $T : X \to Y$ se define como

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

   En clase vimos sus definiciones equivalentes:

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

   Si estos supremos son infinitos, se escribe $\|T\| = +\infty$. Se dice que el operador T es acotado si su norma es finita. Obviamente, $\|T\| \geq 0$ para cualquier operador T.

   Además, la norma $\|T\|$ es igual a la mínima constante K tal que

$$\|Tx\| \leq K\|x\|, \quad x \in X; \tag{1}$$

   tal constante K siempre existe y es única.

   Utilicemos esta última caracterización para demostrar la desigualdad $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Evectivamente, sean $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ operadores lineales cualesquiera. Para todo vector x en X, según (1), tenemos

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

   es decir, $\|STx\| \leq K_0\|x\|$, donde $K_0 = \|S\|\|T\|$. Por otro lado, (1) nos dice que $\|ST\|$ es igual a la mínima constante K para la que la desigualdad $\|STx\| \leq K\|x\|$ es válida para todo vector x. Luego $\|ST\| \leq K_0 = \|S\|\|T\|$.

   Esta desigualdad puede ser estricta, por ejemplo, en los casos cuando $ST = 0$, mientras que S, T son no nulos. Un ejemplo concreto de operadores entre espacios finito dimensionales:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^2,$$

   entonces $ST : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es nulo.

---

   b)

   - **Sí** se sigue que Y es de Banach (es un teorema visto en clase).

- **No** se sigue que X es de Banach. De hecho, como hemos visto en clase, si Y es de Banach, X no es completo y $\widetilde{X}$ es su compleción, entonces todo operador lineal $T : X \to Y$ se extiende de una forma única a un operador lineal $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to Y$, que tiene la misma norma.

  Por tanto, si Y es de Banach, X no lo es, y $\widetilde{X}$ es la compleción de X, entonces $L(X, Y)$ es (isométricamente) isomorfo al espacio $L(\widetilde{X}, Y)$, este último espacio siendo de Banach, como ya hemos comentado. Luego en este caso $L(X, Y)$ es de Banach. Así que toda vez cuando X no es de Banach y Y sí lo es, el espacio $L(X, Y)$ va a ser de Banach. Por ejemplo, se puede escoger $X = C[0, 1]$ con la norma de $L^2[0, 1]$ e $Y = \ell^p$, $1 \le p \le infty$.

c) La respuesta es que T es acotado si y solo si $\sup \mathrm{ess}_{[0,1]} |\varphi| < \infty$, en otras palabras, si φ es (un representante de) un elemento de $L^\infty[0, 1]$ (respecto de la medida de Lebesgue). Efectivamente, $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ si y solo si existe un $M \in [0, \infty)$ tal que

$$E_M := \{t \in [0, 1] : \quad |\varphi(t)| > M\} \quad \text{tiene medida cero.} \tag{2}$$

Si (2) se cumple, entonces

$$\|\varphi f\|_2^2 = \int_0^1 |\varphi f|(t)^2\, dt \le M^2 \int_0^1 |\varphi f|(t)^2\, dt = M^2 \|\varphi f\|_2^2$$

para toda función f en $L^2[0, 1]$, de forma que $\|T\| \le M$. Si (2) no se cumple, entonces la función característica χ_{E_M} es un elemento no nulo de $L^2[0, 1]$, que según el mismo cálculo cumple

$$\|\varphi \chi_{E_M}\|_2^2 \ge M^2 \|\chi_{E_M}\|_2^2 > 0.$$

Esto implica que

2. **a)** Sea (X, d) un espacio métrico *completo.* Sea $T : X \to X$ una aplicación, tal que para algún m, T^m es *débilmente contractiva:*

$$d(T^m x, T^m y) < d(x, y) \quad \text{si } x, y \in X, x \ne y.$$

Suponiendo que X es compacto, demostrar que T tiene un único punto fijo.

b) Sea $T : X \to X$ una aplicación continua, donde X es un espacio métrico completo, y sea a una constante positiva. Demostrar que X es completo también respecto de la métrica

$$d_1(x, y) = d(x, y) + a d(Tx, Ty).$$

c) Sea X un espacio métrico. Sea $T : X \to X$ una aplicación continua, que satisface

$$d(T^2 x, T^2 y) < s\, d(x, y) + t\, d(Tx, Ty) \quad \text{si } x, y \in X, x \ne y.$$

donde s, t son constantes positivas tales que $s+t < 1$. Aplicar el apartado anterior para demostrar que T tiene un único punto fijo.

Solución:

a) *Existencia:* Consideremos la siguiente función $\varphi : X \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := d(x, Tx).$$

Como d es continua de $X \times X$ a $\mathbb{R}$ y T es continuo, φ es continua. Como X es un compacto, existe el punto $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) = \min_X \varphi$. Entonces $\varphi(T^{m-1} x_0) \ge \varphi(x_0)$, en otras palabras,

$$d(T^{m-1} x_0, T^m x_0) \ge d(x_0, T x_0). \tag{3}$$

Si $x_0 \neq Tx_0$, entonces tenemos las desigualdades contrarias, porque T es débilmente contractiva:

$$d(x_0, Tx_0) > d(Tx_0, T^2x_0) \geq \cdots \geq d(T^{m-1}x_0, T^m x_0). \tag{4}$$

Ya que (4) contradice a (3), concluímos que en realidad $x_0 = Tx_0$, luego x_0 es un punto fijo de T.

Unicidad: Según la hipótesis, $d(a, b) = d(T^m a, T^m b)$ solo es posible si $a = b$. Sean ahora a y b dos puntos fijos de T. Entonces $T^m a = a$, $T^m b = b$. Luego $d(a, b) = d(T^m a, T^m b)$, y por tanto, $a = b$.

b) Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy respecto de la nueva métrica d_1. Tenemos que demostrar que tiene un límite en X respecto de esta métrica. Notamos primero que

$$d(x_n, x_m) \leq d_1(x_n, x_m) \to 0 \quad \text{cuando } m, n \to \infty.$$

Como (X, d) es completo, se sigue que existe un punto $\beta \in X$ tal que $d(x_n, \beta) \to 0$, $n \to \infty$. Ya que T es continua, se tiene también $d(Tx_n, \beta) \to 0$, $n \to \infty$. Luego

$$d_1(x_n, \beta) = d(x_n, \beta) + d(Tx_n, T\beta) \to 0, \quad n \to \infty.$$

c)

3. **a)** Demostrar el lema sobre las bolas encajadas: *Sea X es un espacio métrico completo. Entonces toda sucesión de bolas cerradas $\{\bar{B}_{r_n}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en X tiene intersección no vacía si $\bar{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \bar{B}_{r_n}(x_n)$ para todo n y los radios r_n tienden a 0.*

   b) Demostrar que si X es un espacio métrico en el que se cumple el lema sobre las bolas encajadas, entonces X es completo.