Análisis Funcional. Grado de Matemáticas de la UAM *Curso 2018/19*

Parcial 1, 27 de marzo de 2019

Apellidos ____________________.____________________ Nombre ____________________ Grupo ______

1. **a)** Dados espacios normados X e Y sobre $\mathbb{K}$, definir la norma de un operador lineal $T : X \to Y$ y dar sus distintas caracterizaciones. Suponiendo que $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ son dos operadores lineales, demostrar que $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Dar un ejemplo, cuando la desigualdad es estricta.

   b) Supongamos que el espacio normado $L(X, Y)$ de operadores lineales de X a Y es de Banach. ¿Se sigue que X es de Banach? ¿Se sigue que Y es de Banach? Justificarlo en cada caso.

   c) Se dice que un operador lineal $T : X \to Y$ alcanza su norma si $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$ para algún vector $x \in X$ no nulo. Dada una función medible φ en $[0, 1]$, se considera el operador T, definido por $Tf(x) = \varphi(x)f(x)$, donde $f \in L^1[0, 1]$.

   ¿Para qué funciones φ es T acotado como operador lineal de $L^1[0, 1]$ a $L^1[0, 1]$? Calcular su norma. ¿Para qué funciones φ, el operador T alcanza su norma?

2. **a)** Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $T : X \to X$ una aplicación, tal que para algún m, T^m es *débilmente contractiva:*

   $$d(T^m x, T^m y) < d(x, y) \quad \text{si } x, y \in X, x \neq y.$$

   Suponiendo que X es compacto, demostrar que T tiene un único punto fijo.

   b) Sea $T : X \to X$ una aplicación continua, donde X es un espacio métrico comlpeto, y sea a una constante positiva. Demostrar que X es completo también respecto de la métrica

   $$d_1(x, y) = d(x, y) + ad(Tx, Ty).$$

   c) Sea X un espacio métrico completo. Sea $T : X \to X$ una aplicación continua, que satisface

   $$d(T^2 x, T^2 y) < s\, d(x, y) + t\, d(Tx, Ty) \quad \text{si } x, y \in X, x \neq y.$$

   donde s, t son constantes positivas tales que $s+t < 1$. Aplicar el apartado anterior para demostrar que T tiene un único punto fijo.

3. **a)** Demostrar el lema sobre las bolas encajadas: *Sea X es un espacio métrico completo. Entonces toda sucesión de bolas cerradas $\{\bar{B}_{r_n}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en X tiene intersección no vacía si $\bar{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \bar{B}_{r_n}(x_n)$ para todo n y los radios r_n tienden a 0.*

   b) Demostrar que si X es un espacio métrico en el que se cumple el lema sobre las bolas encajadas, entonces X es completo.