1. Demostrar que el operador S_{d} de desplazamiento hacia la derecha, definido por $S_{\mathrm{d}}(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$, es un operador lineal y acotado de ℓ^2 en ℓ^2. Calcular su norma.

   Hacer lo mismo con el operador S_{i} de desplazamiento a la izquierda, definido por $S_{\mathrm{i}}(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$.

2. Calcular el conjunto de autovalures de los operadores S_{i} y S_{d}.

3. Decidir si $S_{\mathrm{d}}^n \to 0$ y si $S_{\mathrm{i}}^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, respecto a las topología de la norma y las topologías WOT y SOT.

Teorema de la gráfica cerrada, etc.

4. Sean X, Y espacios de Banach y sea $A \in L(X, Y)$. Demostrar que existe una constante $c > 0$ tal que $\|Ax\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in X$ si y solo si $\ker A = 0$ y $\operatorname{Ran} A$ es un subespacio cerrado de Y.

5. Demostrar que el operador $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ dado por $T\Big((x_k)_{k=1}^\infty\Big) = \big(\frac{x_k}{k}\big)_{k=1}^\infty$ es lineal y acotado. Demostrar que $\mathcal{R}(T)$ no es cerrado en ℓ^∞.

6. Dar un ejemplo de un operador acotado $T : X \to X$, donde X es un espacio de Banach tal que $\ker T = 0$, pero $T^{-1} : \operatorname{Ran} T \to X$ no es acotado (respecto de la norma de X en $\operatorname{Ran} T$).

   Sugerencia. Usar el operador T del problema anterior.

7. **(a)** Sean X e Y espacios de Banach. Sea F un subconjunto del dual Y' que separa puntos de Y, es decir, cumple
$$y \in Y,\ \langle y, f \rangle = 0 \quad \forall f \in F \qquad \Longrightarrow\ y = 0.$$
   (En particular, se puede escoger $F = Y'$.) Demostrar que entonces un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si y solo si $f \circ T$ es continuo para todo funcional lineal $f \in F$.

   Indicación: Utilizar el Teorema de la Gráfica cerrada.

   (b) Sea $T : \ell^p \to \ell^q$ un operador lineal acotado, donde $p, q \in (1, +\infty)$, y sea $(t_{jk})_{j,k=1}^\infty$ su matriz, definida respecto de las bases canónicas en ℓ^p y ℓ^q.

   Demostrar que cada fila de la matriz pertenece a $\ell^{p'}$ (donde $1/p + 1/p' = 1$), y que sus normas en $\ell^{p'}$ son uniformemente acotadas.

   (c) Ahora supongamos que $(t_{jk})_{j,k=1}^\infty$ es una matriz arbitraria de elementos del cuerpo $\mathbb{K}$, tal que todas sus filas pertenecen a $\ell^{p'}$. Poniendo
$$(Tx)_j = \sum_{k=1}^\infty t_{jk} x_k, \quad x = \{x_k\} \in \ell_p,$$
   definimos correctamente un operador lineal T de ℓ_p al espacio vectorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, que consiste de todas las sucesiones, cuyos términos están en $\mathbb{K}$ (estas sumas convergen absolutamente). Supongamos que la imagen de T se contiene en ℓ^q. Aplicando la parte (a), demostrar que T es un operador acotado de ℓ^p a ℓ^q.

Espacios reflexivos etc.

8.* Demostrar que la convergencia débil en ℓ^1 de una sucesión de vectores equivale a la convergencia en norma.

9. Demostrar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

10. Comprobar que c_0 no es reflexivo.

11. Sean X e Y espacios vectoriales normados que son isomorfos mediante una aplicación que conserva las normas. Si Y es reflexivo, demostrar que X es reflexivo.

12. Si un espacio normado X es reflexivo, demostrar que X' es reflexivo.

13. Demostrar que un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si X' es reflexivo.

    Sugerencia: Puede demostrarse que un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo es reflexivo; utilizar esto, sin demostrarlo.

14. Demostrar que los espacios $L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, donde μ es una medida, son reflexivos. En particular, son reflexivos espacios ℓ^p con $1 < p < \infty$.

15. **(a)** Demostrar que
$$c = \big\{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^{\infty} : \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n\big\}$$
    es un subespacio cerrado de ℓ^{∞}.

    (b) Demostrar que existe un funcional lineal $\Phi : \ell^{\infty} \to \mathbb{K}$ de norma 1 tal que $\Phi\big((x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} x_n$ para todo vector $x = (x_n)$ en c.

    (c) Deducir que ℓ^1 no es reflexivo.

16. **(continuación: límite de Banach)** Consideremos el caso de ℓ^{∞} real. Demostrar que el funcional $\Phi : \ell^{\infty}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ del ejercicio 15 puede ser elegido de tal forma que para toda sucesión (x_n) en $\ell^{\infty}_{\mathbb{R}}$, se cumplan las propiedades

    (i) $\liminf x_n \le \Phi\big((x_n)\big) \le \limsup x_n$ (en particular, $\Phi\big((x_n)\big) \ge 0$ si $x_n \ge 0$);

    (ii) $\Phi\big((x_{n+1})\big) = \Phi\big((x_n)\big)$.

17. Dar un ejemplo de una sucesión $x \in \ell^2$ y un sistema ortonormal en ℓ^2 para los que la desigualdad de Bessel sea una desigualdad estricta.

18. (Convergencia en L^2 y convergencia puntual)

    (i) Demostrar que existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones de $L^2(0,1)$ tal que g_n tiende a cero en la norma de $L^2(0,1)$ pero no tiende a cero puntualmente.

    (ii) Demostrar que existe una sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones de $L^2(0,1)$ tal que h_n tiende a cero puntualmente pero no tiende a cero en la norma de $L^2(0,1)$.

Convergencia débil y débil-$*$.

19. Demostrar lo siguente. Sea X un espacio de Banach, y sean $x_n \in X$, $f_n \in X'$. Si $x_n \to x$ débilmente y $f_n \to f$ en norma, entonces
$$\langle x_n, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle.$$

20. **(a)** Sean $\{e_n\}$ la base canónica de ℓ^p, $1 < p < \infty$. Demostrar que e_n tienden a 0 en la topología débil.

    (b) ¿Es cierta esta aficmación para $p = \infty$? ¿Y para $p = 1$?

21. Sea H un espacio de Hilbert separable, y sea $S = \{x \in H : \ \|x\| = 1\}$ **la esfera unidad** en H. Demostrar que S no es cerrada en la topología débil y que su cierre en esta topología es **la bola unidad cerrada** $\bar{B}_1(0)$ (centrada en 0).

    Indicación: Elegir una base ortonormal $\{e_n\}$ en H. Dado cualquier vector $x \in \bar{B}_1(0)$, buscar una sucesión acotada de escalares $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $x + \alpha_n e_n \in S$ para todo n y $x + \alpha_n e_n \to x$ débilmente cuando $n \to \infty$.

Espacios de Hilbert y operadores lineales acotados entre ellos.

22. En un espacio pre-Hilbert H, si $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle$ para todo $y \in H$, demostrar que $x_1 = x_2$.

23. En el espacio vectorial $C[a,b]$ de las funciones continuas definidas en $[a,b]$ con valores complejos, definimos $\|f\|_{\infty} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Demostrar que es imposible definir un producto escalar en $C[a,b]$ de manera que $\|f\|_{\infty}^2 = \langle f, f\rangle$.

24. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma $\|(x_1,x_2)\| = \text{máx}\{|x_1|,|x_2|\}$. ¿Puede definirse en $\mathbb{R}^2$ un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de manera que $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$, donde $x=(x_1,x_2)$?

25. Demostrar que en un espacio vectorial complejo con un producto escalar $x\perp y$ si y solo si $\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|$ para todo $\alpha\in\mathbb{C}$.

26. Sea $A\in\mathcal{L}(H)$ un operador con matriz (a_{ij}) con respecto a la base ortonormal de H dada por $\{e_j\}_{j=1}^\infty$. Demostrar que la matriz de A^* en esta misma base ortonormal es $(\overline{a_{ji}})$.

27. Sea $k\in L^2([c,d]\times[a,b])$. Hallar el adjunto del operador $K : L^2[a,b]\to L^2[c,d]$ definido por

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

28. (i) Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y $T\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$. Demostrar que $T=0$ si y solo si $\langle Tx,y\rangle = 0$ para todo $x\in H_1$, $y\in H_2$

    (ii) Sea $T\in\mathcal{L}(H)$, siendo H un espacio de Hilbert complejo. Demostrar que si $\langle Tx,x\rangle = 0$ para todo $x\in H$, entonces $T=0$.

    (iii) Demostrar que el resultado del apartado anterior no es cierto si H es un espacio de Hilbert real.

29. Sea H un espacio de Hilbert y $T_n\in\mathcal{L}(H)$, $n\in\mathbb{N}$. Demostrar que si la sucesión $(T_n)_{n=1}^\infty$ converge en norma a un operador T y cada operador T_n es autoadjunto, entonces T es también un operador autoadjunto.

30. Sea $U\in\mathcal{L}(H)$ un operador unitario. Demostrar que U es una isometría, esto es, que $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x\in H$.

31. (i) Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T\in\mathcal{L}(H)$. Demostrar que T es unitario si y solo si T es una isometría suprayectiva.

    (ii) Dar un ejemplo de un operador que sea una isometría pero que no sea unitario.

32. Sea $P\in\mathcal{L}(H)$. Demostrar que P es una proyección ortogonal sobre un subespacio M de H si y solo si $P^2=P$ y P es autoadjunto.

Problemas adicionales

33. Consideramos las funciones $x_n(t)=t^n$ como vectores en el espacio de Banach $C[0,1]$. Observar que, por el Teorema de Weierstrass, es una familia completa en $C[0,1]$. Demostrar que, sin embargo, se cumple lo siguiente.

    Existe un dominio $\Omega\subset\mathbb{C}$, que contiene 0, con la siguiente propiedad. Sea $g(t)\in C[0,1]$ cualquier función que admite una representación

$$g(t) = \sum_{n=0}^\infty c_n x_n(t),$$

    que converge en la norma de $C[0,1]$. Entonces g se extiende a una función holomorfa en Ω.

    En particular, no toda función $g\in C[0,1]$ se desarrolla en una serie de este tipo, lo que significa que las funciones t^n, $n\ge 0$, están lejos de ser una base de Schauder.

    En una de las primeras hojas de ejercicios, se proponía un ejemplo concreto de una base de Schauder en el espacio $C[0,1]$.

34. Hay diferentes formas no equivalentes de definir una suma directa de una sucesión infinita de espacios de Banach. Si todos ellos son iguales a un espacio de Banach dado X, podemos definir, por ejemplo, la ℓ_∞-*suma directa*

$$\big(\oplus_{n\ge1}\big)_\infty X := \big\{x=(x_n) : x_n\in X\ \ \forall n, \quad \|x\| := \sup_n \|x_n\|_X < \infty.\big\}$$

    Demostrar que $\big(\oplus_{n\ge1}\big)_\infty X$ es un espacio de Banach.

Va a haber un ejercicio más sobre funcionales lineales asociados a una base de Schauder (ver el Ejercicio 19 de la Hoja 4)