Hoja de problemas 4

Operadores y sus normas

1. El operador de Volterra en $L^2[0,1]$ está definido por $Vf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, $0 \le t \le 1$.
   (i) Resolver la ecuación integral $f(t) = \operatorname{sen} t + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$.
   (ii) Demostrar por inducción que $(V^n f)(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\,\mathrm{d}s$.
   (iii) Deducir que para todo $\mu \in \mathbb{C}$ y para todo $g \in L^2[0,1]$, la ecuación $(I - \mu V)f = g$ tiene una única solución $f \in L^2[0,1]$.
   Indicación: Utilizar el apartado (ii), uno de los teoremas del punto fijo, vistos en clase, y la estimación $\|K\|^2 \le \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2\,dt\,ds$. Es válida para cualquier operador integral $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, definido por $Kf(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds$.
   (iv) Recordar, si vimos en clase un teorema que implica (iii) directamente.

2. Sean X e Y espacios de Banach.
   (i) Sea $y \in Y$ y $f \in X'$. Demostrar que el operador
   $$Kx = f(x)y$$
   es lineal y continuo de X a Y. Calcular su norma.
   (ii) Dados vectores linealmente independientes $\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$, y funcionales lineales $\{f_1, \dots, f_n\}$ en X, demostrar que el operador $K : X \to Y$ definido por
   $$Kx = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$$
   es lineal y de rango finito, es decir, $\dim \operatorname{Ran}(K) < \infty$.
   (iii) Demostrar que todo operador lineal $K : X \to Y$ de rango finito n es de la forma del operador K del apartado (ii).
   (iv) Demostrar que K es acotado si y solo si los funcionales f_j son continuos.

Funcionales lineales y el Teorema de Hahn-Banach

3. Consideramos $\mathbb{N}$ con la relación de orden parcial $m \le n$ si m divide a n. Encontrar todos los elementos maximales de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y del conjunto de todos los números primos.

4. Sea X un espacio de Banach complejo, y sea $f \in X'$. Dadas unas constantes reales a, b, expresar la norma del funcional $\mathbb{R}$-lineal $a \operatorname{Re} f + b \operatorname{Im} f$ en términos de $\|f\|$.

5. Sea $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal, es decir, p satisface **(a)** $p(x+y) \le p(x) + p(y)$; **(b)** $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \ge 0$. Demostrar que:
   (i) $p(0) = 0$;
   (ii) $p(-x) \ge -p(x)$ para todo $x \in X$;
   (iii) $M_\gamma = \{x \in X : p(x) \le \gamma\}$ es convexo para cada $\gamma > 0$.

6. Demostrar que si un funcional sublineal p en un espacio normado X es continuo en 0, entonces es continuo para todo $x \in X$.

7. Si p es un funcional sublineal en un espacio vectorial real X, demostrar que existe un funcional lineal f en X tal que $-p(-x) \le f(x) \le p(x)$.

8. Sea X un espacio normado y X' su dual. Si $X \ne \{0\}$, demostrar que $X' \ne \{0\}$.

El Teorema de Baire

9. Demostrar que la conclusión del Teorema de Baire sigue siendo cierta si, en vez de un espacio métrico completo, se considera espacio localmente compacto Hausdorff.

10. Dado un $N \in \mathbb{N}$, demostrar que el conjunto

$$F_N = \left\{ f \in C[0,1] : \exists a \in [0,1] : \forall x \in [0,1] : \ x \neq a \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq N \right\}$$

es cerrado en el espacio $C[0,1]$.

11. *(continuación)* Demostrar que los conjuntos F_N son diseminados. Utilizando el Teorema de Baire, deducir que el conjunto de funciones $f \in C[0,1]$, que tiene derivada finita en algún punto $a \in [0,1]$, es residual (es decir, su complemento es de primera categoría).

En particular, existen funciones continuas en $[0,1]$, que no son derivables en ningún punto.

En los siguientes ejercicios 12–15, se supone que X es un espacio de Banach infinito dimensional.

12. Sea $\{L_n\}$ una sucesión creciente de subespacios (cerrados) de X:

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots .$$

Se conoce que $\cup_k L_k = X$. Demostrar que entonces $L_n = X$ para algún n.

¿Es cierta esta afirmación, suponiendo solo que X es un espacio normado?

Observación: Este ejercicio permite resolver de forma sencilla el ejercicio 18 (a) de la Hoja 3.

13. Demostrar que un espacio de Banach X infinito dimensional no puede tener una base de Hamel numerable.

Indicación: Utilizar el ejercicio anterior.

14. Supongamos ahora que tenemos una familia

$$\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset X'$$

de funcionales lineales continuos sobre X. Se sabe que para todo vector $\vec{x} \in X$, hay solo un número finito de índices α, tales que $\langle \vec{x}, f_\alpha \rangle \neq 0$.

Demostrar que entonces la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ solo puede tener un número finito de elementos no nulos.

Indicación: Aquí no se supone que el conjunto de índices $\mathfrak{A}$ es numerable. Sugerimos ver primero que, sin embargo, basta demostrar esta afirmación para sucesiones de funcionales lineales. Utilizar el ejercicio 12.

15. Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ una base de Hamel de un espacio de Banach infinito dimensional X. Es decir, todo vector x se representa de forma única como una suma finita

$$x = \sum_{\text{finita}} f_\alpha(x) e_\alpha.$$

Demostrar que los funcionales $f_\alpha : X \to \mathbb{K}$ son lineales. Demostrar que al menos uno de ellos es discontinuo.

Teorema de Banach-Steinhaus. Convergencia fuerte de operadores

16. Demostrar que la completitud de X es esencial en el principio de la acotación uniforme, considerando X como la subvariedad lineal $\mathbb{C}_f^{\mathbb{N}}$ de ℓ^∞ de las sucesiones que solo tienen un número finito de términos distintos de 0, y definiendo $T_n x = n x_n$.

17. Sean X, Y, Z espacios normados y sean $T_n \in L(X,Y)$, $S_n \in L(Y,Z)$ tales que $T_n \to T$, $S_n \to S$ fuertemente cuando $n \to \infty$, donde $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$. Demostrar que $S_n T_n \to ST$ en el sentido fuerte.

18. *(el principio de acumulación de singularidades)* Supongamos que $T_{jk}(j, k \in \mathbb{N})$ son operadores acutados de X a Y, donde X e Y son espacios de Banach. Demostrar el siguiente resultado:

si para todo j,

$$\sup_k \|T_{jk}\| = +\infty,$$

entonces existe un vector $\vec{x}$ en X que cumple

$$\forall j, \quad \sup_k \|T_{jk}x\| = +\infty.$$

19. Recordamos que una sucesión $\{e_n : n \geq 1\}$ de vectores de un espacio de Banach X se dice que es *una base de Schauder* si todo vector $x \in X$ se representa de forma única como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) e_n,$$

donde $f_n(x) \in \mathbb{K}$. **En este ejercicio, consideramos conocido que para cualquier base de Schauder, todos los funcionales f_n son continuos (lo que veremos, si tenemos suerte, más adelante)**.

Demostrar que $\{e_n : n \geq 1\}$ es una base de Schauder en X si y solo si se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\overline{\mathrm{Lin}}\{e_n : n \geq 1\} = X$ (es decir, la familia $\{e_n : n \geq 1\}$ es completa);

2) Los operadores P_n, definidos en el subconjunto denso de combinaciones lineales finitas $\sum_{\text{finita}} \alpha_j x_j$ por

$$P_n\Bigg(\sum_{\text{finita}} \alpha_j x_j\Bigg) := \sum_{j \leq n} \alpha_j x_j,$$

son uniformemente acotados.

Teoremas de la función inversa y de la gráfica cerrada

20. Sea X un espacio de Banach y sean L y M sus subespacios (cerrados), cuya intersección es $\{0\}$. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   (i) $L + M$ es cerrado;

   (ii) La proyección paralela $P_{\|} : L + M \to L$, definida por

   $$P_{\|}(\ell + m) := \ell, \qquad \ell \in L, m \in M,$$

   es continua.

Indicación: Aplicar el Teorema de los isomorfismos de Banach.

21. Dar un ejemplo de espacios normados E y F y un operador biyectivo $T \in \mathcal{B}(E, F)$ que no sea invertible (esto es, T^{-1} es un operador no acotado).

Sugerencia. Tomar $E = C[0, 1]$ y $T = V|_E$, siendo V el operador de Volterra, o, alternativamente, usar el operador de diferenciación entre espacio normados adecuados (no completos).