Hoja de problemas 3

1. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y $T_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $n = 1, 2, \ldots$, operadores lineales acotados. Demostrar que la convergencia $T_n \to T$ implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para todo $n > N$ y todo x en cualquier bola cerrada se tiene que $\|T_n x - Tx\|_{\mathbb{Y}} < \varepsilon$.

2. Sea $-\infty < a \leq c \leq b < \infty$. Demostrar que el funcional lineal F sobre $C([a, b])$ definido por $F(f) = f(c)$ para $f \in C([a, b])$ es continuo con respecto a la norma del supremo, pero no lo es con respecto a la norma $L^2((a, b))$ (restringida a $C([a, b])$).

3. En el espacio $\mathcal{P}$ de las funciones polinómicas en $[0, 1]$ definimos el funcional C_n del n-ésimo coeficiente como el funcional que a un polinomio $p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$, $0 \leq t \leq 1$, le asigna $C_n(p) = a_n$ si $n \leq m$, y $C_n(p) = 0$ si $n > m$. Demostrar que C_n es discontinuo con respecto a las norma del supremo. *Sugerencia:* Considerar $p_k(t) = (1 - t)^k / \binom{k}{n}$.

4. Sea X un espacio normado. Fijamos un p, $1 \leq p < \infty$.

   a) Demostrar que para todo operador lineal $T : \ell^p \to X$,
$$\|T\| \geq \sup_n \|Te_n\|_X,$$
   donde $\{e_n\}$ es la base canónica en ℓ^p. Demostrar que un operador lineal continuo $T : \ell^p \to X$ se determina de forma única por sus valores en los vectores e_n.

   b) ¿Hay un valor de p tal que la desigualdad anterior es siempre una igualdad, para cualquier operador T?

5. Demostrar que un operador lineal continuo $T : X \to \ell^\infty$ se determina de manera única por una sucesión de funcionales lineales $\{\tau_n\}$ en X', con cierta propiedad de acotación. Expresar la norma de T a partir de las normas de estos funcionales.

6. Consideramos un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_r$, donde $p, r \in [1, \infty)$. Denotamos por t_{jk} los elementos de la matriz de T, es decir, ponemos $Te_k = \{t_{jk}\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$, donde $\{e_k\}$ es la base canónica en ℓ^p.

   Para todo $N = 1, 2, \ldots$, consideramos la matriz finita $T_N = \{t_{jk}\}_{1 \leq j,k \leq N}$ de tamaño $N \times N$. Demostrar que
$$\|T\|_{L(\ell_p, \ell_r)} = \sup_N \|T_N\|_{L(\ell_p^N, \ell_r^N)},$$
   donde ℓ_p^N es el espacio finito dimensional $\mathbb{K}^N$, con la norma $(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p)^{1/p}$. En particular, T es acotado si y solo si las normas de matrices finitas T_N en $L(\ell_p^N, \ell_r^N)$ están uniformemente acotadas.

   ¿Cómo podemos reformular esta afirmación para el caso de $p = r = 2$, utilizando los valores singulares de las matrices T_N?

7. Sea μ una medida positiva en un espacio medible $(\Omega, \mathfrak{A})$ Se dice que μ es *semifinita* si todo conjunto F medible (es decir, perteneciente al σ-álgebra $\mathfrak{A}$) con $0 < \mu(F) \leq \infty$ tiene un subconjunto medible G tal que la medida $\mu(G)$ es finita y no nula.

   Demostrar que toda medida positiva σ-finita es semifinita. Dar un ejemplo de una medida, que es semifinita, pero no es σ-finita.

8. Sea μ una medida positiva. Dada una función $f \in L^\infty(\mu)$, consideramos el funcional ω_f sobre $L^1(\mu)$, definido por $\omega_f(x) = \int x f \, d\mu$, $x \in L^1(\mu)$. Comprobar que es un funcional acotado. Suponiendo que μ es semifinita, demostrar que
$$\|\omega_f\|_{L^1(\mu)'} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

9. Calcular la norma del funcional lineal F en $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ dado por $F(f) = \int_0^1 x f(x) \, dx$. Encontrar un elemento de $C([0, 1])$ en el que F alcance su norma; es decir, un elemento f de norma 1 tal que $|F(f)| = \|F\|$.

10. Sea $E = \{f \in C([0,1]) : f(1) = 0\}$, y sea G la restricción a E del funcional lineal del problema anterior. Demostrar que $\|G\| = \|F\|$, pero que G no alcanza su norma en $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

11. Sea E un espacio de Banach y $F \in E'$, $\|F\| \neq 0$. Sea $M = \{x \in E : F(x) = 1\}$ Demostrar que M es cerrado, convexo y no vacío, que $\inf_{x\in M} \|x\| = 1/\|F\|$, y que si F no alcanza su norma en E, entonces el $\inf_{x\in M} \|x\|$ no se alcanza.

12. **(a)** Sea $[a,b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$. Se considera el espacio vectorial

$$C^k[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : \quad f \text{ es } k \text{ veces diferenciable y } f^{(k)} \text{ es continua en } [a,b]\}.$$

Lo dotamos de dos normas: $\|f\| := \|f\|_{C[a,b]} + \|f^{(k)}\|_{C[a,b]}$; $\|f\|_* := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{C[a,b]}$.

Demostrar que estas normas son equivalentes.

(b) Demostrar que el espacio $C^k[a,b]$ con cualquiera de estas dos normas es un espacio de Banach.

13. Demostrar que el dual de $c_0 = \{s = (s_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} s_n = 0\}$ es ℓ^1. ¿Dónde falla la demostración si sustituimos c_0 por ℓ^∞?

14. Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ dotado con la norma $\|x\| = \max_{1\le j\le N} |x_j|$. ¿Cuál es la norma correspondiente en el espacio dual $\mathbb{X}'$?

15. Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y} \neq \{0\}$ espacios normados, con $\dim(\mathbb{X}) = \infty$. Demostrar que hay al menos un operador lineal no acotado $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Concluir que si $\mathbb{X}$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces el espacio dual $\mathbb{X}'$ no coincide con el espacio dual algebraico $\mathbb{X}^\#$ (que consiste de todos los funcionales lineales). *Sugerencia:* Usar una base de Hamel.

16. **(a)** Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Supongamos que el espacio vectorial $\mathbb{K}[t]$ de todos los polinomios sobre $\mathbb{K}$ está dotado de alguna norma. Demostrar que para todo operador lineal acotado $T : X \to \mathbb{K}[t]$, el rango $\operatorname{Ran} T = T(X)$ tiene dimensión finita.

(b) Demostrar que para todo espacio de Banach X sobre $\mathbb{K}$ de dimensión infinita, existe un operador lineal $T : X \to \mathbb{K}[t]$, cuyo rango es todo el espacio $\mathbb{K}[t]$.

17. **(a)** Demostrar que en un espacio métrico sin puntos aislados, cualquier conjunto formado por un solo punto es un cerrado con interior vacío.

(b) Usar el apartado (a) junto con el teorema de Baire para ver que ni $\mathbb{R}$, ni el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, ni ningún G_δ denso de un espacio métrico sin puntos aislados, son numerables.

18. En cada caso, dar un ejemplo de un conjunto delgado (de primera categoría en la terminología de Baire) en $\mathbb{R}$, que sea

(a) denso en $\mathbb{R}$;
(b) no numerable;
(c) denso y no numerable.

19. **(a)** Encontrar un ejemplo de un conjunto delgado (de primera categoría) en $\mathbb{R}$ que tenga medida de Lebesgue mayor que 0.

(b) Encontrar un ejemplo de un conjunto grueso (de segunda categoría) en $\mathbb{R}$ que tenga medida de Lebesgue 0.

20. Sea X un espacio de Banach.

(a) Demostrar que si dos bolas cerradas cumplen $\overline{B_\rho(x)} \supset \overline{B_r(y)}$, entonces se tiene la desigualdad $\rho \geq r$ para sus radios.

(b) Demostrar que "el lema sobre las bolas encajadas" en X es válido sin pedir que los radios de las bolas tiendan a cero.

Es decir: si tenemos una sucesión de bolas $\{\overline{B_{r_n}(x_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \supset \overline{B_{r_2}(x_2)} \supset \ \dots\ \supset \overline{B_{r_n}(x_n)} \supset \ \dots$$

entonces la intersección de estas bolas no es vacía.

21. Demostrar que existen funciones continuas en un intervalo que no son monótonas en ningún subintervalo.