Espacios vectoriales normados. Espacios de Banach

1. Demostrar que la métrica discreta sobre un espacio vectorial $X \neq \{0\}$ no se puede obtener a partir de una norma.

2. Consideramos las funciones $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \geq 1$), definidas por las condiciones: cada función φ_n es continua en $\mathbb{R}$, es lineal en los intervalos $[0, \frac{n-1}{n}]$ y $[\frac{n-1}{n}, 1]$, $\varphi_n(x) = x$ en $[0, \frac{n-1}{n}]$ y $\varphi_n(x) = 0$ si $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Definimos una aplicación no lineal
$$\Phi(\{x_n\}) = \{\varphi_n(x_n)\}, \quad \{x_n\} \in \ell^2.$$
(a) Demostrar que Φ es continua de ℓ^2 a ℓ^2.

(b) Demostrar que Φ *no es* uniformemente continua en $\bar{B}_1(0)$, la bola unidad cerrada de ℓ_2.

3. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Suponemos que Y es completo. Sea X_0 un subconjunto denso en X.

(a) Toda aplicación $\varphi : X_0 \to Y$, que es uniformemente continua, se extiende de forma única a una aplicación continua $\widetilde{\varphi} : X \to Y$. Esta extensión es uniformemente continua.

(b) Una aplicación continua $\varphi : X_0 \to Y$, que no es uniformemente continua, puede no tener ninguna extensión continua a X.

4. Demostrar que toda norma en un espacio vectorial X satisface $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leq \|y - x\|$ y concluir que la aplicación $\|\cdot\| : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

5. Sea $\bar{B}_1(0)$ la bola unidad cerrada en ℓ_2. Dar un ejemplo de una función continua $f : \bar{B}_1(0) \to \mathbb{R}$, que no alcanza el máximo.

¿Es cierto que toda función uniformemente continua $f : \bar{B}_1(0) \to \mathbb{R}$ alcanza el máximo?

6. Dar condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de ℓ^p, $1 < p < \infty$, sea compacto.

7. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio medible. Demostrar las desigualdades de Hölder y de Minkowski para integrales, a saber
$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^q\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{(Hölder)}$$
$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{(Minkowski)}$$
donde $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demostrar que $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, es un espacio vectorial normado.

8. Sea c_{00} la subvariedad lineal de ℓ^∞ que consiste de todas las sucesiones que solamente tienen un número finito de términos no nulos. Demostrar que c_{00} no es cerrado. ¿Cuál es su cierre?

9. Demostrar que la sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$,
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$
es de Cauchy en $L^1(\Omega)$, $\Omega = (0,1)$.

10. Se dice que un subconjunto A de un espacio vectorial X es convexo si el segmento $\alpha x + (1-\alpha)y$, $0 \leq \alpha \leq 1$ está contenido en A para todo $x, y \in A$.

    (i) Demostrar que la bola unidad cerrada $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ en un espacio normado X es convexa.

    (ii) Utilizar el apartado anterior para demostrar que $\varphi(x) = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$, $x = (x_1, x_2)$, no define una norma en $\mathbb{R}^2$.

11. *(Relación entre convergencia y convergencia absoluta)*

    (i) Demostrar que la convergencia absoluta de una sucesión en un espacio normado no implica la convergencia de la misma.

    Sugerencia. Considerar en c_{00} la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \vec{y}_n$, cuyos términos se definen por $\vec{y}_n = (y_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$, $y_n^{(n)} = 1/n^2$, $y_j^{(n)} = 0$ para todo $j \neq n$.

    (ii) Demostrar que si en un espacio normado la convergencia absoluta de toda serie implica su convergencia, entonces el espacio es completo.

12. Supongamos que $1 \leq p < q \leq \infty$. Demostrar que $\ell^p \subset \ell^q$. Demostrar que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ para todo $x \in \ell^p$.

13. Supongamos que μ es una medida de probabilidad, y sea $1 \leq p < q \leq \infty$. Demostrar que en este caso, las inclusiones son invertidas: $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$, y $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ para todo $x \in L^q(\mu)$.

14. Demostrar que $C[0,1]$ es un subespacio cerrado de $L^\infty[0,1]$.

Espacios normados de dimensión finita

15. Demostrar que para las normas $\|\cdot|_p$ en $\mathbb{R}^N$ se tiene la relación $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

16. (*Lemma de Riesz*[1]) Sean Y y Z subespacios de una espacio normado X (de cualquier dimensión), y supongamos que Y es cerrado y es un subconjunto propio de Z.

    (i) Demostrar que para todo número real $\theta \in (0,1)$ existe un $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.

    (ii) Demostrar que si $\dim(Y) < \infty$, entonces se puede tomar también $\theta = 1$.

    Sugerencia. Sea $v \in Z \setminus Y$ y sea $a > 0$ su distancia a Y, $a = \inf_{y\in Y} \|v - y\|$. Observar que, dado $\theta \in (0,1)$, existe un $y_0 \in Y$ tal que $a \leq \|v - y_0\| \leq a/\theta$. Podemos tomar $z = (v - y_0)/\|v - y_0\|$.

17. Demostrar que si un espacio normado X tiene dimensión infinita, entonces la bola unidad cerrada $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ no es compacta.

    Sugerencia. Usar el Lemma de Riesz para construir una sucesión en M que no tiene una subsucesión convergente.

Operadores lineales. Operadores lineales acotados

18. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Demostrar que si $\dim(X) = n$, entonces $\dim(\mathcal{R}(T)) \leq n$.

19. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal con inverso. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son linealmente independientes en X, demostrar que el conjunto $\{Tx_1, \ldots, Tx_n\}$ es linealmente independiente en Y.

20. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal y $\dim(X) = \dim(Y) = n < \infty$. Demostrar que $\mathcal{R}(T) = Y$ si y solo si T es biyectiva. Dar un ejemplo que muestre que esta afirmación no es necesariamente cierta en un espacio de dimensión infinita.

21. Sea $T : D \to Y$ un operador lineal y acotado, donde $D \subset X$, X normado, e Y es de Banach. Demostrar que existe un operador $\widetilde{T} : \overline{D} \to Y$ lineal y acotado tal que $\widetilde{T}x = Tx$ para todo $x \in D$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

22. Sean $T_1 : X \to Y$ y $T_2 : Y \to Z$ operadores lineales acotados en espacios normados. Demostrar que $\|T_2T_1\| \leq \|T_2\|\|T_1\|$.

23. La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (cuando existe) se define mediante la fórmula

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt} f(t)\, dt.$$

    Demostrar que $\mathcal{F}$ es continua de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.

    ¿Es cierto que la imagen $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ se contiene en $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$? ¿Es cierto que toda función en la imagen $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$?

[1] Demostrado por F. Riesz en 1918.