Más ejercicios sobre los espacios métricos y teoremas del punto fijo

1. Terminar la demostración de la existencia de la compleción de un espacio métrico.

2. Demostrar que existe una única función continua en $[0,1]$ tal que
$$f(x) - \frac{2}{3}\cos f(x) = \int_0^1 f(xt)t^3\,dt.$$

3. Demostrar que la ecuación integral
$$x(t) = \int_0^1 \frac{x(s)+1}{10+tx(s)^2}\,ds$$
tiene una única solución continua $x \in C[0,1]$.

4. Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ cualquier aplicación tal que T^m es contractiva para algún m. Demostrar que T tiene un único punto fijo.

5. Dado un espacio métrico (X,d) compacto y una aplicación $T : X \to X$, que es *débilmente contractiva:*
$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \quad \text{si } x,y \in X, x \neq y,$$
demostrar que T tiene un único punto fijo.

6. Dar un ejemplo de una aplicación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ débilmente contractiva, que no tiene puntos fijos.

7. Supongamos que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface
$$|Tx - Ty| \leq \frac{1+\text{máx}(|x|,|y|)}{2+\text{máx}(|x|,|y|)}\,|x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$
Comprobar que es entonces débilmente contractiva. Demostrar que en este caso, siempre tiene un único punto fijo.

8. **(a)** Dar un ejemplo de una compacto $K \subset \mathbb{R}$ y una aplicación $T : K \to K$, que no tiene puntos fijos y es no expansiva, es decir, satisface $d(Tx,Ty) \leq d(x,y)$ para todo par de puntos $x,y \in K$.

   (b) Dar un ejemplo con las mismas propiedades, donde ahora K es un compacto arcoconexo, que se contiene en $\mathbb{R}^2$.

9. Sea $\bar{B} = \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ la bola unidad cerrada en ℓ^2. Se considera la aplicación
$$F(x_1,x_2,x_3,\dots) = ((1-\|x\|_2^2)^{1/2}, x_1, x_2, \dots).$$
   (a) Demostrar que F es continua y lleva $\bar{B}$ en $\bar{B}$ (de hecho, su imagen se contiene en la esfera unidad en ℓ^2).
   (b) ¿Es F uniformemente continua? ¿Es F una aplicación Lipschitz?
   (c) Demostrar que F no tiene puntos fijos.