

Envolturas convexas en el Cálculo de Variaciones y aplicaciones a mi- croestructuras

Rostislav Shkavron Filippenko



FACULTAD DE
CIENCIAS

Supervisor: Daniel Faraco Hurtado
Lugar: Facultad de Ciencias - UAM
Departamento: Matemáticas

Convex hulls in the Calculus of Variations and applications to microstructures

Rostislav Shkavron Filippenko



FACULTAD DE
CIENCIAS

Supervisor: Daniel Faraco Hurtado
UAM: Faculty of Sciences
Department: Mathematics

Agradecimientos

Este trabajo me dio una comprensión profunda de la naturaleza de nuevas herramientas matemáticas y la increíble variedad de situaciones en las que se pueden utilizar. Agradezco por cada descubrimiento que hice y todo escollo superado por insignificante que sea a mi supervisor Daniel Faraco.

It is not knowledge, but the act of learning, . . . which grants the greatest enjoyment.

– Carl Friedrich Gauss

Resumen

En este Trabajo Fin de Máster nos centramos en los modelos en el Cálculo de Variaciones para la descripción de microestructuras en cristales y transformaciones de fase sólido-sólido y su estudio mediante envolturas convexas. Describimos las herramientas matemáticas necesarias como las diferentes nociones de convexidad, su interrelación y aplicación de las medidas de Young al problema en cuestión. El trabajo es mayormente basado en el texto de Stefan Muller [Mul98].

Abstract

In this Master's Thesis, we focus on the models in the Calculus of Variations for the description of microstructures in crystals and solid-solid phase transformations and their study through convex shells. We describe the necessary mathematical tools, such as the different notions of convexity, their interrelationship, and the application of Young's measures to the problem. The work is largely based on Stefan Muller's text [Mul98].

Índice general

1. Preliminares	3
2. Convexidades	6
2.1. Policonvexidad	7
2.2. Quasiconvexidad	7
2.3. Convexidad rango-1	10
2.4. Envolturas convexas generalizadas	15
2.4.1. Envolturas de conjuntos	16
3. Medidas de Young	17
3.1. Inspiración por curvas generalizadas y definición	17
3.2. Teorema fundamental para las medidas de Young	20
3.3. Resultados de semicontinuidad inferior	24
3.4. Ejemplos	26
3.5. Medidas gradientes de Young	30
4. Microestructuras	38
4.1. Modelización variacional de microestructuras	38
4.1.1. ¿Qué son las microestructuras?	38
4.1.2. Microestructuras como minimizadores de energía	39
4.1.3. Modelos variacionales para cristales elásticos	40
4.1.4. Los problemas básicos	41
4.2. Laminado	42
4.2.1. ¿Todas las microestructuras son un laminado?	45
4.3. Problemas de inclusión de gradientes	48
4.3.1. Inclusión de dos gradientes	48
4.3.2. Aplicaciones a microestructuras en cristales	52
4.3.3. Problema de tres gradientes	54
4.3.4. El problema de los cuatro gradientes	56
4.3.5. Subespacios lineales y sistemas elípticos	59
4.4. Problemas de inclusión de pozos	61
4.4.1. El problema de un pozo	61
4.5. Inclusión de pozo doble	62
4.6. Soluciones exactas	66
4.6.1. Existencia de soluciones	67
4.6.2. Regularidad y rigidez	72
Bibliografía	75

Capítulo 1

Preliminares

Aunque la siguiente definición se puede establecer de una manera más generalizada, nos atenemos a su formulación que es relevante para el cálculo de variaciones.

Definición 1.1. Un **funcional** es una función de valor real cuyo argumento también es una función. Es decir una aplicación \mathcal{I} se llama funcional si tiene la forma $\mathcal{I}(u) : X \rightarrow \mathbb{R}$, donde X es un espacio funcional.

El interés del Cálculo de Variaciones se centra en encontrar una función $u(x)$ que minimice un funcional dado por una integral que depende de alguna combinación de valores de $u(x)$, su argumento x y sus derivadas de algún orden. Esta dependencia se solidifica por otra función f llamada **integrando**. En particular, un gran número de problemas se pueden expresar mediante un funcional de la forma

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx. \quad (1.1)$$

De aquí nuestro interés en las propiedades de f y $\mathcal{I}(u)$. Pero antes que nada, necesitamos establecer una configuración para $u(x)$.

Para la función objetivo $u(x)$ siempre consideraremos un espacio de Sobolev $W^{1,p}$, $p \in [1, \infty]$ o algún subespacio. Para el dominio y la imagen trabajaremos en el marco de funciones con valores vectoriales, es decir, $x \in \mathbb{R}^d$, $u(x) \in \mathbb{R}^m$, $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^{m \times d}$. Para el dominio de u , siempre consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ como un acotado **dominio de Lipschitz**. Es decir, requerimos que sea abierto, conexo, el límite $\partial\Omega$ expresable como una unión finita de funciones de Lipschitz que implica $|\partial\Omega| = 0$ en la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

En esta tesis nuestro interés se centra en los funcionales de la forma

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx.$$

Una propiedad a menudo deseable para f es ser un **integrando de Carathéodory**, que es una función que es Lebesgue medible en la variable x y continua en todas las variables restantes simultáneamente.

A veces es relevante desde el punto de vista matemático y físico exigir algunas condiciones sobre el crecimiento del integrando.

Definición 1.2. Decimos que el integrando f es de crecimiento polinomial o simplemente **p-crecimiento** si hay una constante $M > 0$ llamada **constante de crecimiento** y un número $p \in [1, \infty)$ tal que

$$\|f(x, A, B)\| \leq M(1 + \|A\|^p + \|B\|^p)$$

para todo $A \in \mathbb{R}^d$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times d}$.

A veces, para el p-crecimiento se requiere solo para una variable. En este caso, la desigualdad en la definición anterior se obtiene poniendo a cero la variable que falta en el lado derecho.

Otra condición de crecimiento también juega un papel importante en la interacción entre el integrando y el funcional y se usa a menudo en aplicaciones de los métodos directos de cálculo de variaciones.

Definición 1.3. Decimos que el integrando f satisface el **límite de coercitividad p** si existe $\mu > 0$ y un número $p \in [1, \infty)$ tal que para todo $x \in \Omega$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ es

$$\mu\|A\|^p \leq f(x, A).$$

Observación. Tenga en cuenta que con esta definición, el mismo p -valor determina el espacio de Sobolev para las funciones candidatas $u(x)$.

Definición 1.4. Sea $f_n \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$, decimos que f_n son **L^p -equiintegrables** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \|u\|^p dx \leq \varepsilon$$

para todos los conjuntos de Borel $B \subset \Omega$ tal que $|B| < \delta$. Si $p = 1$ decimos simplemente equiintegrable.

El integrando también se llama a veces **Lagrangiano**. Esto se debe a la terminología de la mecánica lagrangiana donde aparece el funcional (1.1). En particular, cuando el Lagrangiano es independiente de las variaciones (las ecuaciones de Euler-Lagrange son idénticamente nulas) se llama **Lagrangiano nulo**. En este caso el funcional solo depende de los valores límite de $u(x)$.

A continuación mostramos una propiedad de los integrandos que tienen la forma $f(\nabla u)$. Mostramos que cuando f es un subdeterminante es un Lagrangiano nulo.

Teorema 1.5. Si $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ es un menor de rango $r \in \{1, \dots, \min\{m, d\}\}$, $u, v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $p \in [r, \infty]$ luego

$$\int_{\Omega} f(\nabla u) dx = \int_{\Omega} f(\nabla v) dx.$$

Demostración. Sea $f(A) = \det_r(A)$, que es el subdeterminante r (menor) de A . Al reordenar, siempre podemos asumir que f es el subdeterminante superior izquierdo.

Por lo tanto, usando el teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(\nabla u) dx &= \int_{\Omega} f(\nabla u) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d \\
&= \int_{\Omega} d(u^1 \text{ wedge} \dots \text{ wedge} du^r \text{ wedge} dx^{r+1} \dots \text{ wedge} dx^d) \\
&= \int_{\partial\Omega} u^1 \wedge \dots \wedge du^r \wedge dx^{r+1} \dots \wedge dx^d \\
&= \int_{\partial\Omega} v^1 \wedge \dots \wedge dv^r \wedge dx^{r+1} \dots \wedge dx^d \\
&= \int_{\Omega} f(\nabla v) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d \\
&= \int_{\Omega} f(\nabla v) dx.
\end{aligned}$$

□

Definición 1.6. Sea X un espacio funcional con funcional definido $\mathcal{I}(u) : X \rightarrow [-\infty, \infty]$.

- (i.) $\mathcal{I}(u)$ es **semicontinuo inferior** si el conjunto $\{u \in X : \mathcal{I}(u) \leq t\}$ está cerrado para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (ii.) $\mathcal{I}(u)$ es **semicontinuo inferior secuencialmente** si el conjunto $\{u \in X : \mathcal{I}(u) \leq t\}$ es cerrado secuencialmente para todo $t \in \mathbb{R}$.

Una propiedad definida a continuación está directamente relacionada con su análogo del mismo nombre para el integrando por su uso en el método directo.

Definición 1.7. Sea X un espacio funcional. Un funcional $\mathcal{I}(u) : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ se dice que es **coercitivo** si

$$\mathcal{I}(u) \rightarrow \infty \text{ cuando } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Capítulo 2

Convexidades

Definición 2.1. Un subconjunto X de un vector o espacio afín S se llama **convexo** si el segmento que conecta dos elementos cualesquiera $a, b \in X$ se encuentra en X , es decir, para $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in X \subset S.$$

Definición 2.2. Una **función convexa** es una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo epigrafo $\{(a, b) \in X \times \mathbb{R} : f(a) \leq b\}$ es un conjunto convexo. O de manera equivalente si para cualquier $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Si la desigualdad es estricta, $x \neq y$ y $0 < \lambda < 1$ entonces se dice que f es **estrictamente convexa**.

El siguiente teorema, cuya demostración omitimos, establece una propiedad útil de las funciones convexas. La intuición detrás es que dado que el epígrafe de una función convexa es un conjunto convexo, cualquier combinación convexa de puntos dentro del epigrafo es mayor o igual al valor de la función de la correspondiente combinación de puntos en su dominio. Enunciamos la desigualdad en su forma teórica de medida que involucra al baricentro, que para nosotros será el marco de interés. Recuerde que, dada una medida de radón positiva μ , el **baricentro** es el valor

$$[\mu] := \langle id, \mu \rangle = \int x d\mu(x).$$

Nota que el baricentro de una medida de probabilidad puede considerarse como una combinación infinitesimal convexa.

Teorema 2.3. [Desigualdad de Jensen] Para todas las funciones convexas $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y todas las medidas de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ se cumple que

$$f([\mu]) \leq \int f(x) d\mu(x).$$

2.1. Policonvexidad

De todas las generalizaciones, la policonvexidad es la noción más cercana a la convexidad habitual y las envolturas policonvexas son las más cercanas a las envolturas convexas cerradas.

El término se generalizó a partir del introducido por James Ball en 1977 [Bal76] como una condición necesaria para que el funcional de energía elástica no lineal satisfaga un requisito realista de que la deformación de un objeto a un volumen infinitamente pequeño requerirá una cantidad infinita de energía. Lo que contradice el límite de p -crecimiento para el integrando que era necesario para las soluciones logradas previamente.

Definición 2.4. Se dice que una función $f : M^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ es **función policonvexa** si es una función convexa de algún subdeterminante $p \times p$ con $1 \leq p \leq \min\{m, d\}$.

Es decir, si denotamos por $M(A)$ el vector de todos los menores de A (incluido el propio A), existe una función g tal que $f(A) = g(M(A))$ para todo $A \in M^{m \times d}$.

Tenga en cuenta que g es una función definida en \mathbb{R}^α , donde α es el número de todos los menores posibles que se pueden definir en la matriz $m \times d$, es decir,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\min\{m, d\}} \binom{m}{i} \binom{d}{i}.$$

Proposición 2.5.

Convexidad \implies Policonvexidad.

Demostración. Si f es convexo para todo $A \in M^{m \times d}$, sea $g = f \circ id$ donde id elige la matriz original de $M(A)$. \square

La implicación inversa no se cumple ya que, por ejemplo, para $A \in M^{d \times d}$ la función $f := \det(A)$ es policonvexa, ya que podemos definir $g((A, \dots, \det(A), \dots)) := \det(A) = f$ que es lineal y por lo tanto convexa, pero f no es convexa. Un ejemplo de que la función determinante no es convexa: sea $d = 2$, y considere matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\det(A) = \det(B) = 0$, pero cuando $a_1 b_2 < a_2 b_1$ es $\det(\lambda A + (1 - \lambda)B) > 0$ para todo $\lambda \in (0, 1)$.

2.2. Quasiconvexidad

Definición 2.6. Sea $\Omega \subset M^{m \times n}$ un dominio de Lipschitz acotado. Se dice que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es **función cuasiconvexa** si para todo $A \in \Omega$ y $\varphi \in W_0^{1, \infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ se tiene que

$$|\Omega|f(A) = \int_{\Omega} f(A)dx \leq \int_{\Omega} f(A + \nabla\varphi(x))dx.$$

Observación. Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, si f es de p -crecimiento, podemos enunciar la definición de cuasiconvexidad con funciones test en $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ por $p \in [1, \infty)$.

Una caracterización importante de la cuasiconvexidad es que es independiente del conjunto, es decir, si una función es cuasiconvexa en un dominio de Lipschitz acotado Ω , es cuasiconvexa en cualquier otro dominio de Lipschitz. Y más aún, en lugar de que φ sea cero en la frontera, podemos considerar φ tales que son periódicas en el cubo unitario $Q = (0, 1)^d$.

Proposición 2.7. Sea $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene lo siguiente:

- (i.) La cuasiconvexidad es invariable en los dominios de Lipschitz.
- (ii.) La función f es cuasiconvexa si y solo si para todo $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$

$$f(A) \leq \int_Q f(A + \nabla \varphi(x)) dx, \text{ donde } Q = (0, 1)^d,$$

y $\varphi \in W_{per}^{1,\infty}(Q; \mathbb{R}^m) := \{u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m) : u(x + e_i) = u(x)\}$, e_i siendo un vector unitario base $i = 1, \dots, d$.

Demostración. (i.) Sean $\Omega, \Psi \in \mathbb{R}^d$ dos dominios de Lipschitz. Por el teorema de cobertura de Vitali, para $a_k \in \Omega$ hay $r_k > 0$ tales que

$$\Psi = M \bigcup_k^\infty \overline{\Omega(a_k, r_k)},$$

con $|M| = 0$ y $\Omega(a_k, r_k) := a_k + r_k \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi := r_k \omega\left(\frac{y - a_k}{r_k}\right)$, con $\omega \in W_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $y \in \Omega(a_k, r_k)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\Psi f(A + \nabla \psi) dy &= \sum_k^\infty \int_{\Omega(a_k, r_k)} f\left(A + \nabla \omega\left(\frac{y - a_k}{r_k}\right)\right) dy \\ &= \sum_k^\infty r_k^d \int_\Omega f(A + \nabla \omega(x)) dx \\ &= \frac{|\Psi|}{|\Omega|} \int_\Omega f(A + \nabla \omega(x)) dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por lo tanto, en la definición de cuasiconvexidad podemos sustituir Ω con cualquier otro dominio de Lipschitz Ψ .

(ii.) Si f para funciones periódicas en $Q = (0, 1)^d$ resulta cuasiconvexa, por (i.) podemos sustituir por cualquier otro Ω , y se prueba la suficiencia.

Sean $\varphi \in W_{per}^{1,\infty}(Q; \mathbb{R}^m)$ y f funciones cuasiconvexas y continuas. Para $k \in \mathbb{N}$ define la función de corte $v_k \in C^\infty((0, k)^d)$ tal que $0 \leq v_k \leq 1$, es decir $v_k(x) = 1$ si $x \in (0, k - 1)^d$ y tal que $|\nabla(v_k \varphi)| < C_k$ for $C_k > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{(0, k - 1)^d\}$. Definimos la sucesión que corta y reduce el período y el valor de la función

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k} v_k(kx) \varphi(kx).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 (k-1)^d \int_Q f(A + \nabla\varphi) dx &\geq \int_{(0,k)^d} f(A + \nabla(v_k\varphi)) dx - \int_{(0,k)^d - (0,k-1)^d} \underbrace{f(A + C_k)}_{D_k} dx \\
 &= \int_{(0,k)^d} f(A + \text{nabla}(v_k\varphi)) dx - D_k((k)^d - (k-1)^d) \\
 &= k^d \int_Q f(A + \nabla\psi_k) dy - D_k((k)^d - (k-1)^d) \\
 &\geq k^d f(A) - D_k((k)^d - (k-1)^d).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde en el último paso usamos que f es cuasiconvexa para funciones de Lipschitz que desaparecen en el límite. Dividiendo por k^d y poniendo $k \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado. \square

A continuación establecemos la relación entre policonvexidad y cuasiconvexidad.

Proposición 2.8.

Policonvexidad \implies Quasiconvexidad.

Demostración. Sea f policonvexa y $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Dado que los subdeterminantes son lagrangianos nulos (Teorema 1.5) se obtiene

$$f(A) = g(M(A)) = g\left(M\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla(Ax + \varphi) dx\right)\right).$$

Y usando la desigualdad de Jensen (2.3) se obtiene el resultado

$$\begin{aligned}
 f(A) = g(M(A)) &= g\left(M\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla(Ax + \varphi) dx\right)\right) \\
 &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(M(\nabla(Ax + \varphi))) \\
 &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\nabla(Ax + \varphi)) dx \\
 &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(A + \nabla\varphi) dx.
 \end{aligned}$$

\square

Teorema 2.9. Dado un funcional $\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u)$ con $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y cuasiconvexa.

- (i.) La cuasiconvexidad de f es equivalente a la semicontinuidad inferior secuencial débil* de $\mathcal{I}(u)$ en $W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.
- (ii.) Si $f \geq 0$ y es de crecimiento p , entonces $\mathcal{I}(u)$ es semicontinuo inferior débilmente secuencial en $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Demostración. Si (i.) se cumple, (ii.) se cumplirá debido a la observación después de la definición de cuasiconvexidad. Probamos (ii.) como en el Teorema 4.5 en [Mul98]. Sea \mathcal{I} débilmente* semicontinuo inferior secuencial. Basta probar la cuasiconvexidad para funciones periódicas en Q por (ii.) en la Proposición (2.7). Sea $Q = (0, 1)^d$. Tome $\varphi \in W_0^{1,\infty}(Q, \mathbb{R}^m)$ y extiéndalo periódicamente. Definimos $u_n = Ax + \frac{1}{n}\varphi(nx)$. Por lo tanto, $u_n \xrightarrow{*} Ax \in W^{1,\infty}(Q, \mathbb{R}^m)$ y $f(\nabla u_n) \rightarrow f(A)$ en $L^\infty(Q)$ que implica

$$f(A) = \int_Q f(A) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_Q f(A + \nabla u_n).$$

Sea f cuasiconvexa. Tomando $u \in W^{1,\infty}(Q, \mathbb{R}^m)$ y los dominios incrustados de forma compacta $Q' \subset\subset Q'' \subset\subset Q$. Tome una sucesión v_k que es afín por partes en Q'' , $v_k = u$ en $\Omega \setminus \Omega''$, y $|\nabla v_k| \leq C$ con $\nabla v_k \rightarrow \nabla u$ en medida. Definimos

$$u_{j,k} = u_j + v_k - u.$$

Por lo tanto $u_{j,k} \xrightarrow{*} v_k$ in $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ as $j \rightarrow \infty$ y $\nabla u_{j,k} \leq C$. Por el Teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f(\nabla u_{j,k}) dx &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f(\nabla v_k) dx \\ &= \int_{\Omega'} f(\nabla u) dx \geq \int_{\Omega} f(\nabla u) - C |\Omega \setminus \Omega'|. \end{aligned}$$

Dado que f es uniformemente continuo en conjuntos compactos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_j \int_{\Omega'} |f(\nabla u_{j,k}) - f(\nabla u_j)| dx = 0,$$

y luego

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_j) dx \geq \int_{\Omega} f(\nabla u) dx - 2C |\Omega \setminus \Omega'|$$

Dado que Ω' es arbitrario, la prueba está acabada. \square

2.3. Convexidad rango-1

Dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times d}$ son **rango-1 conexas** si $\text{rank}(AB) = 1$. Es decir, la imagen de (AB) que actúa sobre cualquier vector $x \in \mathbb{R}^d$ es unidimensional y está atravesada por algún vector fijo $n \in \mathbb{R}^m$. Por lo tanto $(AB)x = kn$ para algún escalar k que depende de x . Entonces para los vectores base e_1, \dots, e_d de \mathbb{R}^d debe ser

$$AB = (AB)(e_1, \dots, e_d) = (a_1 n, \dots, a_m n) = a n^t = a \otimes n,$$

donde $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, a y n no es nulo.

Definición 2.10. Una función $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **convexa de rango-1** si es convexa a lo largo de las líneas de rango-1, es decir, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tales que $\text{rank}(AB) \leq 1$ se cumple

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B), \text{ donde } \lambda \in [0, 1].$$

Es interesante ver que cuando $f \in C^2(\mathbb{R}^{m \times d}; \mathbb{R})$ la convexidad de rango-1 implica una condición puntual en la función y puede ser caracterizada en términos de un operador de naturaleza elíptica.

Proposición 2.11. [Condición de Legendre-Hadamard] Una función $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa de rango-1 si y solo si para todo $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $a \in \mathbb{R}^m$ y $b \in \mathbb{R}^d$ se cumple que

$$D^2 f(A)[a \otimes b, a \otimes b] = \sum_{i,k=1}^m \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial^2 f(A)}{\partial A_j^i \partial A_l^k} a^i b^j a^k b^l \geq 0 \quad (2.3)$$

con $i, k = 1, \dots, m$ y $j, l = 1, \dots, d$.

Demostración. Sea $B_t \in \mathbb{R}^{m \times d}$ tal que $B_t - A = ta \otimes b$, $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $A + ta \otimes b$ es una línea de rango-1 para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

Supongamos que f es de convexa de rango-1. Por tanto si definimos $g(t) := f(A + ta \otimes b)$, debe ser $\frac{d^2}{dt^2} g(0) \geq 0$, y como

$$\frac{d^2}{dt^2} g(0) = \left. \frac{d^2}{dt^2} f(A + ta \otimes b) \right|_{t=0} = D^2 f(A)[a \otimes b, a \otimes b]$$

se cumple la condición de elipticidad (2.11).

La implicación inversa se prueba con el mismo argumento pero yendo hacia atrás. \square

Proposición 2.12. Si $f < \infty$:

$$\text{Cuasiconvexidad} \implies \text{Convexidad de rango-1.}$$

Demostración. (Rindler [Rin18] Prop. 5.3)

Sea f cuasiconvexo y $A, B \in \mathbb{R}^{m \times d}$ rango-1 conexo, $BA = a \otimes n$ siendo n el vector unitario. Debemos mostrar que

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) \quad (2.4)$$

para todo $\lambda \in (0,1)$. Si definimos $F := \lambda A + (1 - \lambda)B$ y creamos una sucesión v_j tal que en cada $\Omega \in \mathbb{R}^{m \times d}$ es

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\nabla v_j) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B). \quad (2.5)$$

entonces (2.4) debido a la cuasiconvexidad de f es equivalente a

$$f(F) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\nabla v_j). \quad (2.6)$$

Por lo tanto, si tal v_j existe, la prueba estará completa. Considere la siguiente construcción.

$$\varphi(t) := \begin{cases} -(1 - \lambda)t, & \text{si } t \in [0, \lambda], \\ \lambda t - \lambda, & \text{if } t \in (\lambda, 1]. \end{cases}$$

$$u_j(x) := Fx + \frac{1}{j}\varphi(jx \cdot n - \lfloor jx \cdot n \rfloor)a.$$

$$\nabla u_j(x) = \begin{cases} F - (1 - \lambda)a \otimes n = A & \text{if } jx \cdot n - \lfloor jx \cdot n \rfloor \in (0, \lambda), \\ F + \lambda a \otimes n = B & \text{if } jx \cdot n - \lfloor jx \cdot n \rfloor \in (\lambda, 1). \end{cases}$$

Sea Q_n un cubo unitario centrado en el origen. Ahora tomamos una sucesión de funciones de corte $\rho_j \subset C_c^\infty(Q_n; [0, 1])$ tal que $j \rightarrow \infty$ $\rho_j \rightarrow 1$ para $x \in Q_n$. Y considere para $x \in \Omega$:

$$v_{j,k}(x) := \rho_j(x)u_k(x) + (1 - \rho_j(x))Fx.$$

La sucesión pertenece a $W^{1,\infty}(Q_n; \mathbb{R}^m)$ y es $v_{j,k}|_{\partial Q_n} = Fx$ con un gradiente de

$$\nabla v_{j,k}(x) = \rho_j(x)\nabla u_k(x) + (1 - \rho_j(x))F + (u_k(x) - Fx) \otimes \nabla \rho_j(x).$$

Dado que la incrustación compacta $W^{1,\infty} \subset\subset L^\infty(Q_n; \mathbb{R}^m)$ tenemos una convergencia uniforme $u_k \rightarrow Fx$. Para un j fijo es

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\nabla v_{j,k}\|_{L^\infty} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u_k\|_{L^\infty} + |F| < \infty$$

como ∇u_k está uniformemente acotado en L^∞ . Por lo tanto, podemos encontrar un límite para $\|\nabla v_{j,k(j)}\|_{L^\infty}$ que es independiente de $j \in \mathbb{N}$, $k(j)$. Dado que f está acotado localmente, existe $C > 0$ tal que

$$\|f(\nabla u_{k(j)})\|_{L^\infty} + \|f(\nabla v_{j,k(j)})\|_{L^\infty} \leq C.$$

Por lo tanto establecemos $v_j := v_{j,k(j)}$:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{Q_n} |f(\nabla v_j) - f(\nabla u_{k(j)})| dx &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{Q_n \setminus G_j} |f(\nabla u_{k(j)})| + |f(\nabla v_{j,k(j)})| dx \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} C |Q_n \setminus G_j| \\ &= 0, \end{aligned}$$

y ∇v_j satisface (2.3) y f esconvexa de rango-1. \square

A continuación proporcionamos un ejemplo de una función definida en $\mathbb{R}^{3 \times 2}$ que es convexa de rango-1 pero no cuasiconvexa. Dado que $\mathbb{R}^{3 \times 2} \subset \mathbb{R}^{m \times d}$ cuando $m \geq 3$, $d \geq 2$, el resultado prueba que la convexidad de rango-1 tampoco implica cuasiconvexidad en dimensiones superiores. El único caso restante $m = d = 2$ aún se desconoce, un resultado parcial debido a Stefan Müller [Mül99] establece que sí se cumple para matrices diagonales.

Ejemplo 2.13 (Vladimír Šverák [Šv92b]). Hay valores específicos para $\alpha, \beta > 0$ tales que la función $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{\alpha,\beta}(A) := g(\mathbf{P}(A)) + \alpha(|A|^2 + |A|^4) + \beta|A - \mathbf{P}(A)|^2 \quad (2.7)$$

es convexa de rango-1 pero no cuasiconvexa. Definimos $g(\cdot)$ y $P(\cdot)$ a continuación. La idea clave es encontrar una función u cuyo gradiente ∇u abarque un espacio lineal con pocas direcciones de rango-1 y, por lo tanto, sería más fácil encontrar un ejemplo como $f_{\alpha,\beta}$. Podemos restringir nuestro interés a funciones periódicas en el cubo unitario por la Proposición 2.7. Tal función u es

$$u(x_1, x_2) := \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} c \sin(2\pi x_1) \\ \sin(2\pi x_2) \\ \sin(2\pi(x_1 + x_2)) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\nabla u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi x_2 \\ \cos 2\pi(x_1 + x_2) & \cos 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

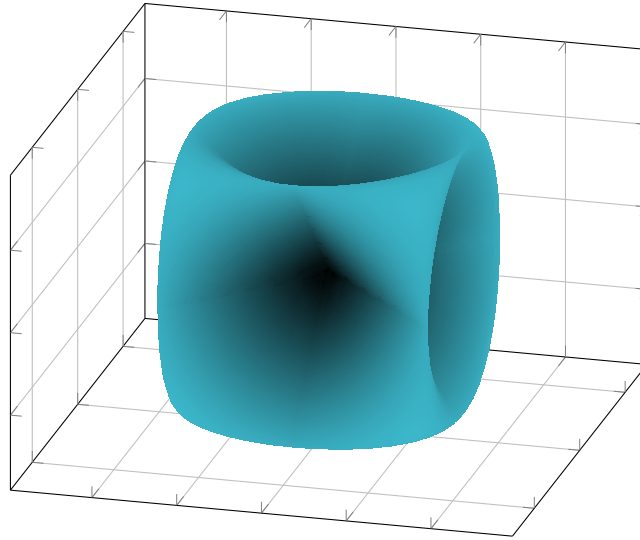


Figura 2.1: La función $u(x_1, x_2)$.

El gradiente ∇u genera el espacio lineal

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ z & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definimos $\mathbf{P}(\cdot)$ como la proyección $\mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow L$

$$\mathbf{P}(A) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \\ (e+f)/2 & (e+f)/2 \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

Y sea $g(\cdot) : L \rightarrow \mathbb{R}$ sea

$$g \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ z & z \end{pmatrix} := -xyz.$$

Tenemos que g es convexa rango-1, pero como

$$\int_{(0,1)^2} g(\nabla u) dx = - \int_0^1 \int_0^1 (\cos 2\pi x_1)^2 (\cos 2\pi x_2)^2 dx_1 dx_2 = -\frac{1}{4} < 0$$

para α y β suficientemente pequeños, $f_{\alpha,\beta}$ no es cuasiconvexo ya que

$$\int_{(0,1)^2} f_{\alpha,\beta}(\nabla \phi) dx < 0 = f_{\alpha,\beta}(0).$$

Queda por establecer que $f_{\alpha,\beta}$ es convexa de rango-1.

Por la Proposición 2.11 basta demostrar que para todo $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ tal que $\text{rank}(B) \leq 1$ se cumple

$$D^2 f_{\alpha,\beta}(A)[B, B] = \left. \frac{d^2}{dt^2} f_{\alpha,\beta}(A + tB) \right|_{t=0} \geq 0. \quad (2.10)$$

Dado que g es un polinomio, podemos asignar $D^2(g \circ \mathbf{P})(A)[B, B]$ para algún $c > 0$ con

$$D^2(g \circ \mathbf{P})(A)[B, B] \geq -c|A||B|^2.$$

Por lo tanto expandiendo

$$\begin{aligned} D^2 f_{\alpha,\beta}(A)[B, B] &= D^2(g \circ \mathbf{P})(A)[B, B] + 2\alpha|B|^2 + 4\alpha|A|^2|B|^2 + 8\alpha(A : B)^2 \\ &\quad + 2\beta|B - \mathbf{P}(B)|^2, \\ &\geq (-c + 4\alpha|A|)|A||B|^2 \end{aligned}$$

se cumple si $|A| \geq c/(4\alpha)$. A continuación demostramos que también se cumple si $|A| \leq c/(4\alpha)$. Dado que $D^2 f_{\alpha,\beta}(A)[B, B]$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en A basta considerar A y B en el conjunto compacto $K := \{|A| \leq c/(4\alpha), |B| = 1\}$. Basta mostrar que existen $\beta(\alpha) > 0$ tales que

$$D^2 f_{\alpha,\beta}(A)[B, B] \geq D^2(g \circ \mathbf{P})(A)[B, B] + 2\alpha|B|^2 + 2\beta|B - \mathbf{P}(B)|^2 \geq 0.$$

Supongamos lo contrario. Entonces hay una sucesión $\beta_j \rightarrow \infty$ y $(A_j, B_j) \subset K$ tal que

$$D^2(g \circ \mathbf{P})(A_j)[B_j, B_j] + 2\alpha|B_j|^2 + 2\beta_j|B_j - \mathbf{P}(B_j)|^2 < 0.$$

Dado que K es compacto $(A_j, B_j) \rightarrow (A, B) \in K$ para lo cual

$$D^2 f_{\alpha,\beta}(A)[B, B] + 2\alpha \leq 0, \text{ con } \mathbf{P}(B) = B.$$

Pero como $\text{rank}(B) = 1$ es $g(\mathbf{P}(A + tB)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que implica $D^2 f_{\alpha,\beta}(A)[B, B] = 0$ y $2\alpha \leq 0$, eso es una contradicción. Por lo tanto, $f_{\alpha,\beta}$ es convexa de rango-1 para $\alpha, \beta > 0$ adecuado.

2.4. Envolturas convexas generalizadas

Da una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos las diferentes envolturas convexas funcionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f^c &:= \sup\{g(\Omega) : g \leq f, g \text{ es convexo}\}, \\ f^{pc} &:= \sup\{g(\Omega) : g \leq f, g \text{ es policonvexa}\}, \\ f^{qc} &:= \sup\{g(\Omega) : g \leq f, g \text{ es cuasiconvexa}\}, \\ f^{rc} &:= \sup\{g(\Omega) : g \leq f, g \text{ es convexo de rango-1}\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Teorema 2.14. [Relajación cuasiconvexa] Sea $\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u) dx$, f no es negativa y tiene p -crecimiento. Considere el conjunto de funciones candidatas

$$W_v^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) : uv \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) \right\},$$

donde $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Defina $\bar{I}(u) = \int_{\Omega} f^{qc}(\nabla u) dx$. Entonces

$$\inf_{W_v^{1,p}} I = \min_{W_v^{1,p}} \bar{I}.$$

Teorema 2.15. [Fórmula para f^{qc}] Dado $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ y $A \in \Omega$, es

$$f^{qc}(A) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(A + \text{grad} \varphi) dx. \quad (2.12)$$

Demostración. Dejamos

$$Qf(F, U) := \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}} \frac{1}{|U|} \int_U f(F + D\varphi) dx.$$

Tenemos que demostrar que $f^{qc}(F) = Qf(F, U)$. Un simple argumento de escala muestra que Qf es independiente de U . Por la definición de cuasiconvexidad $Qf \geq Qf^{qc} = f^{qc}$. Para probar la desigualdad inversa $Qf \leq f^{qc}$ basta con mostrar que Qf es cuasiconvexa ya que $Qf \leq f$. Primero afirmamos que

$$\frac{1}{|U|} \int_U Qf(F + D\psi) dx \geq Qf(F)$$

$\forall \psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, ψ afines por partes.

Sea U una unión finita (hasta un conjunto nulo) de subconjuntos abiertos disjuntos U_i tal que ψ es afín en U_i y sea $\epsilon > 0$. Por la definición de Qf (aplicada a U_i) existe $\varphi_i \in W_0^{1,\infty}(U_i; \mathbf{R}^m)$ tal que

$$Qf(F + D\psi) \geq \frac{1}{|U_i|} \int_{U_i} f(F + D\psi + D\varphi_i) dx - \epsilon \quad \text{en } U_i$$

Establecemos $\varphi = \psi + \sum \varphi_i \in W_0^{1,\infty}(U; \mathbf{R}^m)$. Reordenando términos encontramos

$$\begin{aligned} \int_U Qf(F + D\psi)dx &\geq \int_U f(F + D\varphi)dx - \epsilon|U| \\ &\geq Qf(F) - \epsilon|U| \end{aligned}$$

y la afirmación sigue ya que $\epsilon > 0$ fue arbitraria. Ahora es suficiente para concluir que Qf es convexa de rango-1 y por lo tanto localmente Lipschitz continua. Por lo tanto, Qf es cuasiconvexa por argumentos de densidad y, por lo tanto, $f^{qc} = Qf$.

Hasta ahora hemos supuesto que Qf no toma el valor $-\infty$. Si $Qf(F + D\psi) = -\infty$ en U_i entonces una modificación obvia del argumento anterior muestra la declaración. Por lo tanto, Qf es convexa de rango-1 y se concluye fácilmente que $f^{qc} \equiv Qf \equiv -\infty$ ya que las direcciones de rango-1 generan el espacio de todas las matrices. \square

2.4.1. Envolturas de conjuntos

Dado un conjunto compacto $K \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ extendemos las nociones de diferentes envolturas funcionales a conjuntos definiendolas de manera similar:

$$K^c := \{A \in \mathbb{R}^{m \times d} : f(A) \leq \inf_{X \in K} f(X), \text{ para todos } f \text{ convexo}\},$$

$$K^{pc} := \{A \in \mathbb{R}^{m \times d} : f(A) \leq \inf_{X \in K} f(X), \text{ para todo } f \text{ policonvexo}\},$$

$$K^{qc} := \{A \in \mathbb{R}^{m \times d} : f(A) \leq \inf_{X \in K} f(X), \text{ para todo } f \text{ cuasiconvexo}\},$$

$$K^{rc} := \{A \in \mathbb{R}^{m \times d} : f(A) \leq \inf_{X \in K} f(X), \text{ para todo } f \text{ convexa de rango-1}\}.$$

También definimos recursivamente la **envoltura convexa de laminación** que será fundamental al describir microestructuras.

$$\begin{aligned} K^{lc} &:= \bigcup_{i \geq 0} K^{lc, i+1} \text{ donde } K^{lc, 0} = K, \text{ y} \\ K^{lc, i+1} &:= \left\{ \begin{array}{l} X, Y \in K^{lc, i} \\ \lambda X + (1 - \lambda)Y : \text{rank}(XY) = 1 \\ \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Por definición, la envoltura convexa de laminación está contenida en K^{rc} y, como se mostrará en el ejemplo de los próximos capítulos, esta inclusión es estricta para las dimensiones generales.

En este capítulo hemos probado las inclusiones de diferentes nociones generalizadas de convexidad:

$$\text{Convexidad} \implies \text{Policonvexidad} \implies \text{Cuasiconvexidad} \implies \text{Convexidad de rango-1} .$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente relación:

$$K^{lc} \subset K^{rc} \subset K^{qc} \subset K^{pc} \subset K^c. \quad (2.13)$$

Capítulo 3

Medidas de Young

" $C_0^(A)$ contiene todo lo que una curva intenta ser y falla: esto debe ser un paraíso para una curva".*

– Laurence Chisholm Young

La noción de lo que hoy llamamos una medida de Young surgió del intento de generalizar la definición de una curva que se adaptaría a los propósitos del Cálculo de Variaciones. Por supuesto, dado que estos propósitos son de optimización, el interés se centró en crear un objeto que fuera controlable bajo algún proceso en el límite. Un buen ejemplo es una curva en zig-zag que aparece, por ejemplo, en el problema del marinero, donde la optimización conduce a los cambios de dirección de la curva en zig-zag rápidos e infinitos. Y no existe tal curva en el sentido clásico.

En la siguiente sección construimos la noción de las medidas de Young a la manera propia utilizada por LC Young en sus conferencias [You80] y el primer artículo donde se originó el tema [You37].

3.1. Inspiración por curvas generalizadas y definición

Supongamos que una curva C es absolutamente continua y paramétricamente dada por $x(t) : t_1 \leq t \leq t_2$ definimos $A := \{(x, \dot{x}) : |\dot{x}| = 1\}$, considere un problema de minimización con $f \in C_0(A)$:

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

En lugar de buscar el mejor candidato para C que minimice el funcional fijaremos una curva C y consideraremos una variable f . Desde esta perspectiva, el funcional $\mathcal{I}(C)$ puede escribirse como una función $g(f)$ con g en el espacio dual $C_0^*(A)$. Ya que podemos identificar una curva C con $\mathcal{I}(C)$ considerada como una función de f y podemos identificar C con la función $g \in C_0^*(A)$. Así, el espacio para las curvas candidatas C se convierte en un espacio funcional.

Si C_n es una sucesión de curvas con límite débil C entonces $\mathcal{I}(C_n)$ tiende a $\mathcal{I}(C)$ y $\mathcal{I}(C)$ se convierte en una función continua de C . Más precisamente, una *curva generalizada* es un elemento de $C_0^*(A)$ que se puede expresar como un límite débil

de una sucesión de curvas. Los elementos más simples del espacio $C_0^*(A)$ son tales g que existen al menos para un par $(x, \dot{x}) \in A$. Estos son los llamados *elementos de línea* y cada curva podría verse como una mezcla ponderada de tales elementos de línea. O más precisamente, si llamamos g_α a cada elemento de línea de la curva $g \in C_0^*(A)$ es posible elegir una medida con signo μ en el conjunto A tal que

$$|g| = \int_A |d\mu|$$

O en otras palabras, cada curva $g \in C_0^*(A)$ es una mezcla con signo de elementos de línea g_α .

$$g = \int_A g_\alpha d\mu$$

Este concepto generalizado de solución resultó útil en el cálculo de variaciones, ya que se podían lograr muchas soluciones en forma de curva generalizada.

Ejemplo 3.1. Considere el problema de minimización:

$$I(y) = \int_0^1 y^2 + (y_x^2 - 1)^2 dx$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

donde y es continua y y_x existe en c.t.p.

A través de todos los y admisibles el mínimo del funcional es cero. A continuación definimos una sucesión de curvas minimizantes. Considere la extensión 1-periódica de la función zig-zag

$$\theta(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Ahora definimos una sucesión

$$y_n(x) = \frac{\theta(nx)}{n}.$$

De hecho, vemos que $I(y_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pero el objeto que es el límite de la sucesión no existe en sentido clásico, ya que debe satisfacer $y = 0$ y $|y_x| = 1$ simultáneamente. Considerando una curva generalizada que asigna cero a cada punto y una medida ν_x asociada a las derivadas, vemos que $\nu_x \subset \{-1, 1\}$ y luego para cada x encontramos la ponderada función $\lambda(x)$ tal que:

$$\nu_x = \lambda(x)\delta_1 + (1 - \lambda(x))\delta_{-1}.$$

Donde δ_1 y δ_{-1} son los deltas de Dirac que asignan 1 o -1 , aquí $0 \leq \lambda(x) \leq 1$. Debido a la simetría vemos que $\lambda(x) = \frac{1}{2}$. Así que obtuvimos la medida con signo asociada a cada elemento de línea que especifica un único miembro de nuestro espacio funcional visto como una curva generalizada. Por lo tanto la solución es encontrada.

Alejándose del marco de las curvas generalizadas, una medida de Young puede pensarse como una distribución de probabilidad límite para una sucesión de $\{f_j\}$. En otras palabras, para cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^m$ sea $f_j : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces

$$\nu_x(E) = \lim_{R \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|\{y \in B_R(x) : f_j(y) \in E\}|}{|B_R(x)|}$$

Donde $B_R(x)$ es una bola centrada en x con radio $R > 0$. Una buena fuente que proporciona un análisis exhaustivo de esta definición es [Ped97].

Una vez vista una breve introducción histórica y visto el ejemplo estamos listos para anunciar la definición más importante del capítulo.

Definición 3.2. Una **medida de Young** $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ asociada a una sucesión dada de funciones $w_n : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una familia de medidas de probabilidad (medidas unitaria) tales que para todo $x \in \Omega$ y cualquier continua $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$\bar{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(\lambda) d\nu_x(\lambda) = \langle \phi, \nu_x \rangle$$

es medible según Lebesgue.

Definición 3.3. Una medida de Young ν_x se llama **medida de Young homogénea** si es constante y no depende de $x \in \Omega$ en c.t.p.. En este caso, podemos prescindir de x en ν_x y escribir ν .

Esta definición se ajusta a los propósitos que hemos formulado al principio y más aún, se demuestra que es esencial para el Cálculo de Variaciones. Pero para la comprensión fundamental debemos mostrar la existencia de un objeto con tales propiedades para una sucesión dada $\{w_n\}$. Para eso, remarcamos un par de ingredientes que se utilizarán. Para las demostraciones nos referimos a cualquier libro de análisis funcional, por ejemplo [Con94] o más orientado al cálculo de variaciones [FL07]. En primer lugar, recordemos que por el teorema de representación de Riesz el dual del espacio $C_0(\mathbb{R}^m)$ es el espacio de una medida de radón de valor real con signo que denotamos $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. En segundo lugar, el espacio $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ es el dual de $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$, donde el subíndice w representa funciones débilmente* medibles con la norma suprema esencial. Si eligiéramos una medibilidad fuerte, es decir, el espacio $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ no se puede identificar con el dual de $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$ asociando la forma lineal

$$w \mapsto \int_{\Omega} \langle \mu(x), w(x) \rangle dx.$$

Con esto en mente, proporcionamos los argumentos de existencia en el siguiente teorema y comprobamos que las medidas de Young realmente viven en el espacio $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$.

Teorema 3.4. [Teorema de existencia] Dada una sucesión de funciones medibles $\{w_i\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto de medida finita, existe una subsucesión $\{w_{i_k}\}$ y una medida de Young ν , en el sentido de que

(i.) (es una medida de probabilidad) $\|\nu_x\| \leq 1$ y $\nu_x \geq 0$ para c.t.p. $x \in \Omega$.

(ii.) (define el límite débil* para sucesiones) Para todo $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ se cumple que

$$\phi(w_{i_k}) \xrightarrow{*} \langle \nu_x, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(t) d\nu_x(t) \text{ en } L^\infty(\Omega).$$

Demostración. (ii.) Para cada $x \in \Omega$: definimos

$$\nu_i : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

$$x \mapsto \nu_i(x) := \delta_{w_i(x)}.$$

Por lo tanto, para todo i la norma

$$|\nu_i(x)| = \int_{\mathbb{R}^m} d\delta_{w_i(x)} = 1,$$

que coincide con la norma suprema esencial en $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$. Ya que para todo $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ la función

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \phi(t) d\delta_{w_i(x)}(z) = \phi(w_i(x))$$

es medible, por lo que concluimos que efectivamente $\nu_i \in L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$.

Por lo tanto tenemos funciones dentro de la bola unitaria en el dual de $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$, por el Teorema de Banach-Alaoglu este conjunto es débil* compacto, y por un corolario del teorema existe una subsucesión $\{w_{i_k}\} \subset \{w_i\}$ y un elemento $\nu \in L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ tal que $\nu_{i_k} \xrightarrow{*} \nu$.

Entonces tenemos para todo $\psi \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi(x, \nu_{i_k}(x)) dx &= \int_{\Omega} \langle \nu_{i_k}(x), \psi(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{M}, C_0} dx \rightarrow \int_{\Omega} \langle \nu_x, \psi(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{M}, C_0} dx \\ &= \int_E \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, z) d\nu_x(z) dx \end{aligned}$$

En particular, si elegimos $\psi(x, z) := h(x)\phi(z)$ con $x \in \Omega$ y $z \in \mathbb{R}^m$ y $h \in L^1(\Omega)$ y $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ luego $\psi \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$ y por lo tanto

$$\int_{\Omega} h(x)\phi(w_{i_k}(x)) dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x) \int_{\mathbb{R}^m} \phi(z) d\nu_x(z) dx$$

(i.) Al ajustar adecuadamente $h \geq 0$ y $\phi \geq 0$ tenemos que $\nu_x \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. La semicontinuidad de la norma suprema esencial implica $\|\nu_x\| \leq 1$. \square

3.2. Teorema fundamental para las medidas de Young

Teorema 3.5. [Teorema fundamental para las medidas de Young] Dada una sucesión de funciones $\{w_i\} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ que genera una medida de Young $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i.) Si $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función equiintegrable de Carathéodory en $L^1(\Omega)$ tal que la sucesión $\{f(x, w_i(x))\}$ está uniformemente acotada entonces

$$f(x, w_i(x)) \rightharpoonup \bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t) d\nu_x(t) \text{ in } L^1(\Omega) \text{ para en c.t.p. } x \in \Omega.$$

(ii.) Para un conjunto compacto $K \in \mathbb{R}^N$ se cumple que

$$\text{supp } \nu_x \subset K \text{ en c.t.p. } x \in \Omega \text{ si y solo si } \text{dist}(w_i, K) \rightarrow 0 \text{ en medida.}$$

La afirmación (i.) se puede probar estableciendo una semicontinuidad más baja para los integrandos normales equiintegrables como en [FL07] pero como posponemos los resultados de semicontinuidad más abajo se ha elegido otro enfoque por coherencia.

Demostración. (i.) Por el teorema de Dunford-Pettis, la equiintegrabilidad de una sucesión acotada en $L^1(\Omega)$ implica su relativa compacidad débil. Aquí mostramos que una compacidad relativa débil implica una convergencia débil para las funciones de Carathéodory ajustando la prueba en [Bal89].

Dado $f(\cdot, w_i)$, dividimos $f = f^+ - f^-$ donde $f^\pm = \max\{\pm f, 0\}$. Tenemos que ambos $f^-(\cdot, w_i)$ y $f^+(\cdot, w_i)$ siguen siendo funciones de Carathéodory y, según el teorema de Dunford-Pettis, ambas conservan una compacidad relativa débil en $L^1(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. Por lo tanto, para la prueba podemos suponer $f \geq 0$. Definimos

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| \leq k, \\ 1 + k - |x| & \text{para } k \leq |x| \leq k + 1, \\ 0 & \text{para } |x| \geq k + 1. \end{cases}$$

Por lo tanto $f_k := g_k f \in C_0(\Omega \times \mathbb{R}^m)$. Vamos a demostrar que para todo $\phi \in L^\infty(\Omega)$ es

$$\int_{\Omega} \phi f^k(x, w_i) dx \longrightarrow \int_{\Omega} \phi f(x, w_i) dx \quad (3.1)$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Efectivamente, tenemos

$$\left| \int_{\Omega} \phi (f^k(x, w_i) - f(x, w_i)) dx \right| \leq C \int_{\{|w_i| \geq k\}} f(x, w_i) dx.$$

Se puede demostrar (ver Lema 6.1 en [Ped97]) que la equiintegrabilidad implica

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(\sup_i \int_{\{f(x, w_i) \geq \delta\}} f(x, w_i) dx \right) = 0.$$

Entonces tenemos

$$\int_{\{|w_i| \geq k\}} f(x, w_i) dx \leq \epsilon + \delta \{x \in \Omega : |w_i| \geq k\} \leq 2\epsilon$$

y se establece 3.1.

Ahora, por definición de la medida de Young

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi f_k(x, w_i) dx \rightarrow \int_{\Omega} \phi \langle \nu_x, f_k(x, \cdot) \rangle dx.$$

Usando el teorema de la convergencia monótona, eligiendo $\phi \geq 0$ y poniendo $k \rightarrow \infty$ obtenemos

$$f(x, w_i) \rightarrow \langle \nu_x, f \rangle.$$

(ii.) Sea $\text{supp } \nu_x \subset K$, defina $f(x, z) := \chi_{\Omega}(x) \text{mín}\{\text{dist}(z, K), 1\}$, que en este caso es una función Caratheodory equiintegrable acotada, por lo tanto por (i.) tenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \text{mín}\{\text{dist}(w_n(x), K), 1\} dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \text{mín}\{\text{dist}(t, K), 1\} d\nu_x(t) dx = 0, \end{aligned}$$

y por el teorema de convergencia de Vitali $\text{dist}(w_i, K) \rightarrow 0$ en medida en c.t.p. $x \in \Omega$.

Por el contrario, sea $\text{dist}(w_i, K) \rightarrow 0$ en medida, definimos una función con soporte compacto en otro lugar de K , es decir $\phi \in C_0(\mathbb{R}^m \setminus K)$. Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ hay un conjunto compacto $K_1 \subset \mathbb{R}^m \setminus K$ tal que $|\phi(z)| < \epsilon$ para todos los puntos que no están en el compacto K_1 . Existe una constante $C_{\epsilon} > 0$ tal que

$$|\phi(z)| \leq \epsilon + C_{\epsilon} \text{dist}(z, K) \text{ para todos } z \in \mathbb{R}^m \setminus K.$$

De lo contrario, sería posible definir una sucesión $|\phi(z_i)|$ con valores grandes arbitrarios para z_i distantes de K_1 , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, la sucesión de valores positivos $\{|\phi(w_i) - \epsilon|\}^+$ converge a cero en la medida. Como está acotado podemos aplicar el apartado (i.) anterior para establecer que

$$\langle \nu_x, (|\phi(\cdot)| - \epsilon)^+ \rangle_{\mathcal{M}, C_0} = 0 \text{ en c.t.p. } x \in \Omega.$$

Poniendo $\epsilon \rightarrow 0^+$ obtenemos

$$\langle \nu_x, \phi \rangle_{\mathcal{M}, C_0} = 0 \text{ para todos } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m \setminus K).$$

Por lo tanto $\text{supp } \nu_x \subset K$ en c.t.p. $x \in \Omega$. □

A continuación, es interesante observar las propiedades que plantean las medidas de Young, lo que las hace tan importantes para comprender el comportamiento de las sucesiones.

En primer lugar, permiten formular explícitamente los límites débiles.

Corolario 3.6. Dada una sucesión débilmente convergente $\{w_j\}$ en $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ para $1 \leq p < \infty$ o débil* convergente en $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ que genera una medida de Young $\nu = \{\nu_x\}$ para en c.t.p. $x \in \Omega$ cuyo límite está dado por

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^m} t d\nu_x(t). \quad (3.2)$$

Demostración. Dada una sucesión $\{w_n\}$ que genera ν es posible extraer una sub-sucesión $\{w_{n_k}\}$ que genera la misma medida de Young. Dado que para cualquier $g \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^m)$ la sucesión $\{gw_{n_k}\}$ es equiintegrable y por el teorema anterior si ponemos $f(x, t) = g(x)t$ obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x) \cdot w_{n_k}(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^m} t d\nu_x(t) dx$$

y por unicidad de límites obtenemos el resultado. \square

Otra propiedad importante de las medidas de Young que se desprende del Teorema Fundamental es que aunque la sucesión en cuestión presente una concentración considerable la medida de Young generada se mantiene bien definida.

Corolario 3.7. Dada una sucesión de funciones medibles $w_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ entonces $w_n \xrightarrow{m} w$ si y solo si w_n genera la medida de Young $\nu_x = \delta_{w(x)}$.

Demostración. Supongamos que w_n genera la medida de Young $\nu_x = \delta_{w(x)}$. Podemos aplicar la desigualdad de Markov que establece que para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$|\{x \in \Omega : |w_n(x) - w(x)| \geq \varepsilon\}| \leq \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \min\{|w_n(x) - w(x)|, \varepsilon\} dX.$$

El lado derecho es una función de Carathéodory que es equiintegrable ya que está acotada y por lo tanto converge a cero como $n \rightarrow \infty$. Entonces concluimos que $w_n \xrightarrow{m} w$. Para probar la otra dirección supongamos primero que $w_n \xrightarrow{m} w$. Sea $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$, dado que φ también es uniformemente continuo, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que como $n \rightarrow \infty$ es

$$|\{\varphi(w_n) - \varphi(w) \geq \varepsilon\}| \leq |\{w_n - w \geq \delta\}| \rightarrow 0.$$

lo que significa la convergencia en medida de $\varphi(w_n(x))$ a $\varphi(w(x))$, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que para cualquier conjunto medible de Borel B es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \varphi(w_n(x)) dx = \int_B \varphi(w(x)) dx$$

y por lo tanto w_n genera la medida de Young $\nu_x = \delta_{w(x)}$. \square

Cuando se trabaja con una sucesión, es de gran importancia, especialmente para nuestras necesidades, capturar su comportamiento de oscilación. El siguiente corolario establece precisamente eso.

Corolario 3.8. Sea $Q = (0,1)^k$, $w \in L^p(Q; \mathbb{R}^m)$ para $1 \leq p \leq \infty$, considere la sucesión multidimensional zig-zag definida por $w_n(x) = w(nx)$ donde w se extiende periódicamente en todas las direcciones. Entonces w_n genera la medida de Young ν :

$$\langle \nu_x, \varphi \rangle = \int_Q \varphi(w(t)) dt, \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m).$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ y sea $g \in C_c^1(Q)$, ya que la periodicidad de w tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_Q g(x)\varphi(w_n(x)) dx &= \int_Q g(x)\varphi(w(nx))dx \\
 &= (-1)^k \int_Q \partial_1 \cdots \partial_k g(x) \left(\int_{xQ} \varphi(w(nt))dt \right) dx \\
 &= (-1)^k \int_Q \partial_1 \cdots \partial_k g(x) \left(n^{-k} \int_{nxQ} \varphi(w(t))dt \right) dx \\
 &= (-1)^k \int_Q \partial_1 \cdots \partial_k g(x) \left(n^{-k} [nx_1] \cdots [nx_k] \int_Q \varphi(w(t))dt \right. \\
 &\quad \left. - n^{-k} \int_{([nx]-nx)Q} \varphi(w(t))dt \right) dx \\
 &\rightarrow (-1)^k \int_Q \partial_1 \cdots \partial_k g(x) x_1 \cdots x_k \int_Q \varphi(w(t))dt dx \\
 &= \int_Q g(x) \int_Q \varphi(w(t))dt dx \text{ como } n \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por lo tanto por densidad w_n genera la medida de Young ν . \square

3.3. Resultados de semicontinuidad inferior

Hemos visto que las medidas de Young son útiles como concepto ya que dan un significado preciso a la idea de 'mezcla de fases infinitesimalmente finas' y proporcionan un marco para soluciones generalizadas donde no existen minimizadores clásicos. En esta sección discutimos brevemente las ventajas de las medidas de Young como herramienta técnica. Los siguientes dos resultados permiten, entre otras cosas, extender los resultados de semicontinuidad inferior para integrales $\int f(Du(x))dx$ a integrales $\int f(x, u(x), Du(x))dx$ sin esfuerzo adicional. En términos más generales, las medidas de Young son una herramienta bastante eficiente para eliminar toda dependencia de términos de importancia inferior mediante argumentos generales. El primer resultado muestra que la medida de Young es suficiente para calcular los límites de las funciones de Carathéodory, el segundo amplía la caracterización de la convergencia fuerte.

Corolario 3.9. Supongamos que la sucesión de funciones $z_k : E \rightarrow \mathbf{R}^d$ genera la medida de Young ν . Sea $f : E \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ una función de Carathéodory (medible en el primer argumento y continua en el segundo) y supongamos que la parte negativa $f^-(x, z_k(x))$ es débilmente relativamente compacta en $L^1(E)$. Después

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x, z_k(x)) dx \geq \int_E \int_{\mathbf{R}^d} f(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx.$$

Si, además, la sucesión de funciones $x \mapsto |f|(x, z_k(x))$ es débilmente relativamente compacta en $L^1(E)$ entonces

$$f(\cdot, z_k(\cdot)) \rightarrow \bar{f} \text{ in } L^1(E), \quad \bar{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx$$

Demostración. La segunda afirmación sigue por la aplicación de esta desigualdad a $\tilde{f}(x, p) = \pm\varphi(x)f(x, p)$ para todo $\varphi \in L^\infty(E)$, $\varphi \geq 0$.

Primero considere el caso $f \geq 0$. Supongamos temporalmente que, además,

$$f(x, \lambda) = 0 \quad \text{si } |\lambda| \geq R.$$

Por el teorema de Scorza-Dragoni existe una sucesión creciente de conjuntos compactos E_j tal que $|E \setminus E_j| \rightarrow 0$ y $f|_{E_j \times \mathbf{R}^d}$ es continua. Definir $F_j : E \rightarrow C_0(\mathbf{R}^d)$ por $F_j(x) = \chi_{E_j}(x)f(x, \cdot)$. Entonces $F_j \in L^1(E; C_0(\mathbf{R}^d))$ y la convergencia de $\delta_{z_k(\cdot)}$ a ν en el espacio dual produce

$$\begin{aligned} \int_E f(x, z_k(x)) dx &\geq \int_E \langle \delta_{z_k(x)}, F_j(x) \rangle \\ &\rightarrow \int_E \langle \nu_x, F_j(x) \rangle dx = \int_{E_j} f(x, \lambda) d\nu_x(\lambda). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Haciendo $j \rightarrow \infty$ obtenemos la afirmación por el teorema de la convergencia monótona. Considere una sucesión creciente $\{\eta_l\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, que converge a 1, usa la estimación para $f_l(x, \lambda) = f(x, \lambda)\eta_l(\lambda)$ y aplica nuevamente el teorema de convergencia monótona. Esto termina la prueba si $f \geq 0$ o más generalmente si f está acotada desde abajo.

Para general f let

$$\begin{aligned} h_k(x) &= f(x, z_k(x)) = h_k^+(x) - h_k^-(x) \\ f_M(x, \lambda) &= \text{máx}(f(x, \lambda), -M) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por las caracterizaciones equivalentes de equiintegrabilidad (ver, por ejemplo, [Me 66]) para cada $\epsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que

$$\sup_k \int_{h_k^- \geq M} h_k^-(x) dx < \epsilon.$$

Por eso

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f(x, z_k(x)) dx + \epsilon &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_M(x, z_k(x)) dx \\ &\geq \int_E \int_{\mathbf{R}^d} f_M(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx \geq \int_E f(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrario, la prueba está terminada. \square

Corolario 3.10. Sea $u_j : E \rightarrow \mathbf{R}^d, v_j : E \rightarrow \mathbf{R}^{d'}$ medible y suponga que $u_j \rightarrow u$ en c.t.p. mientras que v_j genera la medida de Young ν . Entonces la sucesión de pares $(u_j, v_j) : E \rightarrow \mathbf{R}^{d+d'}$ genera la medida de Young $x \mapsto \delta_{u(x)} \otimes \nu_x$.

Demostración. Sea $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in C_0(\mathbf{R}^{d'})$, $\eta \in L^1(E)$. Entonces $\varphi(u_j) \rightarrow \varphi(u)$ en c.t.p. y $\eta\varphi(u_j) \rightarrow \eta\varphi(u)$ en $L^1(E)$ por el teorema de la convergencia dominada. Además por suposición

$$\psi(v_j)^* \bar{\psi} \quad \text{in } L^\infty, \quad \bar{\psi}(x) = \langle \nu_x, \psi \rangle.$$

Por eso

$$\int_E \eta(\varphi \otimes \psi)(u_j, v_j) dx = \int_E \eta\varphi(u_j) \psi(v_j) dx \rightarrow \int_E \eta\varphi(u) \langle \nu_x, \psi \rangle dx$$

o

$$(\varphi \otimes \psi)(u_j, v_j) \xrightarrow{*} \langle \delta_{u(\cdot)} \otimes \nu, \varphi \otimes \psi \rangle \text{ in } L^\infty(E).$$

La afirmación se sigue ya que las combinaciones lineales de productos tensoriales $\varphi \otimes \psi$ son densas en $C_0(\mathbf{R}^{d+d'})$.

Una aplicación típica de los corolarios es la siguiente. Sea $f : \Omega \times (\mathbf{R}^m \times M^{m \times n}) \rightarrow \mathbf{R}$ una función de Carathéodory y supongamos que $f \geq 0$. Supongamos que $u_j \rightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ y que Du_j genera la medida de Young ν . Tomando $v_j = Du_j$, $z_j = (u_j, v_j)$ obtenemos.

$$\begin{aligned} & \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega f(x, u_j(x), Du_j(x)) dx \\ & \geq \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^m \times M^{m \times n}} f(x, \lambda, \mu) d\delta_{u(x)}(\lambda) \otimes d\nu_x(\mu) dx \\ & = \int_\Omega \int_{M^{m \times n}} f(x, u(x), \lambda) d\nu_x(\lambda) dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La prueba de la semicontinuidad inferior se reduce así a la verificación de la desigualdad

$$\int_{M^{m \times n}} g(\lambda) \nu_x(\lambda) \geq g(Du(x)) = g(\langle \nu_x, \text{id} \rangle)$$

para la función

$$g(\lambda) = f(x, u(x), \lambda)$$

con el primer y segundo argumento 'congelado'. \square

3.4. Ejemplos

Ejemplo 3.11. Sea $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la extensión periódica de la función dada por

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{if } 0 \leq x < \lambda \\ b & \text{if } \lambda \leq x < 1 \end{cases}$$

y definimos $z_j : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$z_j(x) = h(jx).$$

Usando la periodicidad de h uno comprueba fácilmente que,

$$z_j \xrightarrow{*} \int_0^1 h(y)dy = \lambda a + (1 - \lambda)b$$

y de manera similar

$$f(z_j) \xrightarrow{*} \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Por lo tanto, z_j genera una medida de Young ν dada por

$$\nu_x = \lambda\delta_a + (1 - \lambda)\delta_b.$$

En particular ν_x es independiente de x , entonces homogénea. Más generalmente, si $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es localmente integrable y periódica en el cuadrado unitario $[0,1]^n$ entonces z_j genera una medida de Young homogénea ν dada por

$$\int_{\mathbf{R}} g d\nu = \int_{[0,1]^n} g(h(y))dy.$$

Para un conjunto de Borel $B \subset \mathbf{R}$ se tiene

$$\nu(B) = |(0,1)^n \cap h^{-1}(B)|.$$

Ejemplo 3.12. Volviendo al ejemplo 3.1

$$I(u) = \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 + u^2 dx$$

Sea u_j una sucesión tal que

$$I(u_j) \rightarrow 0, \quad u_j(0) = u_j(1) = 0,$$

y sea $z_j = (u_j)_x$. Entonces z_j está acotado en L^4 , una subsucesión genera una medida de Young ν y $\|\nu_x\| = 1$ en c.t.p. Si dejamos $g(p) = \min((p^2 - 1)^2, 1)$ deducimos que

$$\langle \nu_x, g \rangle = 0 \quad \text{para c.t.p. } x.$$

Por lo tanto, $\text{supp } \nu_x \subset \{-1,1\}$ y $\nu_x = \lambda(x)\delta_{-1} + (1 - \lambda(x))\delta_1$ en c.t.p. Por lo tanto

$$z_{j_k} \xrightarrow{*} \langle \nu_x, \text{id} \rangle = 1 - 2\lambda(x)$$

y

$$u_{j_k}(a) = \int_0^a z_{j_k} dx \rightarrow \int_0^a (1 - 2\lambda(x))dx$$

Dado que $u_j \rightarrow 0$ en L^2 y por lo tanto $\lambda(x) = 1/2$ en c.t.p. Por lo tanto, z_{j_k} genera la única (homogénea) medida de Young

$$\nu_x = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Por unicidad toda la sucesión z_j genera esta medida de Young. Aunque hay muchas sucesiones de minimización diferentes para I , todas generan la misma medida de Young. La medida de Young captura la característica esencial de las sucesiones minimizantes. Tienen que usar pendientes (cercanas a) ± 1 en igual proporción en una mezcla cada vez más fina.

Uno puede ver el par (u, ν) como una solución generalizada del problema $I \rightarrow \min$. La derivada u_x se reemplaza por una medida de probabilidad y el acoplamiento entre u y ν ocurre a través del centro de masa de $\nu(cf)$:

$$u_x = \langle \nu_x, \text{id} \rangle.$$

Ejemplo 3.13. (Soluciones aproximadas del problema de los dos pozos)

Sean $A, B \in M^{m \times n}$, $BA = a \otimes n$, $F = \lambda A + (1 - \lambda)B$, $\lambda \in (0, 1)$. Considere una sucesión de funciones $u_j : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ con una constante de Lipschitz uniformemente acotada que satisface

$$\begin{aligned} \text{dist}(Du_j, \{A, B\}) &\rightarrow 0 \quad \text{en medida en } \Omega, \\ u_j(x) &= Fx \quad \text{in } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sea ν la medida de Young generada por (una subsucesión de) Du_j . Entonces $\|\nu_x\| = 1$ produce $\text{supp } \nu_x \subset \{A, B\}$, es decir, $\nu_x = \mu(x)\delta_A + (1 - \mu(x))\delta_B$. Pasando a otra subsucesión podemos asumir $u_j \xrightarrow{*} u$ en $W^{1, \infty}(\Omega, \mathbf{R}^m)$, y tenemos

$$Du(x) = \mu(x)A + (1 - \mu(x))B = A + (1 - \mu(x))a \otimes n.$$

Extendiendo u_j y u por Fx fuera de Ω deducimos que $v(x) = u(x) - Ax$ es constante en los planos $x \cdot n = \text{constante}$. Por lo tanto $u(x) = Fx$ y $\mu(x) = \lambda$. Por lo tanto, $\{Du_j\}$ genera la medida de Young única (homogénea)

$$\nu_x = \lambda\delta_A + (1 - \lambda)\delta_B.$$

Ahora echamos un vistazo a los contraejemplos y veremos lo que la medida de Young no puede detectar.

La medida de Young describe las proporciones de fase local en una mezcla infinitesimalmente fina (modelada matemáticamente por una sucesión que desarrolla oscilaciones cada vez más finas). Esto es exactamente lo que se necesita para calcular los límites de las integrales $\int_U f(z_j)$. Sin embargo, hay otras cantidades naturales que no se pueden calcular a partir de la medida de Young.

Ejemplo 3.14. (micromagnetismo).

La energía de un gran cuerpo magnético rígido representado por un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, está dada por

$$I(m) = \int_{\Omega} \varphi(m) + \int_{\mathbf{R}^3} |h_m|^2$$

Aquí $m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ es la magnetización y h_m es la proyección de Helmholtz de $-m$ (extendido por cero fuera de Ω), es decir, el campo de gradiente único que satisface $\operatorname{div} h_m = -\operatorname{div} m$ en el sentido de distribuciones. En unidades adecuadas, m satisface la condición de saturación $|m| = 1$. Por simplicidad hemos despreciado la energía de intercambio.

Sea $m_j : \Omega \rightarrow S^2 \subset \mathbf{R}^3$ una sucesión de magnetizaciones que genera una medida de Young ν . Después

$$\int_{\Omega} \varphi(m_j) dx \rightarrow \int_{\Omega} \langle \nu_x, \varphi \rangle dx.$$

El límite de $\int_{\mathbf{R}^3} |h_{m_j}|^2$, sin embargo, en general no está determinado por la medida de Young (ver Figura 3.14). De hecho, sea f la extensión periódica de la función de signo en $[-1/2, 1/2]$, sea $\Omega = [0, 1]^3$ y sea

$$m_j = f(jx^1) e^1 \chi_{\Omega}; \quad \tilde{m}_j = f(jx^2) e^1 \chi_{\Omega}.$$

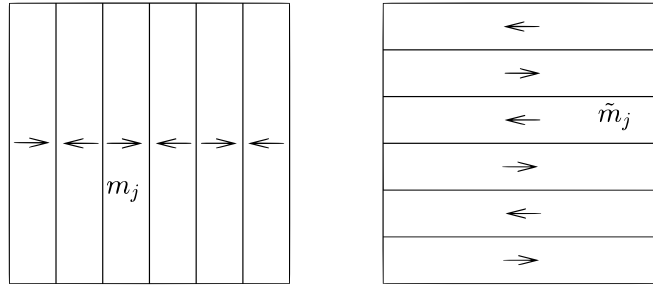


Figura 3.1: Ambas sucesiones generan la misma medida de Young pero m_j es casi un gradiente mientras que \tilde{m}_j casi no tiene divergencia. Imagen utilizada desde [Mul98].

Ambas sucesiones generan la misma medida de Young (homogénea) $\nu_x = \frac{1}{2} \delta_{e^1} + \frac{1}{2} \delta_{-e^1}$. Por otra parte no es difícil comprobar que $\|h_{m_j}\|_2 \rightarrow 1$ mientras que $\|h_{\tilde{m}_j}\|_2 \rightarrow 0$. Primero reemplazamos χ_{Ω} por una función suavizante φ y demostramos que los campos resultantes M^j y \tilde{M}^j satisfacen $\operatorname{curl} M_j \rightarrow 0, \operatorname{div} \tilde{M}_j \rightarrow 0$ en H^{-1} ; luego se puede usar la estimación $\|h_{m_j} - h_{M_j}\|_2 \leq \|m_j - M_j\|_2$ que se cumple ya que la función $m \mapsto -h_m$ es una proyección ortogonal. Alternativamente, se puede usar la representación de h_m en el espacio de Fourier.

Ejemplo 3.15. (correlaciones).

El límite de

$$I_j(u_j) := \int_0^1 u_j(x) u_j \left(x + \frac{1}{j} \right) dx$$

no está determinado por la medida de Young $\{u_j\}$. De hecho consideramos

$$\begin{aligned} u_j(x) &= \sin j\pi x \\ v_j(x) &= \sin 2j^2\pi x. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ambas sucesiones generan la misma medida de Young (homogénea) $\nu_x = \frac{2}{\pi} (\sin^{-1})'(y) dy$, pero

$$\begin{aligned} I_j(u_j) &= \int_0^1 \sin(j\pi x) \sin(j\pi x + \pi) \rightarrow -1/2, \\ I_j(v_j) &= \int_0^1 \sin(j^2\pi x) \sin(j^2\pi x + 2j\pi) \rightarrow 1/2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.5. Medidas gradientes de Young

Definición 3.16. Dada una sucesión $u_n \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $p \in [1, \infty]$, tal que $\|u_n\| < \infty$ y

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m), \text{ o } u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Una medida de Young ν se denomina **medida gradiente de Young** si

$$\delta_{\nabla u(x)} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \text{ in } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m \times d})).$$

Definición 3.17. Dado un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^{m \times d}$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos los siguientes conjuntos para las medidas de Young:

- $H(\Omega) \subset \mathbb{R}^{m \times d}$ el conjunto de medidas gradientes homogéneas de Young,

Y cuando $\text{supp}(\nu) \subset K$:

- $H(\Omega, K) \subset \mathbb{R}^{m \times d}$ el conjunto de medidas gradientes homogéneas de Young con soporte en K ,
- $\mathcal{M}^{pc}(K) := \{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m \times d}) : f(\nabla u) \leq \int f d\nu, \text{ para toda } f \text{ policonvexo}\}$,
- $\mathcal{M}^{qc}(K) := \{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m \times d}) : f(\nabla u) \leq \int f d\nu, \text{ para toda } f \text{ cuasiconvexo}\}$,
- $\mathcal{M}^{rc}(K) := \{\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m \times d}) : f(\nabla u) \leq \int f d\nu, \text{ para toda } f \text{ convexa de rango-1}\}$.

Teorema 3.18. (Clasificación de medidas gradientes de Young). La función (débil* medible) $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(M^{m \times n})$ es $W^{1,\infty}$ medida gradiente de Young si y solo si $\nu_x \geq 0$ en c.t.p. y existe un conjunto compacto $K \subset M^{m \times n}$ y $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tal que se cumplen las siguientes tres condiciones.

- $\text{supp } \nu_x \subset K$ para c.t.p. x ,
- $\langle \nu_x, id \rangle = Du$ para c.t.p. x ,
- $\langle \nu_x, f \rangle \geq \int f(\nabla u)$ para c.t.p. x y toda cuasiconvexa $f : M^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$.

El punto principal es mostrar que la desigualdad de Jensen para funciones cuasiconvexas caracteriza las medidas gradientes homogéneas de Young. La prueba se basa en los teoremas de separación de Hahn-Banach y la representación de f^{qc} . La extensión a medidas de Young no homogéneas utiliza principalmente generalidades sobre funciones medibles, en particular su aproximación por constantes por partes.

Una herramienta técnica importante de interés independiente es un resultado de truncamiento para sucesiones de gradientes, a veces conocido como el lema de Zhang. (Acerbi y Fusco obtuvieron previamente resultados estrechamente relacionados basados en el trabajo anterior de Liu). Implica que cada medida gradiente de Young soportada en un conjunto compacto $K \subset M^{m \times n}$ puede ser generada mediante una sucesión $\{Dv_j\}$ cuya norma L^∞ se puede acotar en términos de K solamente. Para el resto de esta sección adoptamos las siguientes convenciones:

- K es un conjunto compacto en $M^{m \times n}$,
- U, Ω son dominios acotados en $\mathbf{R}^n, |\partial\Omega| = |\partial U| = 0$.

Lema 3.19. (lema de Zhang). Sea $|K|_\infty = \sup\{|F| : F \in K\}$.

(i) Sea $u_j \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ y supongamos que

$$\text{dist}(Du_j, K) \rightarrow 0 \text{ en } L^1(\mathbf{R}^n)$$

Entonces existe una sucesión $v_j \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^m)$ tal que

$$\begin{aligned} |Dv_j| &\leq c(n, m)|K|_\infty \\ |\{u_j \neq v_j\}| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

(ii) Sea $U \in \mathbf{R}^n$ un dominio acotado y sea $u_j \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U; \mathbf{R}^m)$. Supongamos que

$$\text{dist}(Du_j, K) \rightarrow 0 \text{ en } L^1(U), \quad u_j \rightarrow u \text{ en } L^1_{\text{loc}}(U)$$

Entonces existe $v_j \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U; \mathbf{R}^m)$ tal que

$$\begin{aligned} |Dv_j| &\leq c(n, m)|K|_\infty \\ |\{u_j \neq v_j\}| &\rightarrow 0, \quad v_j = u \text{ cerca } \partial U \end{aligned}$$

Las estimaciones se pueden reemplazar por la afirmación más fuerte $\text{dist}(Dv_j, K^c) \rightarrow 0$ en L^∞ . Tenga en cuenta también que la afirmación $|\{u_j \neq v_j\}| \rightarrow 0$ implica

$$|\{Du_j \neq Dv_j\}| \rightarrow 0$$

ya que para cualquier función de Sobolev $Du = 0$ en c.t.p. en $\{u = 0\}$.

Demostración. La parte (i) se sigue de la demostración del Teorema 6.6.3 en [EG92], pp. 254-255, con $\lambda = 3C|K|_\infty$. La parte (ii) sigue con un argumento de localización estándar.

Ahora supongamos que $\{u_j\}$ está acotado en $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ y $\{Du_j\}$ genera la medida gradiente de Young ν . Entonces $Du_j \rightarrow Du$ en L^∞ , $Du(x) = \langle \nu_x, \text{id} \rangle$ y $u_j \rightarrow u$ (localmente) en L^∞ . Llamamos u a la deformación subyacente de ν . La medida

de Young $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(M^{m \times n})$ se llama homogénea si es constante en Ω (hasta un conjunto de medida cero). Como de costumbre, identificamos funciones constantes con sus valores y vemos el conjunto $H(\Omega)$ de medidas gradientes homogéneas de Young como un subconjunto de $\mathcal{M}(M^{m \times n})$. \square

Lema 3.20. Tenemos

(i) Si $\nu \in H(\Omega, K)$ y $\langle \nu, \text{id} \rangle = 0$ entonces existe una sucesión $u_j \in W_0^{1, \infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ tal que Du_j genera ν y satisface $|Du_j| \leq C|K|_\infty$.

(ii) $H(\Omega, K)$ es débil* compacto en $\mathcal{M}(M^{m \times n})$.

(iii) El conjunto $H(\Omega, K)$ es independiente de Ω . Si ν es una medida gradiente de Young con $\text{supp } \nu(x) \subset K$ en c.t.p. cuya deformación subyacente u coincide con la función afín en $\partial\Omega$ (en el sentido de $W_0^{1, \infty}$) entonces el promedio $\text{Av}\nu$ definido por

$$\langle \text{Av } \nu, f \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \langle \nu_x, f \rangle dx$$

pertenece a $H(K)$.

(iv) El conjunto $H_F(K) = \{\nu \in H(K) : \langle \nu, \text{id} \rangle = F\}$ es débil* cerrado y convexo.

Demostración. La afirmación (i) se deriva de la definición de $H(\Omega, K)$ y la parte (ii) del lema de Zhang. La prueba de (ii) usa (i) y un argumento de diagonalización. Tenga en cuenta que $H(\Omega, K)$ está contenido en el conjunto compacto débil* $\mathcal{P}(K)$ de medidas de probabilidad en K . Por lo tanto, la topología débil* es metrizable en $\mathcal{P}(K)$ y puede describirse mediante sucesiones. Supongamos que $\nu_k \in H(\Omega, K)$ y $\nu_k \xrightarrow{*} \nu$. Después de restar las funciones afines en las sucesiones generadoras de ν_k podemos suponer que $\langle \nu_k, \text{id} \rangle = 0$. Por (i) existen $u_{k,j} \in W_0^{1, \infty}(\Omega; M^{m \times n})$ tal que

$$\delta_{Du_{k,j}(\cdot)} \quad j \rightarrow \infty \quad \nu_k \quad \text{in } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n})), \quad |Du_{k,j}| \leq C|K|_\infty.$$

Aquí identificamos ν_k con la constante $\text{map } x \mapsto \nu_k$. Dado que la topología débil* es metrizable en $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{P}(B(0, C|K|_\infty)))$ podemos aplicar un argumento de diagonalización estándar para encontrar $j_k \rightarrow \infty$ tal que

$$\delta_{Du_{k,j_k}(\cdot)} \xrightarrow{*} \nu \text{ in } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n})).$$

Dado que $|Du_{k,j_k}| \leq C$ tenemos $\nu \in H(\Omega, K)$. Por lo tanto $H(\Omega, K)$ es débil* cerrado y por lo tanto débil* compacto como un subconjunto de $\mathcal{P}(K)$.

Para probar (iii) considere primero $v \in W_0^{1, \infty}(U; \mathbf{R}^m)$ y la medida trivial de Young dada por $\mu(x) = \delta_{Dv(x)}$. Afirmamos que $\text{Av } \mu$ es una medida gradiente homogénea de Young (para todos los dominios Ω). Por el teorema de cobertura de Vitali existen copias a escala disjuntas $U_i = a_i + r_i U$ de U que están contenidas en el cubo unidad Q y lo recubren hasta un conjunto nulo. Definimos

$$w(x) = \begin{cases} r_i v\left(\frac{x-a_i}{r_i}\right) & \text{in } U_i \\ 0 & \text{in } Q \setminus U_i, \end{cases}$$

extendiendo w 1-periódicamente a \mathbf{R}^n , y sea $w_k(x) = k^{-1}w(kx)$. Entonces para todas las funciones continuas g

$$g(Dw_k) \xrightarrow{*} \bar{g} \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}^n),$$

dónde

$$\bar{g} = \int_Q g(Dw)dx = \frac{1}{|U|} \int_U g(Dv)dx = \langle Av\mu, g \rangle.$$

Así, para todo Ω , $\delta_{Dw_k(\cdot)}$ converge a la medida de Young homogénea $Av\mu$ en $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n}))$ en la topología débil*. Por lo tanto, $Av\mu \in H(\Omega)$ como se afirma.

Ahora sea que ν satisfaga la suposición de (iii). Podemos suponer que $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Por la definición de las medidas gradientes de Young y la parte (ii) del lema de Zhang, existe una sucesión $u_j \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ tal que $|Du_j| \leq R$ y

$$\delta_{Du_j(\cdot)} \xrightarrow{*} \nu \quad \text{in } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n})).$$

Tomando funciones de prueba de la forma $1 \otimes g$ vemos que

$$Av \delta_{Du_j(\cdot)} \xrightarrow{*} Av \nu$$

Por las consideraciones anteriores $Av \delta_{Du_j(\cdot)}$ pertenece a $H(\Omega, \overline{B(0, R)})$ para todo Ω . Por (ii) lo mismo vale para $Av \nu$. Dado que $\text{supp } \nu(x) \subset K$ es de hecho $Av \nu \in H(\Omega, K)$. Si $\nu \in H(U, K)$ entonces $Av \nu = \nu$ y por lo tanto $H(\Omega, K)$ es independiente de Ω .

Respecto a (iv) podemos suponer $F = 0$. Sean $\nu_1, \nu_2 \in H_0(K)$. Sea $Q_1 = (0, \lambda) \times (0, 1)^{n-1}$, $Q_2 = (\lambda, 1) \times (0, 1)^{n-1}$. Por (i) existen sucesiones $\{Du_{i,j}\} \subset W_0^{1,\infty}(Q_i, \mathbf{R}^m)$, $i = 1, 2$ que generan ν_i . De ahí los gradientes de

$$u_j(x) = \begin{cases} u_{1,j}(x), & x \in Q_1 \\ u_{2,j}(x), & x \in Q_2 \end{cases}$$

generan

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu_1, & x \in Q_1 \\ \nu_2, & x \in Q_2 \end{cases}$$

Por (iii) tenemos

$$\lambda \nu_1 + (1 - \lambda) \nu_2 = Av \nu \in H_0(K)$$

□

Lema 3.21. (caracterización de medidas gradientes homogéneas de Young). Se tiene que

$$H(K) = \mathcal{M}^{qc}(K).$$

Demostración. Claramente $H(K) \subset \mathcal{M}^{qc}(K)$ por semicontinuidad inferior. Para probar lo contrario basta con considerar medidas con baricentro cero. Ahora $H_0(K)$ es débil* cerrado y convexo, y $C(K)$ es el dual de $(\mathcal{M}(K), \text{débil}^*)$. Por el teorema de separación de Hahn-Banach es suficiente demostrar que, para todo $f \in C(K)$,

$$\langle \nu, f \rangle \geq \alpha \quad \forall \nu \in H_0(K),$$

implica

$$\langle \mu, f \rangle \geq \alpha \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_0^{qc}(K)$$

Fijando $f \in C(K)$, consideramos una extensión continua a $C_0(M^{m \times n})$ y sea

$$f_k(F) = f(F) + k \operatorname{dist}^2(F, K).$$

Afirmamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{qc}(0) \geq \alpha.$$

Una vez que se muestra esto, hemos terminado ya que, por definición, cada $\mu \in \mathcal{M}_0^{qc}(K)$ satisface

$$\langle \mu, f \rangle = \langle \mu, f_k \rangle \geq \langle \mu, f_k^{qc} \rangle \geq f_k^{qc}(0).$$

Supongamos que ahora es falso. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$f_k^{qc}(0) \leq \alpha - 2\delta, \quad \forall k.$$

Existe $u_k \in W_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^m)$ tal que

$$\int_Q f_k(Du_k) dy \leq \alpha - \delta$$

En particular, podemos asumir $u_k \rightarrow u$ en $W_0^{1,2}(Q; \mathbf{R}^m)$ y

$$\operatorname{dist}(Du_k, K) \rightarrow 0 \text{ in } L^1(Q)$$

Por la parte (ii) del lema de Zhang existe $v_k \in W_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^m)$ tal que

$$|Dv_k| \leq C, \quad |\{(Du_k \neq Dv_k)\}| \rightarrow 0.$$

En particular, una subsucesión adicional de $\{Dv_k\}$ genera una medida gradiente de Young ν con $\operatorname{supp} \nu(x) \subset K$ y la deformación subyacente $u \in W_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^m)$. Así, $\operatorname{Av} \nu \in H_0(K)$. Como f está acotada desde abajo, deducimos la declaración.

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_j(Du_k) &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_j(Dv_k) \\ &= \int_Q \langle \nu_x, f_j \rangle dx = \langle \operatorname{Av} \nu, f_j \rangle \geq \alpha \end{aligned}$$

Esto se contradice ya que $f_k \geq f_j$ si $k \geq j$, y el enunciado queda probado. \square

Prueba del teorema 3.18. (necesidad).

Las condiciones (i) y (ii) se derivan de los hechos básicos sobre las medidas de Young, mientras que (iii) se deriva del resultado de semicontinuidad inferior de Morrey, aplicado a todos los subconjuntos abiertos U de Ω .

(suficiencia).

Para probar la suficiencia, primero consideramos el caso de que la deformación subyacente se desvanece. Dejamos

$$A = \{ \nu \in L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n})) : \nu(x) \in \mathcal{M}_0^{qc}(K) \text{ en c.t.p.} \}$$

denotamos el conjunto de aplicaciones que satisfacen (i) - (iii) con $Du = 0$. Tenemos que demostrar que cada elemento de A es una medida gradiente de Young.

Para hacerlo, usamos algunas generalidades sobre funciones medibles para aproximar los elementos de A mediante funciones constantes por partes. Primero tengamos en cuenta que el conjunto de medidas de subprobabilidad $\mathcal{M}_1 = \{ \mu \in \mathcal{M}(M^{m \times n}) : \nu \geq 0, \|\nu\| \leq 1 \}$ es débil* compacto en $\mathcal{M}(M^{m \times n})$. Por lo tanto, la topología débil* es metrizable en \mathcal{M}_1 . Para definir una métrica específica, sea $\{f_i\} \subset C_0(M^{m \times n})$ un conjunto denso contable en la esfera unitaria de $C_0(M^{m \times n})$ y veamos

$$d(\mu, \mu') = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |\langle \mu - \mu', f_i \rangle|$$

El espacio (\mathcal{M}_1, d) es un espacio métrico compacto. Dado que d induce la topología débil*, la función $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(M^{m \times n})$ que toma (en c.t.p.) valores en \mathcal{M}_1 es débil* medible si y solo si $\nu : \Omega \rightarrow (\mathcal{M}_1, d)$ es medible.

El conjunto $\{ \nu \in L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n})) : \nu(x) \in \mathcal{M}_1 \text{ en c.t.p.} \}$ también es débil* compacto en $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(M^{m \times n}))$. Una métrica \tilde{d} que induce una convergencia débil* en ese conjunto se puede definir de la siguiente manera. Sea $\{h_j\}$ un conjunto denso contable en la bola unitaria de $L^1(\Omega)$ y sea

$$\tilde{d}(\nu, \nu') = \sum_{i,j=1}^{\infty} 2^{-ij} |\langle \nu - \nu', h_j \otimes f_i \rangle|.$$

Por lo tanto, se deduce que cada $\nu \in A$ puede aproximarse arbitrariamente bien en \tilde{d} mediante la función $\tilde{\nu}$ con las siguientes propiedades. Existen un número finito de conjuntos abiertos disjuntos U_i con $|\partial U_i| = 0$ tales que $\tilde{\nu} = \nu_i$ en U_i , $\nu_i \in \mathcal{M}_0^{qc}(K)$, $\tilde{\nu} = \delta_0$ en $\Omega \setminus \cup U_{y_0}$. La aplicación del lema 3.20 (i) a cada U_i muestra que $\tilde{\nu}$ es una medida gradiente de Young (extendiendo la sucesión generadora por cero a $\Omega \setminus \cup U_i$). Por lo tanto, el cierre de las medidas gradientes de Young con soporte en $K' = K \cup \{0\}$ contiene A . Por otro lado, el conjunto de estas medidas de Young es (débilmente) compacto (ver la demostración de Lema 3.20 (ii)). Así cada $\nu \in A$ es una medida gradiente de Young. Esto termina la demostración si $Du = 0$. El caso restante $Du \neq 0$ ahora se puede tratar fácilmente mediante traslación. Para una medida μ , defina su traslación por

$$\langle T_F \mu, f \rangle = \langle \mu, f(\cdot + F) \rangle$$

de modo que $T_F \delta_0 = \delta_F$. Ahora si ν satisface las hipótesis y $\tilde{\nu}(x) = T_{-Du(x)} \nu(x)$ entonces $\tilde{\nu} \in A$. Por lo tanto existe una sucesión $\{Dv_j\}$ que genera $\tilde{\nu}$ y se verifica fácilmente que $Du_j = Dv_j + Du$ genera ν . □

Proposición 3.22. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $M \subset X$. Suponga que $\nu : \Omega \rightarrow X$ es medible y $\nu(x) \in M$ en c.t.p. Entonces, para cada $k \in \mathbf{N}$, existe un número finito de conjuntos abiertos disjuntos U_i con $|\partial U_i| = 0$ y valores $\nu_i \in M$ tales que la función

$$\tilde{\nu} = \begin{cases} \nu_i & \text{en } U_i \\ \nu_0 & \text{en } \Omega \setminus U_i \end{cases}$$

satisface

$$\left| \left\{ x : d(\nu(x), \tilde{\nu}(x)) > \frac{1}{k} \right\} \right| < \frac{1}{k}.$$

Demostración. Por compacidad X puede ser cubierto por un número finito de bolas abiertas B_i con radio $\frac{1}{2k}$. Los conjuntos $\tilde{E}_i = \nu^{-1}(B_i)$ son medibles. Para obtener conjuntos disjuntos E_i , definimos $E_1 = \tilde{E}_1, E_2 = \tilde{E}_2 \setminus E_1$, etc. Si $|E_i| > 0$ entonces existe $x_i \in E_i$ tal que $\nu_i := \nu(x_i) \in M$. Existen conjuntos compactos disjuntos $K_i \subset E_i$ tales que

$$\sum |E_i \setminus K_i| < 1/k$$

si $|E_i| = 0$ tomamos $K_i = \emptyset$. Los K_i tienen distancia positiva y, por lo tanto, existen conjuntos abiertos disjuntos $U_i \supset K_i$ con $|\partial U_i| = 0$ (considere, por ejemplo, adecuado conjuntos de subniveles de la función de distancia de K_i). Ahora $E_i \supset \tilde{E}_i \supset K_i$ y así $d(\nu(x), \nu_i) < 1/k$ en K_i . La afirmación sigue. □

Para terminar esta sección mencionamos brevemente el resultado análogo para $p < \infty$ y su relación con la relajación y las soluciones generalizadas.

Teorema 3.23. Sea $p \in [1, \infty)$. La función (débilmente medible) $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(M^{m \times n})$ es un gradiente de $W^{1,p}$ Medida de Young si y solo si $\nu_x \geq 0$ en c.t.p. y se cumplen las siguientes tres condiciones

- (i) $\int_{\Omega} \int_{M^{m \times n}} |F|^p d\nu_x(F) dx < \infty$
- (ii) $\langle \nu_x, id \rangle = Du, \quad u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m);$
- (iii) $\langle \nu_x, f \rangle \geq f(\langle \nu_x, id \rangle)$ para c.t.p. x y todo cuasiconvexo f con $|f|(F) \leq C(|F|^p + 1)$

Las medidas de Young surgen naturalmente como soluciones generalizadas de problemas variacionales que no tienen solución clásica. Con este fin se amplía el funcional

$$y_0(u) = \int_{\Omega} f(Du) dx$$

a otro que es un funcional sobre las medidas de Young:

$$J(\nu) = \int_{\Omega} \langle \nu_x, f \rangle dx$$

Para $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ se consideran las clases admisibles

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) : uv \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m) \right. \\ \mathcal{G} &= \left. \left\{ \nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^m) : \nu \text{ } W^{1,p} \text{ medida gradiente de Young,} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \langle \nu_x, \text{id} \rangle = Du(x), u \in \mathcal{A} \right\} \right. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Teorema 3.24. *Supongamos que f es continua y satisface $c|F|^p \leq f(F) \leq C(|F|^p + 1)$, $c > 0$, $p > 1$. Entonces*

$$\inf_{\mathcal{A}} I = \min_{\mathcal{G}} J(\nu).$$

Además, los minimizadores de J son medidas de Young que se generan mediante gradientes de sucesiones minimizadoras de I .

En particular, obtenemos un minimizador en \mathcal{A} si y solo si existe un minimizador ν de J tal que ν_x es una masa de Dirac para casi todo x .

Capítulo 4

Microestructuras

4.1. Modelización variacional de microestructuras

4.1.1. ¿Qué son las microestructuras?

Una microestructura es cualquier estructura en una escala entre la escala macroscópica (sobre la que solemos hacer observaciones) y la escala atómica. Tales estructuras son abundantes en la naturaleza: las estructuras jerárquicas finas en una hoja y muchos otros materiales biológicos, los arreglos complejos de fisuras, grietas, huecos e inclusiones en rocas, patrones de mezcla de escala fina en flujo turbulento o multifásico, estructuras en capas hechas por el hombre. O en materiales reforzados con fibras y mezclas de fase fina en transformaciones de fase sólido-sólido, por citar sólo algunos ejemplos. La microestructura influye de manera crucial en el comportamiento macroscópico del material o sistema y, a menudo, se elige (o se genera espontáneamente) para optimizar su rendimiento (resistencia máxima al peso dado, energía mínima, entropía máxima, permeabilidad máxima o mínima, ...). Las microestructuras a menudo se desarrollan en muchas escalas diferentes en el espacio y el tiempo, y comprender la formación, la interacción y el efecto general de estas estructuras es un gran desafío científico, y el modelado meteorológico proporciona un ejemplo ilustrativo. En la literatura aplicada, el paso de las microescalas a las macroescalas se logra con frecuencia mediante promedios o renormalizaciones oportunas. A menudo se carece de un buen marco matemático en el que estos procedimientos puedan justificarse y mejorarse sistemáticamente, y su desarrollo sería una tarea difícil, pero muy gratificante.

El análisis matemático de las microestructuras suele descuidar la escala atómica al considerar un modelo continuo desde el principio. El problema entonces es entender las escalas que son pequeñas (o convergen a cero) en comparación con la escala macroscópica fija. La investigación se ha centrado principalmente en tres áreas: homogeneización, modelos variacionales de microestructuras y diseño óptimo que se encuentra entre las dos primeras áreas, ya que la estructura óptima a menudo corresponde a un límite de homogeneización. El problema básico en la homogeneización es determinar el comportamiento macroscópico (o al menos sus límites) inducido por una microestructura dada (dada, por ejemplo, por una mezcla periódica de dos conductores de calor en el límite del período de fuga, por una sucesión débilmente

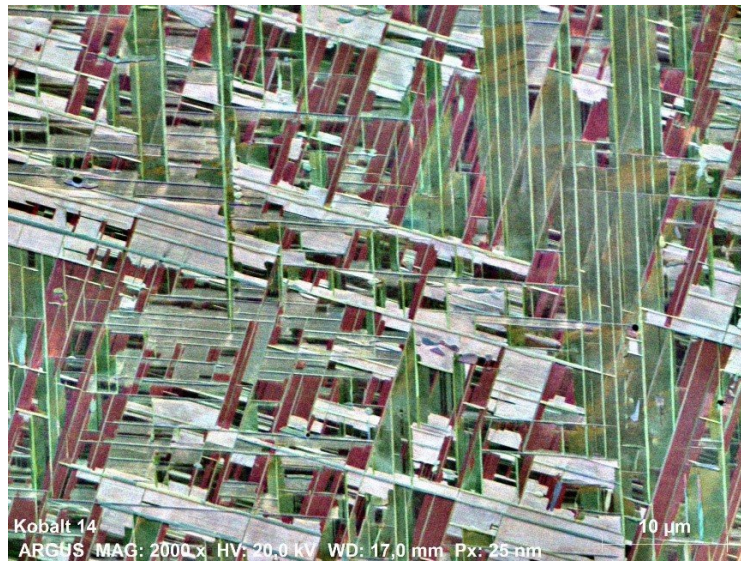


Figura 4.1: Microestructura de una coagulación de Cobalto y Niobio a 4/1 que se mantuvo durante 100 horas a $900\text{ }^{\circ}\text{C}$ posterior a un tratamiento térmico en solución sólida a $1240\text{ }^{\circ}\text{C}$ (Max-Planck-Institut für Eisenforschung GmbH).

convergente de conductividad tensores o por información estadística). Los diferentes modelos variacionales de microestructuras tratan de modelar sistemas que forman espontáneamente una microestructura interna asumiendo que la estructura formada tiene una cierta propiedad de optimización. La razón para la formación de tal microestructura es típicamente que no existe un óptimo exacto y las sucesiones de optimización tienen que desarrollar oscilaciones cada vez más finas (que solo pueden estar limitadas por efectos ignorados en el modelo, como la estructura atómica subyacente). Una tarea importante es extraer las características relevantes de las sucesiones de minimización. Las medidas de Young, son una posibilidad de hacerlo, pero de ninguna manera la única.

4.1.2. Microestructuras como minimizadores de energía

Ejemplo 4.1. Considere otra vez el problema:

$$\text{Minimizar } \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 dx$$

sujeto a

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Se alcanza el mínimo pero el conjunto de minimizadores está muy degenerado. Cada función de Lipschitz cuyas pendientes son ± 1 en casi todas partes y que alcanza los valores límite es un minimizador. En particular, la clausura débil* en $W^{1,\infty}$ del conjunto de minimizadores consiste en todas las funciones con constante de Lipschitz menor o igual a una que están acotadas por $\pm \min(x, 1-x)$

Esto proporciona un primer ejemplo de cómo la minimización puede conducir a una microestructura o oscilación a escala fina. El fracaso de la minimización clásica fue investigado por LC Young en la década de 1930 en el contexto del control óptimo. Lo llevó a la introducción de soluciones generalizadas de valores medidos. Su libro describe varias situaciones interesantes en las que surgen naturalmente soluciones generalizadas, incluidas las aplicaciones a la navegación y la construcción de vías férreas.

Ejemplo 4.2. Sea $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$ un rectángulo y considere el problema:

$$\text{Minimizar } J(u) = \int_{\Omega} u_x^2 + (u_y^2 - 1)^2 dx dy$$

sujeto a

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Claramente $J(u) > 0$ ya que de lo contrario $u_x = 0$ casi en todas partes, de donde $u \equiv 0$ en Ω y $(u_y^2 - 1)^2 = 1$. Por otro lado el mínimo de J es cero. Una forma de ver esto es considerar la función de diente de sierra s , para definir

$$u(x, y) = j^{-1}s(jy) \quad \text{para } \delta < x < L - \delta,$$

y usar la interpolación lineal para lograr los valores límite en $x = 0$ y $x = L$. Considerando primero el límite $j \rightarrow \infty$ y luego $\delta \rightarrow 0$ se obtiene $\inf J = 0$. Como en el primer ejemplo del capítulo anterior, no existen minimizadores (clásicos) y las sucesiones de minimización deben desarrollar oscilaciones rápidas.

Dos preguntas surgen de la consideración de estos ejemplos.

Pregunta 1: ¿Existen minimizadores especiales o sucesiones minimizadoras? ¿Son, por ejemplo, las soluciones máximas $\pm \min(x, 1 - x)$ en el Ejemplo 1 en cierto modo minimizadores preferidos?

Pregunta 2: ¿Existen ciertas características comunes a todas las sucesiones de minimización?

4.1.3. Modelos variacionales para cristales elásticos

La idea básica es modelar un cristal elástico como un continuo elástico no lineal. La estructura cristalina entra en este enfoque a través de las propiedades de simetría de la función de energía almacenada. La configuración de referencia (generalmente libre de tensiones) del cristal se identifica con un dominio acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Una deformación $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ del cristal requiere una energía elástica

$$I(u) = \int_{\Omega} W(Du) dx,$$

donde $W : M^{m \times m} \rightarrow \mathbf{R}$ es la función de densidad de energía almacenada que describe las propiedades del material. Bajo la regla de Cauchy-Born, $W(F)$ viene dada por la energía (libre) por unidad de volumen que se requiere para una deformación afín $x \mapsto Fx$ de la red cristalina.

La energía almacenada es invariable bajo rotaciones en el espacio ambiental y bajo la acción del grupo de isotropía \mathcal{P} de la red cristalina que usualmente es un subgrupo discreto de $SO(3)$. De este modo

$$\begin{aligned} W(QF) &= W(F) \quad \forall Q \in SO(3), \\ W(FP) &= W(F) \quad \forall P \in \mathcal{P} \subset SO(3). \end{aligned}$$

En lugar del grupo compacto \mathcal{P} , también se podría considerar el grupo no compacto más grande de todas las transformaciones invariantes que es conjugado con el grupo $GL(3, \mathbf{Z})$. Esto conduce a una situación altamente degenerada y, en particular, tal invariancia implica (en relación con la consideración de minimizadores globales en lugar de locales) que el material no tiene resistencia al corte macroscópico.

La energía almacenada también depende de la temperatura, pero siempre supondremos que la temperatura es constante en todo el cristal y, por lo tanto, suprimiremos esta dependencia.

La suposición básica del enfoque variacional de la microestructura es:

Las microestructuras observadas corresponden a minimizadores o casi minimizadores de la energía elástica I .

Es conveniente normalizar W para que $\min W = 0$. El conjunto $K = W^{-1}(0)$ corresponde entonces a las deformaciones afines de energía cero de las redes cristalinas. Experimentalmente, a menudo se observa que las microestructuras no solo minimizan la integral I (sujeto a condiciones de contorno adecuadas), sino que de hecho minimizan el integrando puntualmente. Por lo tanto, nos vemos llevados a considerar el problema más simple:

Determinar funciones (Lipschitz) que satisfagan exactamente o aproximadamente $Du \in K$.

La diferencia en el comportamiento de los diferentes materiales está, por lo tanto, estrechamente relacionada con el conjunto K que depende del material y la temperatura. Para materiales ordinarios, K es (conjugado con) $SO(3)$ (el conjunto más pequeño compatible con la invariancia de rotación), mientras que para materiales que forman microestructuras, K consta de varias copias de $SO(3)$.

4.1.4. Los problemas básicos

Generalizamos ligeramente la configuración de la sección anterior y consideramos las funciones $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ en un dominio acotado Ω (con contorno de Lipschitz si es necesario). En particular, el espacio de Sobolev $W^{1,\infty}$ concuerda con la clase de funciones de Lipschitz. Sea $K \subset M^{m \times n}$ un conjunto compacto en el espacio $M^{m \times n}$ de $m \times n$ matrices.

Problema 1 (soluciones exactas): Caracterizar todas las funciones de Lipschitz u que satisfagan

$$Du \in K \quad \text{en c.t.p. en } \Omega.$$

Problema 2 (soluciones aproximadas): Caracterizar todas las sucesiones u_j de funciones de Lipschitz con constante de Lipschitz uniformemente acotada tal que

$$\text{dist}(Du_j, K) \rightarrow 0 \quad \text{en c.t.p. en } \Omega.$$

Problema 3 (relajación de K): Determine los conjuntos K^{ex} y $K^{app} \subset M^{m \times n}$ de todos las funciones afines $x \mapsto Fx$ tales que los problemas 1 y 2 tienen una solución que satisfice

$$\begin{aligned} u(x) &= Fx \text{ en } \partial\Omega, \\ u_j(x) &= Fx \text{ on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

respectivamente.

Los problemas 1-3 también surgen en muchos otros contextos, por ejemplo, en la teoría de las inmersiones isométricas. Una diferencia técnica importante es que, en problemas geométricos, uno suele estar interesado en conjuntos conexos K (y, por lo tanto, C^1 soluciones u), mientras que normalmente consideraremos conjuntos con más de un componente.

En el contexto de la microestructura cristalina discutida en la sección anterior, los conjuntos K^{ex} y K^{app} del problema 3 tienen una interpretación importante. Consisten en las deformaciones macroscópicas afines del cristal con energía (casi) nula. Contienen trivialmente el conjunto K de deformaciones microscópicas de energía cero, pero pueden ser mucho más grandes. Para el conjunto $K = SO(2)A \cup SO(2)B$ se obtiene que bajo condiciones adecuadas en A y B los conjuntos K^{app} y K^{ex} contienen un conjunto abierto (en relación con la restricción $\det F = 1$), lo que lleva a un comportamiento fluido.

Problema 4: Encontrar una descripción eficiente de sucesiones aproximadas que elimine la falta de unicidad debido a modificaciones triviales mientras mantiene las características macroscópicas relevantes.

Ya vimos cómo el fracaso de la minimización puede conducir a una microestructura infinitamente fina. En la práctica, las microestructuras cristalinas siempre surgen en una escala finita (aunque en un amplio rango desde unas pocas distancias atómicas hasta $10 - 100 \mu\text{m}$). La minimización de la energía elástica por sí sola puede no ser suficiente para explicar esto, ya que no existe una escala natural en la teoría.

Problema 5: Explique la escala de longitud y la geometría fina de las microestructuras, posiblemente incluyendo otras contribuciones a la energía, como la energía interfacial.

4.2. Laminado

Primero recordamos que la envoltura o envolvente cuasiconvexa (convexa, policonvexa, convexa de rango-1) de una función $f : M^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ es la cuasiconvexa más grande (convexa, policonvexa, convexa de rango-1) función debajo de f y se denota por f^{qc} ($f^c = f^{**}, f^{pc}, f^{rc}$). De manera similar, la envoltura cuasiconvexa de un conjunto $K \subset M^{m \times n}$ se define a través de conjunto

$$K^{qc} = \left\{ F \in M^{m \times n} : f(F) \leq \inf_K f, \quad \forall f : M^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R} \text{ cuasiconvexo} \right\},$$

con definiciones similares para K^c, K^{pc}, K^{rc} . Tenga en cuenta que K^c es la envoltura convexa cerrada. Un conjunto se llama cuasiconvexo si $K = K^{qc}$. En el caso de

convexidad de rango-1, también se puede definir una envoltura mediante operaciones puntuales en lugar de conjuntos de subniveles. Un conjunto K se llama *laminación convexa* si las condiciones $A, B \in K$ y $\text{rk}(B - A) = 1$ implican que las combinaciones convexas de A y B están en K . La envoltura convexa de laminación K^{lc} de K es el conjunto convexo de laminación más pequeño que contiene K . Es fácil verificar que K^{lc} se puede definir de manera equivalente agregando inductivamente segmentos de rango-1:

$$K^{lc} := \bigcup_{i=1}^{\infty} K^{(i)}, \quad K^{(1)} := K$$

$$K^{(i+1)} := K^{(i)} \cup \left\{ \lambda A + (1 - \lambda)B : A, B \in K^{(i)}, \text{rk}(BA) = 1, \lambda \in (0,1) \right\}.$$

Uno tiene las siguientes inclusiones:

$$K^{lc} \subset K^{rc} \subset K^{qc} \subset K^{pc} \subset K^c.$$

La envoltura policonvexa es la más cercana a la envoltura convexa ordinaria (cerrada) y, de hecho, es la intersección de un conjunto convexo con una restricción no convexa. Sea $\mathbf{M}(F)$ el vector de todos los menores de F y sea

$$\hat{K} = \{ \mathbf{M}(F) : F \in K \}.$$

Con esta notación en su lugar, tenemos la siguiente resolución abstracta del Problema 3 (relajación de K). Recuerde que el conjunto K^{app} (interpretado como las deformaciones afines macroscópicamente libres de tensión) era el conjunto de todas las matrices F tales que existe una sucesión u_j acotada en $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, tal que

$$\begin{aligned} \text{dist}(Du_j, K) &\rightarrow 0 \text{ en medida en } \Omega, \\ u_j &= Fx \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.2}$$

y que $\mathcal{M}^{qc}(K)$ denota el conjunto de medidas gradientes homogéneas de Young.

Teorema 4.3. *Supongamos que K es compacto y denotamos por dist_K la función de distancia desde K . Después*

- $K^{app} = K^{qc}$,
- $K^{qc} = \{ \text{dist}_K^{qc} = 0 \}$,
- K^{qc} es el conjunto de baricentros de medidas gradientes homogéneas de Young:

$$K^{qc} = \{ \langle \nu, \text{id} \rangle : \nu \in \mathcal{M}^{qc}(K) \}.$$

Demostración. Después de la dilatación podemos suponer que $|\Omega| = 1$.

(i) Para mostrar que $K^{app} \subset K^{qc}$, sea $F \in K^{app}$ y sea $f : M^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ cuasiconvexo y supongamos que $\{u_j\}$ está acotado en $W^{1,\infty}$ y satisface los requisitos. Podemos suponer que $\inf_K f = 0$, necesitamos mostrar $f(F) \leq 0$. Dado que f es continua, tenemos $f^+(Du_j) \rightarrow 0$ en medida, y $|f^+(Du_j)| \leq C$ ya que Du_j está acotado en L^∞ .

$$|\Omega|f(F) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(Du_j) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f^+(Du_j) dx = 0.$$

Para probar la inclusión inversa $K^{qc} \subset K^{app}$, sea $F \in K^{qc}$. Entonces $\text{dist}_K^{qc}(F) = 0$ por definición de K^{qc} . En vista de la fórmula de representación para dist_K^{qc} existen $\varphi_j \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ tales que

$$0 = \text{dist}_K^{qc}(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \text{dist}_K(F + D\varphi_j) dx.$$

Las funciones $u_j(x) = Fx + \varphi_j$ satisfacen los requisitos. El problema es que, a priori, Du_j solo necesita estar acotado en L^1 (de hecho, débilmente relativamente compacto en L^1) y puede no estar acotado en L^∞ . El lema de Zhang asegura que u_j se puede modificar en conjuntos pequeños de modo que se cumplan los requisitos y Du_j esté acotado en L^∞ .

(ii) La inclusión \subset se deriva de la definición de K^{qc} . Por otro lado, acabamos de demostrar que $\text{dist}_K^{qc}(F) = 0$ implica $F \in K^{app} = K^{qc}$. La envoltura policonvexa está dada por $\{f \leq 0\} \cap \{g \leq 0\}$ y por lo tanto $f(\bar{y}, \bar{z}) = 0$ o $g(\bar{y}, \bar{z}) = 0$. Por conveniencia asumimos lo segundo, el otro caso es análogo.

Si $f(\bar{F}) = 0$ entonces $|\bar{y}| + |\bar{z}| = 1$. Además f y g son funciones cuadráticas en el segmento $t(\bar{y}/|\bar{y}|, 0) + (1-t)(0, \bar{z}/|\bar{z}|)$, y desaparece en $t = 0, 1, |\bar{y}|$. Por lo tanto, desaparecen de manera idéntica en el segmento que, por lo tanto, es un segmento de rango-1. Así $F \in K^{lc}$.

Ahora supongamos que $f(\bar{F}) < 0$. Usando la invariancia de $SO(2)$ podemos asumir que $z_2 = 0$. Por definición suponemos $z_1 > 0$, el caso $z_1 < 0$ es análogo. Tenga en cuenta que el espacio lineal $\{z_2 = 0\}$ concuerda con $\{F_{12} + F_{21} = 0\}$. Afirmamos que existe una línea de rango-1 en $\{z_2 = 0\}$ hasta \bar{F} en la que g desaparece (siempre que $z_1 > 0$). Una forma de ver esto es considerar $\tilde{g}(y, z) = (\det B - 1)z_1 + 1 - \det F$ y notar que $\tilde{g} = 0$ define un hiperboloide de una hoja H en el espacio tridimensional $\{z_2 = 0\}$. Por lo tanto, a través de cada punto en H existen dos líneas que se encuentran en H y, por lo tanto, deben ser líneas de rango-1 ya que $\det F$ es una función afín en estas líneas. Alternativamente se puede considerar $(y(t), z(t)) = F(t) = \bar{F} + t(\mu - \lambda)a \otimes Pa$, con $Pa = (-a_1, a_2)$. Entonces $z_2(t) = 0$, $\dot{z}_1 = |a|^2 > 0$ y \tilde{g} es afín en la línea $t \rightarrow F(t)$. Un breve cálculo muestra que $\frac{d}{dt}g(F(t))|_{t=0} = (Qa, a)$ y la forma cuadrática

$$Q = (\det B - 1)\text{Id} + \frac{1}{2}(\mu - \lambda) [(\text{cof } \bar{F})P + P(\text{cof } \bar{F})^T]$$

es indefinida y por lo tanto tiene un núcleo no trivial.

Considere entonces la línea de rango-1 $F(t) = \bar{F} + t(\mu - \lambda)a \otimes Pa$ en la que z_2 y g desaparecen.

Sea $t_0 < 0$ definido por $z_1(t_0) = 0$. Como $g(F(t_0)) = 0$ deducimos que $F(t_0) = (y(0), 0) \in K$. Por otro lado $f(F(0)) < 0$ y usando el hecho de que g desaparece en

$F(t)$ tenemos $f(F(t)) = (\det B - 1)(|y(t)| + |z(t)| - 1) \rightarrow \infty$ como $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, existe $t_1 > 0$ tal que $f(F(t_1)) = g(F(t_1)) = 0$ y por lo tanto $F(t_1) \in K^{lc}$ por las consideraciones anteriores. Así $\bar{F} = F(0) \in K^{lc}$ y la demostración está terminada. \square

4.2.1. ¿Todas las microestructuras son un laminado?

El teorema 4.3 clasifica completamente las medidas de Young del gradiente $\mathcal{M}^{qc}(K)$ y los cascos cuasiconvexos K^{qc} y, por lo tanto, conduce a una solución abstracta de los problemas 2 y 3. El problema es que se conocen muy pocas funciones cuasiconvexas y que, por lo tanto, los resultados abstractos tienen un uso limitado para comprender conjuntos específicos K . Una condición necesaria manejable la dan las relaciones de los menores. En esta sección discutimos el tema de las condiciones suficientes, es decir, construcciones de medidas gradientes de Young homogéneas con soporte en un conjunto K dado. El caso más simple es $K = \{A, B\}$. Si A y B están conectados en sentido rango-1 cada combinación convexa.

$$\nu = \lambda\delta_A + (1 - \lambda)\delta_B, \quad \lambda \in [0,1],$$

es una medida gradiente de Young (homogénea). Surge como límite de una sucesión de gradientes Du_j dispuestos en un fino patrón laminar (ver Figura 4.2.1).

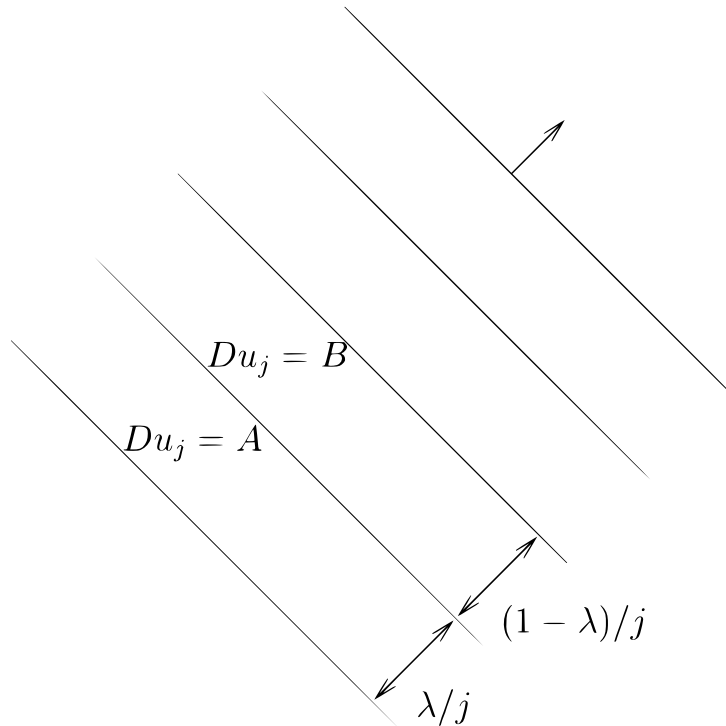


Figura 4.2: La estratificación fina de las matrices conectadas de rango-1 A y B genera el gradiente homogéneo de medida de Young $\lambda\delta_A + (1 - \lambda)\delta_B$. Imagen utilizada desde [Mul98].

Vimos que esta construcción se puede iterar para conjuntos más grandes K . Más precisamente, sea C una matriz de rango-1 conectada a $\lambda A + (1 - \lambda)B$. Entonces toda combinación convexa

$$\nu = \mu(\lambda\delta_A + (1 - \lambda)\delta_B) + (1 - \mu)\delta_C$$

es una medida gradiente de Young (homogénea).

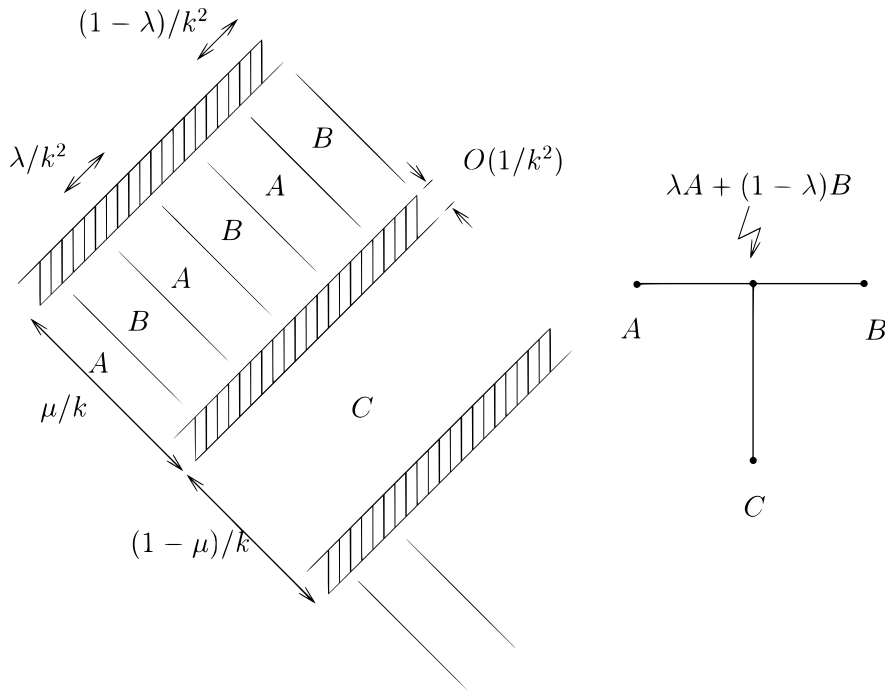


Figura 4.3: Un laminado de orden 2 y las conexiones correspondientes de rango-1. Imagen utilizada desde [Mul98].

Esta construcción puede ser iterada y motiva la siguiente definición.

Definición 4.4. Para una familia finita de pares $(\lambda_i, F_i) \in (0,1) \times M^{m \times n}$ la condición (H_l) se define inductivamente de la siguiente manera.

(i) Dos pares $(\lambda_1, F_1), (\lambda_2, F_2)$ satisfacen (H_2) si

$$\text{rk}(F_2 - F_1) \leq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

(ii) Una familia $\{(\lambda_i, F_i)\}_{i=1, \dots, l}$ satisface (H_l) si, después de una posible reenumeración

$$\text{rk}(F_l - F_{l-1}) = 1$$

y la nueva familia $\{(\tilde{\lambda}_i, \tilde{F}_i)\}_{i=1, \dots, l-1}$ dada por

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{l-1} &= \frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_{l-1} + \lambda_l} F_{l-1} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{l-1} + \lambda_l} F_l, \quad \tilde{\lambda}_{l-1} = \lambda_{l-1} + \lambda_l, \\ &\left(\tilde{\lambda}_i, \tilde{F}_i \right) = (\lambda_i, F_i) \text{ si } yo \text{ } leql - 2,\end{aligned}$$

satisface (H_{l-1}) .

Si llamamos al proceso definido como contracción entonces la familia $\{(\lambda_i, F_i)\}_{i=1, \dots, l}$ satisface (H_l) si se puede contraer inductivamente a $(1, \bar{F})$ donde $\bar{F} = \sum \lambda_i F_i$ es el baricentro. Tenga en cuenta que F_i puede tomar el mismo valor para diferentes i .

Para ver que esto puede ser útil considere las 8 matrices $\{A_1, \dots, A_4\}$ y $\{I_1, \dots, I_4\}$ en el ejemplo de cuatro gradientes. La familia

$$(1/2, A_1), (1/4, A_2), (1/8, A_3), (1/16, A_4), (1/32, A_1), (1/32, I_1)$$

satisface (H_6) , pero la familia obtenida al combinar los dos pares que involucran A_1 a $(17/32, A_1)$ no satisface (H_5) .

Definición 4.5. Una medida (de probabilidad) ν sobre $M^{m \times n}$ se llama *laminado* de orden finito si existe una familia $\{(\lambda_i, F_i)\}_{i=1, \dots, l}$ que satisface (H_l) y

$$\nu = \sum_{i=1}^l \lambda_i \delta_{F_i}.$$

Una medida (de probabilidad) ν es un laminado si existe una sucesión ν_j de laminados de orden finito con soporte en un conjunto compacto fijo tal que

$$\nu_j \xrightarrow{*} \nu \text{ en } \mathcal{M}(M^{m \times n})$$

Ejemplo 4.6. En el contexto del Ejemplo 4.3.4 de cuatro gradientes, las medidas

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \delta_{A_1} + \frac{1}{4} \delta_{A_2} + \frac{1}{8} \delta_{A_3} + \frac{1}{16} \delta_{A_4} + \frac{1}{16} \delta_{I_2} \\ &\left(1 - \left(\frac{1}{16} \right)^j \right) \left(\frac{8}{15} \delta_{A_1} + \frac{4}{15} \delta_{A_2} + \frac{2}{15} \delta_{A_3} + \frac{1}{15} \delta_{A_4} \right) + \left(\frac{1}{16} \right)^j \delta_{I_2}\end{aligned}$$

son laminados de orden finito, mientras que $\frac{8}{15} \delta_{A_1} + \frac{4}{15} \delta_{A_2} + \frac{2}{15} \delta_{A_3} + \frac{1}{15} \delta_{A_4}$ es un laminado pero no un laminado de orden finito.

La condición (H_l) implica que para cada función convexa de rango-1 $f : M^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ se tiene

$$\langle \nu, f \rangle \geq f(\langle \nu, \text{id} \rangle)$$

para todos los laminados de orden finito ν . Dado que las funciones convexas (finitas) de rango-1 son continuas, la misma desigualdad se cumple para todos los laminados ν .

Teorema 4.7. *Una medida de probabilidad con soporte compacto $\nu \in \mathcal{M}(M^{m \times n})$ es un laminado si y solo si*

$$\langle \nu, f \rangle \geq f(\langle \nu, \text{id} \rangle)$$

para todas las funciones rango-1 convexas $f : M^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$. En otras palabras, los laminados soportados en un conjunto compacto K vienen dados exactamente por $\mathcal{M}^{rc}(K)$.

La pregunta planteada en el título de esta subsección ahora puede formularse con mayor precisión:

¿Todos los gradientes de medidas Young son laminados?

En vista del Teorema 4.7 esto se puede establecer de manera concisa como

$$\mathcal{M}^{rc} \stackrel{?}{=} \mathcal{M}^{qc}.$$

Esto sería claramente cierto si la convexidad de rango-1 implicara cuasiconvexidad. Por el contrario, si $\mathcal{M}^{rc} = \mathcal{M}^{qc}$ entonces la convexidad de rango-1 implicaría cuasiconvexidad en vista de la definición de \mathcal{M}^{rc} y el hecho de que $f^{qc}(F) = \inf \{ \langle \nu, f \rangle : \nu \in \mathcal{M}^{qc}, \langle \nu, \text{id} \rangle = F \}$.

4.3. Problemas de inclusión de gradientes

4.3.1. Inclusión de dos gradientes

Sea $K = \{A, B\}$. Las soluciones más simples de la relación

$$Du \in K$$

son los llamados laminados simples, es decir, funciones para los cuales Du es constante en bandas alternas que están limitadas por hiperplanos $x \cdot n = \text{const}$ (ver Fig. 4.3.1). La continuidad tangencial de u en estas interfaces impone que $A\tau = B\tau$ para vectores τ perpendiculares a n y, por lo tanto, AB tiene rango uno y se puede escribir como

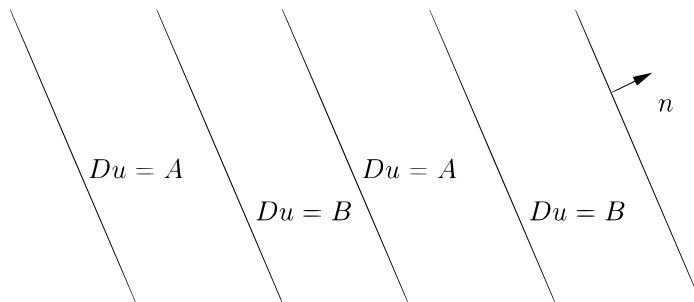


Figura 4.4: Laminado simple. Imagen utilizada desde [Mul98].

$$BA = a \otimes n.$$

En este caso decimos que A y B son conexas rango-1. Recordamos que la matriz $a \otimes n$ tiene por elementos $(a \otimes n)_{ij} = a_i n_j$. Si se supone que las interfaces entre las regiones $\{Du = A\}$ y $\{Du = B\}$ son suaves, entonces un argumento similar muestra que deben ser hiperplanos con n normales fijos. Además, no es posible un arreglo tan fluido si $\text{rk}(BA) \geq 2$. La siguiente proposición da una declaración mucho más fuerte porque muestra que también entre funciones posiblemente muy irregulares no hay otras soluciones.

Teorema 4.8 (Ball-James). *Sea Ω un dominio en \mathbf{R}^n y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ la función de Lipschitz con $Du \in \{A, B\}$ en c.t.p.*

- (i) *Si $\text{rk}(BA) \geq 2$, entonces $Du = A$ en c.t.p. o $Du = B$ en c.t.p.;*
- (ii) *si $BA = a \otimes n$ entonces u puede escribirse localmente de la forma*

$$u(x) = Ax + ah(x \cdot n) + \text{const}$$

donde h es Lipschitz y $h' \in \{0,1\}$ en c.t.p. Si Ω es convexo, esta representación se cumple globalmente.

En particular, Du es constante si u satisface una condición de frontera afín $u(x) = Fx$ en $\partial\Omega$.

Demostración. La idea clave es que el rotacional del gradiente es nulo. Por traslación podemos asumir $A = 0$ y por lo tanto $Du = B\chi_E$, para algún conjunto medible $E \subset \Omega$. Para la parte (i) podemos suponer además, después de un cambio afín de las variables dependientes e independientes, que las dos primeras filas de la matriz B están dadas por los vectores base estándar e_1 y e_2 y por lo tanto

$$Du^1 = e_1\chi_E, Du^2 = e_2\chi_E.$$

La simetría de las segundas derivadas distribucionales y la primera ecuación implican que $\partial_j\chi_E = 0$ para $j \neq 1$ mientras que la segunda ecuación produce $\partial_k\chi_E = 0$ por $k \neq 2$. Por lo tanto $D\chi_E = 0$ en el sentido de las distribuciones y por lo tanto $\chi_E = 1$ en c.t.p. o $\chi_E = 0$ en c.t.p. ya que Ω es conexo.

Para probar la parte (ii) podemos asumir $A = 0, a = n = e_1$ y por lo tanto $Du^1 = e_1\chi_B, Du^k = 0, k = 2, \dots, m$. Por lo tanto u^2, \dots, u^m son constantes y $\partial_k u^1 = 0$, para $k = 2, \dots, m$. Por lo tanto, u^1 es localmente solo una función de x^1 como se afirma. Si Ω es convexo, entonces u^1 es constante en los hiperplanos $x^1 = \text{const}$ que se cruzan con Ω y, por lo tanto, es globalmente como queremos.

Finalmente si $u = Fx$ en $\partial\Omega$, entonces $F = (1 - \lambda)B, \lambda \in [0,1]$ ya que por el teorema de Gauss-Green

$$|E|B = \int_{\Omega} Dudx = \int_{\partial\Omega} u \otimes nd\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega} Fdx,$$

donde n es la normal exterior de Ω . Extendiendo u por Fx en $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$ podemos argumentar como en la prueba de (ii) para deducir $u(x) = Ax + a\tilde{h}(x \cdot n) + b$ en \mathbf{R}^n , donde $\tilde{h}' \in \{0, 1 - \lambda, 1\}$. Por lo tanto, $u(x) \equiv Fx$ ya que cada plano $x \cdot n = \text{const}$ interseca al conjunto donde $u = Fx$. \square

Soluciones aproximadas: Considere nuevamente $K = \{A, B\}$ y supongamos

$$BA = a \otimes n, \quad F = \lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in [0,1].$$

Mostramos que existen sucesiones u_j con constante de Lipschitz uniformemente acotada tal que en Ω

$$\text{dist}(Du_j, \{A, B\}) \rightarrow 0 \quad \text{en medida}$$

y

$$u_j(x) = Fx \quad \partial\Omega.$$

Tenga en cuenta que el límite de la constante de Lipschitz implica que la convergencia también se cumple en $L^p, \forall p < \infty$. Después de la traslación podemos suponer

$$F = 0, A = -(1 - \lambda)a \otimes n, \quad B = \lambda a \otimes n.$$

Sea h la extensión periódica de la función dada por

$$h(t) = \begin{cases} -(1 - \lambda)t & t \in [0, \lambda) \\ \lambda(t - 1) & t \in [\lambda, 1] \end{cases}$$

y consideremos

$$v_j(x) = \frac{1}{j} ah(jx \cdot n)$$

Entonces $Dv_j \in \{A, B\}$ en c.t.p. y $v_j \rightarrow 0$. Para lograr las condiciones de contorno, consideramos una función de corte $\varphi \in C^\infty([0, \infty)), 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi = 0$ en $[0, 1/2], \varphi = 1$ en $[1, \infty)$ y sea

$$u_j(x) = \varphi(j \text{dist}(x, \partial\Omega))v_j(x).$$

Entonces $u_j = 0$ en $\partial\Omega$, Du_j está acotado uniformemente y $Du_j = Dv_j$ excepto en una franja de espesor $1/j$ alrededor de $\partial\Omega$. Son posibles varias modificaciones de esta construcción y todas las sucesiones de aproximación son, en cierto sentido, equivalentes.

Ahora consideramos el caso $\text{rk}(BA) \geq 2$. Hemos demostrado que en este caso no hay soluciones exactas no triviales. El argumento usaba fuertemente el hecho de que Du solo toma dos valores y que el rotacional de un gradiente se desvanece. No se aplica a la aproximación de sucesiones. No obstante tenemos

Lema 4.9. Suponga que $\text{rk}(BA) \geq 2$ y que u_j es una sucesión con una constante de Lipschitz uniformemente acotada tal que

$$\text{dist}(Du_j, \{A, B\}) \rightarrow 0 \quad \text{en medida en } \Omega.$$

Entonces

$$Du_j \rightarrow A \text{ en medida} \quad \text{o} \quad Du_j \rightarrow B \text{ en medida.}$$

En particular, el problema tiene solo la solución trivial, $F \in \{A, B\}$ y $Du_j \rightarrow F$ en medida.

La demostración utiliza las siguientes propiedades fundamentales de los menores.

Teorema 4.10. *Sea M un $r \times r$ menor (subdeterminante).*

(i) *Si $p \geq r$ y $u, v \in W^{1,p}(\Omega), uv \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces*

$$\int_{\Omega} M(Du) = \int_{\Omega} M(Dv).$$

En particular

$$\int_{\Omega} M(Du) = \int_{\Omega} M(F) \text{ si } u = Fx \text{ en } \partial\Omega.$$

(ii) *Si $p > r$ y si la sucesión u_j satisface*

$$u_j \rightarrow u \text{ en } W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$$

después

$$M(Du_j) \rightarrow M(Du) \text{ en } L^{p/r}(\Omega)$$

Observación. Los integrandos f para los cuales la integral $\int f(Du)$ solo depende de los valores límite de u se denominan lagrangianos nulos, ya que las ecuaciones de Euler-Lagrange se satisfacen automáticamente para todas las funciones u . Las combinaciones afines de menores son los únicos lagrangianos nulos y las únicas funciones que tienen la propiedad de continuidad débil expresada en (ii).

Demostración. El punto principal es que los menores se pueden escribir como divergencias. Para $n = m = 2$ se tiene

$$\det Du = \partial_1 (u^1 \partial_2 u^2) - \partial_2 (u^1 \partial_1 u^2)$$

para todo $u \in C^2$ y por lo tanto para todo $u \in W^{1,2}$ si la identidad se entiende en el sentido de distribuciones. Más generalmente, para $n = m \geq 2$ la matriz de cofactores que consiste en los $(n-1) \times (n-1)$ menores de Du satisface

$$\operatorname{div} \operatorname{cof} Du = 0, \quad \text{es decir } \partial_j (\operatorname{cof} Du)_{ij} = 0$$

y por lo tanto

$$\det Du = \frac{1}{n} \partial_j (u^i (\operatorname{cof} Du)_{ij}),$$

desde $F(\operatorname{cof} F)^T = \operatorname{Id} \det F$.

En cualquiera de las formulaciones, (i) se sigue del teorema de Gauss-Green (o de Stokes) (y la aproximación mediante funciones suaves), mientras que (ii) se sigue de la inducción sobre el orden r de menores y el hecho de que u_j converge fuertemente en L^p . \square

Demostración. lema 4.9 Podemos asumir $A = 0$ y que existe un 2×2 menor M tal que $M(B) = 1$. Por supuesto, existen conjuntos E_j tales que

$$Du_j - B\chi_{E_j} \rightarrow 0 \text{ en medida}$$

y por tanto en L^p para todo $p < \infty$. Además, existe una subsucesión tal que

$$\chi_{E_j} \xrightarrow{*} \theta \text{ en } L^\infty(\Omega), \quad u_j \xrightarrow{*} u \text{ en } W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m).$$

Se sigue del Teorema 4.10

$$\begin{aligned} B\chi_{E_j} &\xrightarrow{*} Du = B\theta, \\ M(B)\chi_{E_j} &\xrightarrow{*} M(Du) = M(B)\theta^2. \end{aligned}$$

Combinando la primera convergencia vemos que $\theta = \theta^2$ en c.t.p. Por lo tanto θ debe ser una función característica χ_E . Por lo tanto, implica que (utilice, por ejemplo, el hecho $\|\chi_{E_j}\|_{L^2} \rightarrow \|\chi_E\|_{L^2}$)

$$\chi_{E_j} \rightarrow \theta = \chi_E \quad \text{en medida.}$$

Por lo tanto

$$Du_j \rightarrow Du = B\chi_E \quad \text{en medida.}$$

Finalmente implica que $Du = B$ en c.t.p. o $Du = A = 0$ en c.t.p. □

4.3.2. Aplicaciones a microestructuras en cristales

Antes de continuar con la discusión matemática del problema $Du \in K$, repasemos brevemente lo que se puede aprender sobre la microestructura cristalina a partir de las consideraciones anteriores. ¿Qué microestructuras se pueden formar y por qué son tan finas?

Primero, consideremos de nuevo el papel de las conexiones de rango-1. En la teoría del continuo discutida en la sección anterior estaban relacionadas con la continuidad de las derivadas tangenciales o con el hecho de que el rotacional de un gradiente se anula. La condición también se puede entender en la configuración discreta de las redes cristalinas. Dos redes homogéneas, obtenidas por deformaciones afines A y B de la misma red de referencia, pueden encontrarse en un plano común S solo si las deformaciones difieren en un cortante que deja invariante a S . Analíticamente recuperamos la condición $BA = a \otimes n$, donde n es la normal de S , ver Fig. 4.3.2.

Bajo ciertas condiciones adicionales, las dos subredes se denominan gemelas. Existen diferentes definiciones de lo que constituye precisamente a uno; un requisito común es que $B = QAH$, donde $Q \in SO(3) \setminus \{\text{Id}\}$, $Q^2 = \text{Id}$ y donde pertenece H al grupo puntual del cristal. Las deformaciones reticulares compatibles se pueden organizar en bandas alternas de diferentes deformaciones.

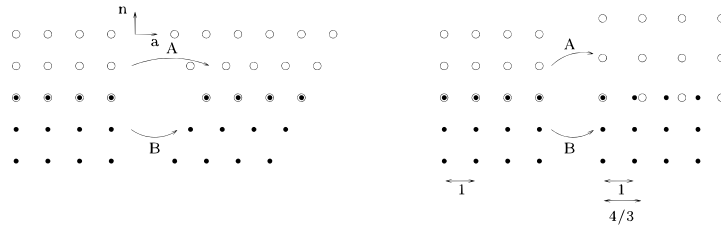


Figura 4.5: Deformaciones reticulares compatibles e incompatibles. A la izquierda se cumple la condición $BA = a \otimes n$, a la derecha $B = \text{Id}, A = 4/3 \text{ Id}$, por lo que se viola la condición. Después de la deformación, no hay una interfaz en la que se encuentren las dos redes. Imagen utilizada desde [Mul98].

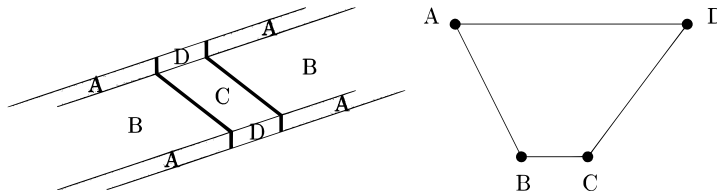


Figura 4.6: Dibujos esquemáticos de los diferentes gradientes de deformación y sus conexiones de rango-1 indicadas por líneas continuas. Imagen utilizada desde [Mul98].

Si el conjunto $K \in M^{m \times n}$ de las deformaciones minimizantes afines contiene más conexiones de rango-1, entonces son posibles los patrones más complicados, como los laminados dobles (o 'cruces gemelos') en la Figura 4.3.2.

De esta manera, se puede explicar la observación de varias microestructuras mediante un análisis de conexiones de rango-1. Sin embargo, las construcciones basadas en conexiones de rango-1 no implican una escala de longitud. ¿Por qué, entonces, las estructuras observadas a menudo son tan finas?

Para la situación de solo dos deformaciones A y B las soluciones aproximadas brindan una explicación. Tan pronto como se impone una condición de contorno afín no trivial $F = \lambda A + (1 - \lambda)B$ no hay soluciones exactas, y las soluciones aproximadas se vuelven mejores cuanto más finas se mezclan A y B (en un cristal real, la contribución adicional a la energía puede eventualmente limitar el tamaño). En la práctica, las condiciones de contorno a menudo no se imponen globalmente sino por el contacto con otras partes del cristal donde prevalecen otros gradientes de deformación (por ejemplo, porque la transformación de fase aún no ha tenido lugar allí).

Un ejemplo típico es la interfase austenita/martensita que se observa con frecuencia (Figura 4.3.2). En una situación idealizada esto corresponde a una deformación afín homogénea C en un lado de la interfase y una mezcla fina de A y B en el otro lado. Ni A ni B están rango-1 conectados a C , pero una combinación convexa adecuada $\lambda A + (1 - \lambda)B$ sí lo está.

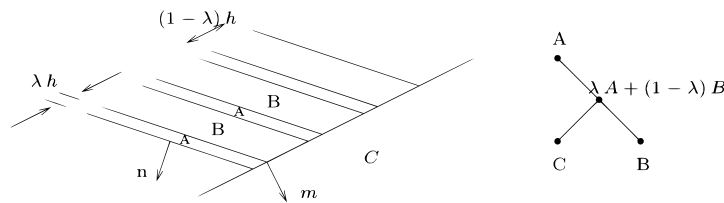


Figura 4.7: Distribución esquemática de gradientes de deformación y conexiones de rango-1. Imagen utilizada desde [Mul98].

No hay ninguna deformación que use los tres gradientes A, B y C y solo estos. Sin embargo, la fracción de volumen de los gradientes que no sean A, B y C puede hacerse arbitrariamente pequeña haciendo coincidir C con una mezcla fina de capas de A y B en fracciones de volumen λ y $1 - \lambda$

El análisis de las conexiones de rango-1 determina la fracción de volumen λ así como las normales de interfaz n y m , en muy buen acuerdo con el experimento;

Los patrones más complejos, como la microestructura en la Figura 4.3.2, pueden entenderse de manera similar. En este caso particular, se requieren tantas conexiones de rango-1 que la microestructura solo puede surgir si la tensión de transformación satisface una relación especial.

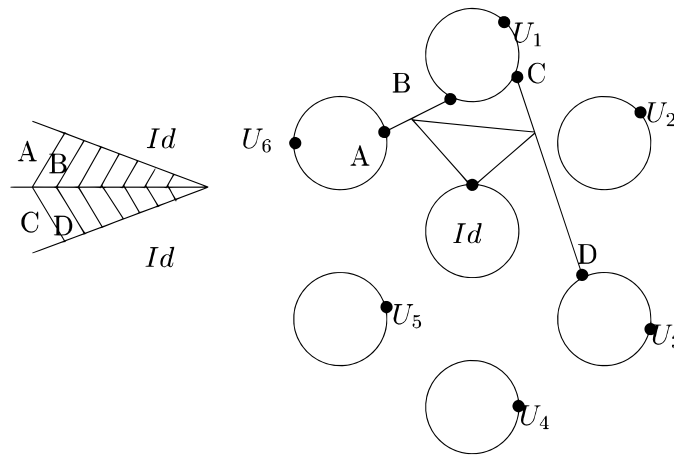


Figura 4.8: Las conexiones de rango-1 necesarias entre los seis pozos ortorrómbicos $SO(3)U_i$ y la fase no transformada solo existen para deformaciones de transformación especiales U_1 . Imagen utilizada desde [Mul98].

4.3.3. Problema de tres gradientes

Teorema 4.11. Sea $K = \{A_1, A_2, A_3\}$ y supongamos que $\text{rk}(A_i - A_j) \neq 1$.

- (i) Si $Du \in K$ en c.t.p. entonces Du es constante (en c.t.p.).
- (ii) Si u_j es una sucesión con una constante de Lipschitz uniformemente acotada

tal que

$$\text{dist}(Du_j, K) \rightarrow 0 \quad \text{en medida}$$

entonces

$$Du_j \rightarrow \text{const} \quad \text{en medida.}$$

Demostración. de la parte (i). Por simplicidad solo consideramos el caso $n = m = 2$. El caso general puede reducirse a este si se consideran por separado los casos en que el tramo E de $A_2 - A_1$ y $A_3 - A_1$ contiene dos, uno o ninguna líneas de rango-1 y usa el lema a continuación.

Podemos asumir que $A_1 = 0$ y por lo tanto $\det A_2 \neq 0$, $\det A_3 \neq 0$. Multiplicando por A_2^{-1} podemos asumir además $A_2 = \text{Id}$. Usando la forma normal de Jordan vemos que después de un cambio de variables tenemos

$$A_3 = \begin{pmatrix} cc\lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$$

o

$$A_3 = \begin{pmatrix} cc\lambda & una \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \mu \notin \{0,1\}$$

En el primer caso u satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y es holomorfa y por lo tanto diferenciable. Entonces $Du \equiv A_i$ ya que K es discreto. En el segundo caso $Du \in K$ implica que

$$\partial_1 u^2 = 0$$

Por lo tanto, $u^2(x) = h(x^2)$ (localmente) y $\partial_2 u^2(x) = h'(x^2)$. Como $\mu \notin \{0,1\}$ el valor de $\partial_2 u^2$ determina de forma única una de las matrices A_i . Por lo tanto, $Du(x) = g(x^2)$. En particular

$$\partial_1 \partial_1 u = 0, \quad \partial_2 \partial_1 u = \partial_1 \partial_2 u = 0$$

en el sentido de distribuciones. Así $\partial_1 u = \text{const}$ y $Du = \text{const} \otimes e_1 + \tilde{g}(x^2) \otimes e_2$. Por lo tanto $\text{rk}(Du(x) - Du(\tilde{x})) \leq 1$ y por lo tanto $Du \equiv A_i$. \square

Una prueba alternativa que presenta una conexión interesante con la teoría de las funciones cuasiconformes (o más precisamente cuasiregulares) procede de la siguiente manera. Después de una posible reenumeración, podemos suponer que $\det(A_2 - A_1)$ y $\det(A_3 - A_1)$ tienen el mismo signo. Tomando $A_1 = 0$ y multiplicando por $\text{diag}(1, -1)$ si es necesario tenemos $\det A_2 > 0$, $\det A_3 > 0$. Así $Du \in K$ implica que

$$|Du|^2 \geq k \det Du$$

para una constante adecuada k . Por lo tanto, u es casi regular y un resultado profundo de Reshetnyak dice que $u = \text{const}$ o u es un homeomorfismo local hasta un conjunto discreto B_u de puntos de ramificación y que la inversa (local) u^{-1} conserva

conjuntos de medida cero. Por lo tanto, $Du = 0$ en c.t.p. o $Du \neq 0$ en c.t.p. En vista de los resultados para el problema de dos gradientes, esto implica la afirmación.

La prueba de (ii) requiere argumentos más sutiles (ver [Šv91], [Šv92a]). Šverák primero muestra que después de las transformaciones adecuadas (y la eliminación de algunos casos especiales más simples) uno puede asumir

$$A_i = A_i^T, \quad \det A_i = 1.$$

Ahora bien, un gradiente Du es simétrico si y solo si u es en sí mismo un gradiente Dv . Así, la afirmación (ii) se reduce esencialmente a un estudio de soluciones aproximadas de la ecuación de Monge-Ampère.

$$\det D^2 v_j \rightarrow 1, \quad v_j : \Omega \in \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}.$$

La dificultad es que, a diferencia de la literatura habitual sobre la ecuación de Monge-Ampère, no se puede suponer que $D^2 v_j$ es positivo (semi-)definido. De hecho, un paso crucial en la demostración que usa ideas de la teoría de funciones cuasiregulares es mostrar que $\det D^2 v > 0$ en c.t.p. implica que v es localmente convexo o cóncavo.

4.3.4. El problema de los cuatro gradientes

El siguiente ejemplo, que varios autores encontraron de forma independiente, muestra que la ausencia de conexiones de rango-1 no garantiza la ausencia de microestructuras (es decir, una fuerte convergencia de sucesiones de aproximación).

Lema 4.12. Considere las matrices diagonales 2×2 $A_1 = -A_3 = \text{diag}(-1, -3)$, $A_2 = -A_4 = \text{diag}(-3, 1)$ y sea $K = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Entonces $\text{rk}(A_i - A_j) \neq 1$ pero existe una sucesión u_j

$$\text{dist}(Du_j, K) \rightarrow 0 \quad \text{en medida}$$

y Du_j no converge en medida.

No se sabe si hay otra opción de cuatro matrices con $\text{rk}(A_i - A_j) \neq 1$ para las que existen soluciones no triviales. Se sabe, pero no es trivial, que para cada $\epsilon > 0$ existen funciones no triviales tales que $\text{dist}(Du, K) < \epsilon$. Tenga en cuenta que para ϵ pequeños, el conjunto de gradientes admisibles aún no contiene conexiones de rango-1.

Demostración. Dado que K no contiene conexiones de rango-1, la idea clave es 'tomar prestadas' cuatro matrices adicionales J_i (ver Figura 4.3.4) y eliminar sucesivamente las regiones donde Du asume J_i . Construiremos una sucesión v_k que satisfaga la condición de frontera afín

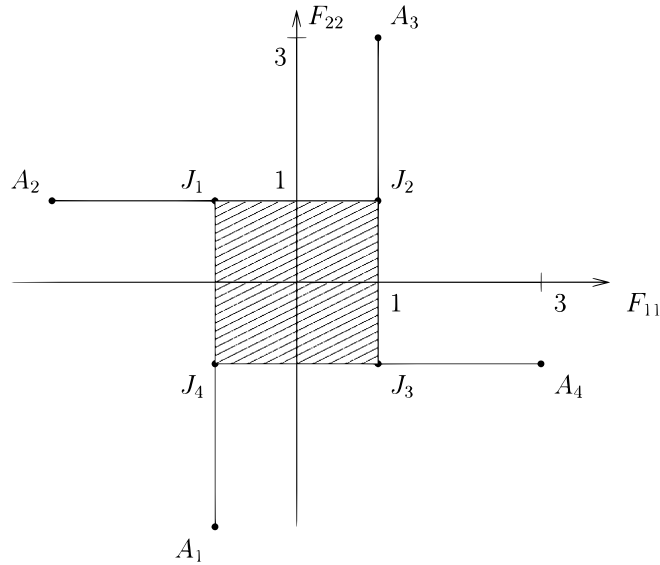


Figura 4.9: Cuatro matrices incompatibles que soportan una sucesión minimizadora no trivial. Imagen utilizada desde [Mul98].

$$v_k(x) = J_4 x \quad \text{en } \partial Q = \partial(0,1)^2$$

Como primera aproximación podemos tomar $v^{(0)}(x) = J_4 x$. Para aumentar la medida del conjunto donde los gradientes se encuentran en K , observamos que J_4 es una combinación convexa de rango-1 de A_1 y J_1 ,

$$J_4 = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} J_1.$$

Por lo tanto, podemos construir la función $v^{(1)}$ que concuerde con $v^{(0)}$ en ∂Q y use solo gradientes A_1 y J_1 (en capas de espesor $1/2k$) excepto por una capa límite de espesor c/k donde el gradiente permanece delimitado uniformemente. En el siguiente paso reemplazamos las franjas donde $Dv^{(1)} = J_1$ por capas de A_2 y J_2 y k nuevas capas límite de espesor c/k^2 . Esto produce $v^{(2)}$ (ver Figura 4.3.4).

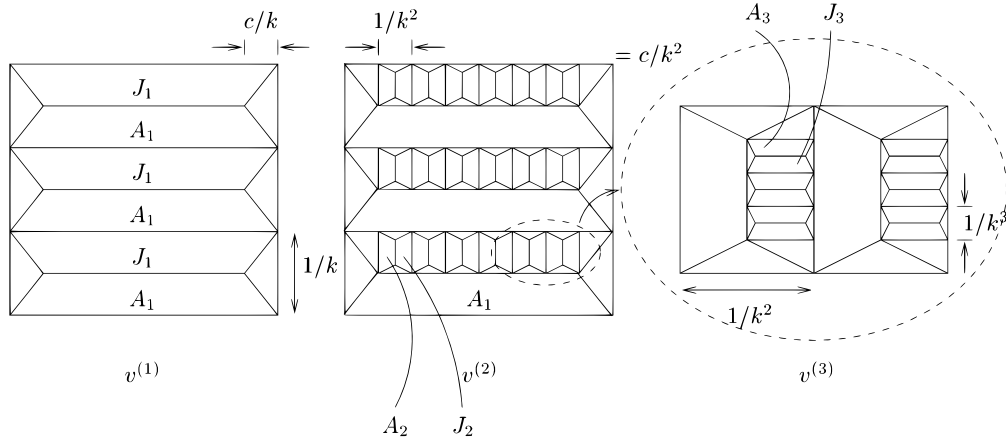


Figura 4.10: Las primeras tres etapas en la construcción de v_k . Imagen utilizada desde [Mul98].

La fracción de volumen de las fases J_i se ha reducido a $(\frac{1}{2})^2$ (hasta pequeñas correcciones debidas a las capas límite). Si reemplazamos J_2 por finas capas de A_3 y J_3 (con k^2 capas límite de espesor c/k^3) obtenemos $v^{(3)}$ y reemplazando J_3 por A_4 y J_4 obtenemos $v^{(4)}$. Hasta las capas límite $Dv^{(4)}$ solo usa los valores A_i y J_4 . En comparación con $v^{(0)}$, la fracción de volumen del conjunto donde se toma J_4 se ha reducido de uno a (ligeramente menos que $(1/2)^4$). El volumen fracción de las capas límite está limitada por

$$\frac{c}{k} + k \frac{c}{k^2} + k^2 \frac{c}{k^3} + k^3 \frac{c}{k^4} = 4 \frac{c}{k}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\left| \left\{ Dv^{(4)} \notin K \right\} \right| \leq \frac{4c}{k} + \frac{1}{16}.$$

Para reducir aún más la fracción de volumen del conjunto $Dv \notin K$ ahora podemos aplicar el mismo procedimiento a cada uno de los pequeños rectángulos donde $Dv^{(4)} = J_4$.

Después de l iteraciones obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \left\{ Dv^{(4l)} \notin K \right\} \right| &\leq \sum_{m=0}^{l-1} \left(\frac{1}{16} \right)^m \frac{4c}{k} + \left(\frac{1}{16} \right)^l \\ &\leq \frac{C}{k} + \left(\frac{1}{16} \right)^l \end{aligned} \quad (4.3)$$

Con una elección adecuada de l encontramos funciones $v_k : Q \rightarrow \mathbf{R}^2$ tales que $|Dv_k| \leq L$ y

$$\begin{aligned} |\{Dv_k \notin K\}| &\leq \frac{C}{k} \rightarrow 0, \\ v_k(x) &= J_4 x \text{ en } Q \end{aligned} \tag{4.4}$$

En particular $\text{dist}(Dv_k, K) \rightarrow 0$ en medida.

Finalmente demostramos que ninguna subsucesión de Dv_k puede converger en medida. De hecho, si $Dv_{k_j} \rightarrow Dv$ en medida, entonces $Dv \in K$ en Q y $v = J_4 x$ en $\partial\Omega$. Esto es imposible ya que $Dv \in K$ implica $Dv \equiv \text{const}$. Alternativamente, uno puede verificar fácilmente que

$$Dv_k \xrightarrow{*} J_4 \text{ en } L^\infty(Q; \mathbf{R}^2).$$

Esto contradice la convergencia en medida ya que $J_4 \notin K$. \square

De hecho, la región sombreada junto con las líneas de rango-1 entre A_i y J_i contiene todos esos F . Una posible prueba utiliza el hecho no trivial de que la función

$$f(F) = \begin{cases} \det F & F \text{ simétrica } \geq 0 \\ 0 & F \text{ simétrica } < 0 \\ +\infty & F \text{ no simétrico} \end{cases}$$

es cuasiconvexa.

4.3.5. Subespacios lineales y sistemas elípticos

Lema 4.13. Sea L un subespacio lineal de $M^{m \times n}$ que no contiene ninguna línea de rango-1.

- (i) Si u es Lipschitz y $Du \in L$ en c.t.p. entonces u es suave
- (ii) Si u_j es una sucesión que satisface

$$\begin{aligned} u_j &\xrightarrow{*} u \text{ en } W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m), \\ \text{dist}(Du_j, L) &\rightarrow 0 \text{ en medida} \end{aligned} \tag{4.5}$$

entonces $Du \in L$ en c.t.p. y

$$Du_j \rightarrow Du \text{ en medida.}$$

Observación. En (i) es suficiente asumir que $u \in W^{1,1}$, en (ii) es suficiente que $u_j \rightarrow u$ en L^1_{loc} y que Du_j está acotado en L^1_{loc} .

Demostración. Sea $A : M^{m \times n} \rightarrow M^{m \times n}$ la proyección sobre el complemento ortogonal de L . Entonces $Du \in L$ es equivalente a

$$ADu = 0.$$

La suposición de que L no contiene líneas de rango-1 esencialmente asegura que (2.11) es un sistema elíptico lineal, y las afirmaciones se derivan fácilmente de la teoría general de tales sistemas.

Supongamos que v tiene soporte compacto en Ω , f pertenece al espacio de Sobolev $W^{k,2}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ (es decir, todas las derivadas distributivas hasta el orden k pertenecen a L^2) y v satisface

$$ADv = f.$$

Decimos que $v \in W^{k+1,2}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ y

$$\|D^{k+1}v\|_{L^2} \leq C \|D^k f\|_{L^2}$$

Para probar esto considere la transformada de Fourier.

$$iA\hat{v}(\xi) \otimes \xi = \hat{f}(\xi)$$

Como L no contiene conexiones de rango-1, tenemos $A(a \otimes \xi) \neq 0$ si $a \neq 0, \xi \neq 0$, y por homogeneidad

$$|A(a \otimes \xi)| \geq c|a||\xi|$$

para alguna constante $c > 0$. La afirmación se sigue ahora del Teorema de Plancherel.

Para probar (i) sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces

$$AD(\varphi u) = A(u \otimes D\varphi).$$

Tenemos la implicación $u \in W_{\text{loc}}^{k,2} \Rightarrow u \in W_{\text{loc}}^{k+1,2}$, y esto prueba (i).

Para probar (ii) observe que la hipótesis y la linealidad de la expresión implican que $u_j \rightarrow u$ en L_{loc}^2 , $ADu_j \rightarrow 0$ en L_{loc}^2 , $ADu = 0$.

La aplicación de (2,13) con $v = \varphi(u_j - u)$ produce la afirmación.

Para establecer (i) para $u \in W^{1,1}$ basta ablandar u y pasar al límite. Para probar (ii) bajo la hipótesis del comentario, se pueden usar las estimaciones débiles de L^1 para sistemas elípticos (o, más precisamente, para buenos multiplicadores de Fourier). \square

Ejemplo 4.14. $L = \left\{ F \in M^{2 \times 2} : F = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$; esto corresponde a las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\partial_1 u^1 - \partial_2 u^2 = \partial_2 u^1 + \partial_1 u^2 = 0$$

Ejemplo 4.15. $L = \{F \in M^{n \times n} : F^T = F, \text{tr} F = 0\}$; esto corresponde a la ecuación de Laplace $\Delta v = 0$, ya que Du simétrico implica $u = Dv$ (localmente).

Ejemplo 4.16. $L = \{F \in M^{n \times n} : \text{tr} F = 0, F_{ij}\xi_k - F_{ik}\xi_j = 0, \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}\}$; esto corresponde al sistema $\text{div} u = 0, \text{curl} u = 0$.

4.4. Problemas de inclusión de pozos

4.4.1. El problema de un pozo

El conjunto K más simple que es compatible con los requisitos de simetría es $K = SO(n)$. En este caso, las sucesiones aproximadas deben converger fuertemente.

Teorema 4.17. *Supongamos que*

$$Du \in SO(n) \text{ en c.t.p.}\Omega.$$

Entonces Du es constante y $u(x) = Qx + b, Q \in SO(n)$. Si u_j es una sucesión de funciones con una constante de Lipschitz uniformemente acotada tal que

$$\text{dist}(Du_j, SO(n)) \rightarrow 0 \quad \text{en medida}$$

entonces

$$Du_j \rightarrow \text{const} \quad \text{en medida.}$$

Demostración. Para probar la primera afirmación, recordemos

$$\text{div cof } Du = 0$$

para cualquier función de Lipschitz. Ahora $\text{cof } F = F$ para todo $F \in SO(n)$ y por lo tanto u es armónico y por lo tanto diferenciable. Además $|Du|^2 = n$, donde $|F|^2 = \text{tr } F^T F = \sum_{i,j} F_{ij}^2$, y por lo tanto

$$2|D^2u|^2 = \Delta|Du|^2 - 2Du \cdot D\Delta u = 0.$$

Por tanto, Du es constante.

Para probar la segunda afirmación del teorema podemos asumir que $u_j \xrightarrow{*} u$ en $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Considere la función

$$f(F) = |F|^n - c_n \det F, \quad c_n = n^{n/2}.$$

Uno comprueba fácilmente que $f \geq 0$ y que f desaparece exactamente en matrices de la forma $\lambda Q, \lambda \geq 0, Q \in SO(n)$ (use descomposición polar, diagonalice y aplique desigualdad media aritmético-geométrica). Por lo tanto, la débil continuidad de los menores y la débil semicontinuidad inferior de la norma L^n implican que

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(Du_j) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |Du_j|^n dx - c_n \int_{\Omega} \det Du_j dx \right) \\ &\geq \int_{\Omega} |Du|^n dx - c_n \int_{\Omega} \det D u dx = \int_{\Omega} f(Du) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por lo tanto todas las desigualdades deben ser igualdades y en particular

$$f(Du) = 0 \text{ en c.t.p.}, \quad \|Du_j\|_{L^n} \rightarrow \|Du\|_{L^n}.$$

Resulta que

$$\begin{aligned} Du_j &\rightarrow Du \text{ in } L^n(\Omega; M^{m \times n}) \text{ (por lo tanto, en medida)} \\ Du(x) &= \lambda(x)Q(x), \quad \lambda \geq 0, \quad Q(x) \in SO(n) \text{ en c.t.p.} \end{aligned}$$

Además $|Du_j|^2 = n$ en c.t.p., de donde $|Du|^2 = n$ en c.t.p. Así $Du \in SO(n)$ en c.t.p. y, por la primera parte del teorema $Du = \text{const}$. \square

El caso $n = 2$ del resultado anterior muestra algunas conexiones interesantes con las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Identifique $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ como de costumbre a través de $z = x + iy$ y sea $\partial_z = 1/2(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial_x + i\partial_y)$. Supongamos que $1 < p < \infty$ y

$$\text{dist}(Du_j, SO(2)) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Entonces en particular $|\partial_z u_j| \rightarrow 1$ y

$$\partial_{\bar{z}} u_j \rightarrow 0 \quad \text{in } L^p(\Omega; \mathbf{C})$$

y la regularidad para el operador de Cauchy-Riemann implica que existe una función u

$$u_j \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}), \quad \partial_{\bar{z}} u = 0$$

Por lo tanto, u es (débilmente) holomorfa y $|\partial_z u| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\partial_z u_j| = 1$. Por lo tanto $\partial_z u = \text{const}$.

4.5. Inclusión de pozo doble

Para ver qué pueden hacer las diversas nociones de convexidad para comprender la microestructura en los cristales, consideramos el problema de los dos pozos en dos dimensiones. Este es el problema multifásico más simple consistente con la simetría rotacional y fue analizado completamente en un artículo de Šverák. Sea

$$K = SO(2)A \cup SO(2)B \subset M^{2 \times 2}, \quad \det B \geq \det A > 0.$$

Varias normalizaciones son posibles. La multiplicación por A^{-1} , la descomposición polar y la diagonalización muestran, por ejemplo, que basta considerar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad 0 < \lambda \leq \mu, \quad \lambda\mu \geq 1$$

El primer paso hacia la resolución de los problemas 1 a 3 es buscar conexiones de rango-1 en K .

Teorema 4.18. *Supongamos que K no contiene conexiones de rango-1. Entonces cada medida de Young $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(M^{2 \times 2})$ con $\text{supp } \nu_x \subset K$ es una masa constante de Dirac. Es más*

$$K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc} = K$$

Observación. No se sabe si el mismo resultado vale para $K = SO(3)A \cup SO(3)B \subset M^{3 \times 3}$.

Demostración. La observación crucial es que

$$\det(FG) > 0 \quad \forall F, G \in K, F \neq G.$$

Por simetría e invariancia $SO(2)$ basta verificar esto para $G = \text{Id}$. La desigualdad claramente se cumple para $F = B$ (según el ejercicio anterior) y, por lo tanto, por la conectividad y la ausencia de conexiones de rango-1 para $G \in SO(2)B$. De manera similar, $\det(\text{Id} - (-\text{Id})) > 0$ y, por lo tanto, por conectividad también se cumple para todos los demás $G \in SO(2)$.

Para determinar K^{qc} , considere primero un gradiente homogéneo de medida de Young ν soportado en K y sea $\bar{\nu} = \langle \nu, \text{id} \rangle$ su baricentro. Tenemos para $F, G \in M^{2 \times 2}$

$$\det(FG) = \det F - \text{cof } F : G + \det G,$$

donde $F : G = \text{tr } F^t G = \sum_{i,j} F_{ij} G_{ij}$. Las relaciones de menores indican

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{M^{2 \times 2} \times M^{2 \times 2}} \det(FG) d\nu(F) d\nu(G) \\ &= \int_{M^{2 \times 2} \times M^{2 \times 2}} (\det F - \text{cof } F : G + \det G) d\nu(F) d\nu(G) \\ &= \int_{M^{2 \times 2}} (\det \bar{\nu} - \text{cof } \bar{\nu} : G + \det G) d\nu(G) \\ &= \det \bar{\nu} - \text{cof } \bar{\nu} : \bar{\nu} + \det \bar{\nu} = \det(\bar{\nu} - \bar{\nu}) = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por lo tanto, la primera desigualdad debe ser una igualdad e implica que la medida del producto $\nu \otimes \nu$ se apoya en la diagonal de $M^{2 \times 2} \times M^{2 \times 2}$. Por lo tanto, ν debe ser una masa de Dirac. Esto implica $K^{qc} = K$. Dado que el argumento usaba solo las relaciones menores, incluso tenemos $K^{pc} = K$.

Ahora sea $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(M^{m \times n})$ una medida gradiente arbitraria de Young con $\text{supp } \nu_x \subset K$ en c.t.p. Por el argumento anterior $\nu_x = \delta_{Du(x)}$ y $Du(x) \in K$ en c.t.p. Mostramos que $Du \equiv \text{const}$. Con este fin, obsérvese primero que la afirmación puede fortalecerse para

$$\det(XY) \geq c|XY|^2, \quad c > 0, \quad \forall X, Y \in K$$

De hecho, por compacidad e invariancia de $SO(2)$, basta con verificar que el espacio tangente de $SO(2)$ en la identidad no contiene conexiones de rango-1. Esto es obvio. Ahora sea e un vector unitario en \mathbf{R}^2 , y para $0 < h < 1$ considere la traslación

$v(x) = u(x + he)$ y una función de corte $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dado que el determinante es un lagrangiano nulo, la integración produce

$$\begin{aligned}
 & c \int_{\Omega} \varphi^2 |DuDv|^2 dx \leq \int_{\Omega} \det[\varphi(DuDv)] dx \\
 & \leq \int_{\Omega} \det[D(\varphi(uv))] dx - \int_{\Omega} \text{cof } D(\varphi(uv)) : (uv) \otimes D\varphi dx \\
 & \quad + \int_{\Omega} \det[(uv) \otimes D\varphi] dx \\
 & \leq \frac{c}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 |DuDv|^2 dx + C \int_{\Omega} |D\varphi|^2 |uv|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto, los cocientes de diferencia $\varphi \frac{DuDv}{h}$ están uniformemente acotados en L^2 y, por lo tanto, $Du \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega; M^{m \times n})$. Por lo tanto, Du solo puede tomar valores en un componente conexo de K , y la afirmación sigue. \square

Para considerar el caso donde K tiene conexiones de rango-1, es conveniente introducir nuevas coordenadas en $M^{2 \times 2}$. Dado que A y B no son conformemente equivalentes (como $\lambda < \mu$), para cada matriz F existe un único par $(y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ tal que

$$F = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} B.$$

Teorema 4.19. *Sea K dado por*

$$K = SO(2)A \cup SO(2)B \subset M^{2 \times 2}, \quad \det B \geq \det A > 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad 0 < \lambda \leq \mu, \quad \lambda\mu \geq 1$$

y ese $\lambda < 1$. Después

$$K^{lc} = K^{rc} = K^{qc} = K^{pc}$$

y

$$\begin{aligned}
 & K^{pc} = K^c \cap \{\det = 1\}, \quad \text{if } \det B = 1, \\
 & K^{pc} = \left\{ F = (y, z) : |y| \leq \frac{\det B - \det F}{\det B - 1}, \quad |z| \leq \frac{\det F - 1}{\det B - 1} \right\} \\
 & \text{si } \det B > 1.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para caracterizar la envoltura policonvexa usamos la siguiente proposición

Proposición 4.20. La envoltura convexa del conjunto $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ dada por $\mathcal{K} = \{(y, 0, a) : |y| = 1\} \cup \{(0, z, b) : |z| = 1\}$ viene dada por

$$\mathcal{K}^c = \begin{cases} \{(y, z, a), |y| + |z| \leq 1\} & \text{si } a = b \\ \{(y, z, t), |y| \leq \frac{bt}{ba}, |z| \leq \frac{ta}{ba}\} & \text{if } a < b \end{cases}$$

Demostración. Esto es obvio para $n = 1$, y el caso general sigue por invariancia bajo $(y, z, t) \rightarrow (Ry, Qz, t)$, $R, Q \in SO(n)$. \square

Demostración. teorema 4.19

La fórmula para K^{pc} se deriva de la caracterización y la Proposición 4.20. En vista de la relación general entre las diferentes envolturas convexas solo queda demostrar que $K^{lc} = K^{pc}$.

Primer caso: $\det B = 1$.

Sea $F \in K^{pc} = K^c \cap \{\det = 1\}$. Si $F = (y, z) \in \partial K^c$, entonces tenemos $|y| + |z| = 1$. Si $y = 0$ o $z = 0$ entonces $F \in K$ y hemos terminado. Si $y \neq 0, z \neq 0$ entonces podemos considerar $G(t) = (ty/|y|, (1-t)z/|z|)$. Sea $g(t) = \det G(t)$. Entonces g es cuadrático en t y $g(0) = g(1) = g(|y|) = 1$. Por lo tanto, $g \equiv 1$ y $t \rightarrow G(t)$ debe ser una línea de rango-1. Esto muestra que F es una combinación de rango-1 de $(y/|y|, 0) \in K$ y $(0, z/|z|) \in K$.

Si $F \in \text{int } K^c \cap \{\det = 1\}$ entonces existen $a, n \in S^1$ tales que $\text{cof } F : a \otimes n = Fn \cdot a = 0$. Por lo tanto, el determinante es constante en la línea $F + ta \otimes n$ y esta línea de rango-1 se cruza con ∂K^c para valores positivos y negativos de t . Por lo tanto, cada matriz en $K^c \cap \{\det = 1\}$ es una combinación de rango-1 de dos matrices en $\partial K^c \cap \{\det = 1\}$ y por lo tanto pertenece a K^{lc} . Esto finaliza la demostración de $\det B = 1$.

Segundo caso: $\det B > 1$.

Dado que cada semirrecta de rango-1 a través de un punto interior de K^{pc} se cruza con ∂K^{pc} , basta con mostrar $\partial K^{pc} \subset K^{lc}$. Sea $\bar{F} = (\bar{y}, \bar{z}) \in \partial K^{pc}$ y definimos

$$\begin{aligned} f(y, z) &= (\det B - 1)|y| - \det B + \det F \\ g(y, z) &= (\det B - 1)|z| + 1 - \det F \end{aligned} \tag{4.10}$$

La envoltura policonvexa está dada por $\{f \leq 0\} \cap \{g \leq 0\}$ y por lo tanto $f(\bar{y}, \bar{z}) = 0$ o $g(\bar{y}, \bar{z}) = 0$. Por conveniencia asumimos lo segundo, el otro caso es análogo.

Si $f(\bar{F}) = 0$ entonces $|\bar{y}| + |\bar{z}| = 1$. Además f y g son funciones cuadráticas en el segmento $t(\bar{y}/|\bar{y}|, 0) + (1-t)(0, \bar{z}/|\bar{z}|)$, y desaparece en $t = 0, 1, |\bar{y}|$. Por lo tanto, desaparecen de manera idéntica en el segmento que, por lo tanto, es un segmento de rango-1. Así $F \in K^{lc}$.

Ahora supongamos que $f(\bar{F}) < 0$. Usando la invariancia $SO(2)$ podemos asumir que $z_2 = 0$. Por definición suponemos $z_1 > 0$, el caso $z_1 < 0$ es análogo. Tenga en cuenta que el espacio lineal $\{z_2 = 0\}$ concuerda con $\{F_{12} + F_{21} = 0\}$. Afirmamos que existe una línea de rango-1 en $\{z_2 = 0\}$ hasta \bar{F} en la que g desaparece (siempre que $z_1 > 0$). Una forma de ver esto es considerar $\tilde{g}(y, z) = (\det B - 1)z_1 + 1 - \det F$ y notar que $\tilde{g} = 0$ define un hiperboloide de una hoja H en el espacio tridimensional $\{z_2 = 0\}$. Por lo tanto, a través de cada punto en H existen dos líneas que se encuentran en H y, por lo tanto, deben ser líneas de rango-1 ya que $\det F$ es una función afín en estas líneas. Alternativamente se puede considerar $(y(t), z(t)) = F(t) = \bar{F} + t(\mu - \lambda)a \otimes Pa$, con $Pa = (-a_1, a_2)$. Entonces $z_2(t) = 0, \dot{z}_1 = |a|^2 > 0$ y \tilde{g} es afín en la línea $t \rightarrow F(t)$. Un breve cálculo muestra que $\frac{d}{dt}g(F(t))|_{t=0} = (Qa, a)$ y la forma cuadrática

$$Q = (\det B - 1)\text{Id} + \frac{1}{2}(\mu - \lambda) [(\text{cof } \bar{F})P + P(\text{cof } \bar{F})^T]$$

es indefinido y por lo tanto tiene un núcleo no trivial.

Consideremos entonces la línea de rango-1 $F(t) = \bar{F} + t(\mu - \lambda)a \otimes Pa$ en la que z_2 y g desaparecen.

Sea $t_0 < 0$ definido por $z_1(t_0) = 0$. Como $g(F(t_0)) = 0$ deducimos que $F(t_0) = (y(0), 0) \in K$. Por otro lado $f(F(0)) < 0$ y usando el hecho de que g desaparece en $F(t)$ tenemos $f(F(t)) = (\det B - 1)(|y(t)| + |z(t)| - 1) \rightarrow \infty$ como $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, existe $t_1 > 0$ tal que $f(F(t_1)) = g(F(t_1)) = 0$ y por lo tanto $F(t_1) \in K^{lc}$ por las consideraciones anteriores. Así $\bar{F} = F(0) \in K^{lc}$ y la demostración está terminada. \square

4.6. Soluciones exactas

Las soluciones aproximadas se caracterizan por la envoltura cuasiconvexa K^{qc} y el conjunto $\mathcal{M}^{qc}(K)$ de medidas de Young. La construcción de soluciones exactas es más delicada. En vista del resultado negativo del problema de dos gradientes, se creía que las soluciones exactas eran bastante raras. Los resultados recientes sugieren que existen muchas soluciones exactas pero que tienen que ser muy complicadas. Esto recuerda los resultados de rigidez y flexibilidad para inmersiones isométricas y otros problemas geométricos.

Para ilustrar algunas de las dificultades, considere nuevamente el problema bidimensional de dos pozos

$$\begin{aligned} Du &\in K \text{ en c.t.p. en } \Omega, & u &= Fx \text{ on } \partial\Omega, \\ K &= SO(2)A \cup SO(2)B \\ A &= \text{Id}, & B &= \text{diag}(\lambda, \mu), \quad 0 < \lambda < 1 < \mu, \lambda\mu \geq 1. \end{aligned}$$

Si ignoramos las condiciones de contorno, las soluciones más simples de $Du \in K$ son laminados simples, vea la Figura 4.6. Un breve análisis de las conexiones de rango-1 en K muestra que dichos laminados son perpendiculares a una de las normales n_1 o n_2 , determinadas por las dos soluciones de la ecuación

$$QAB = a \otimes n.$$

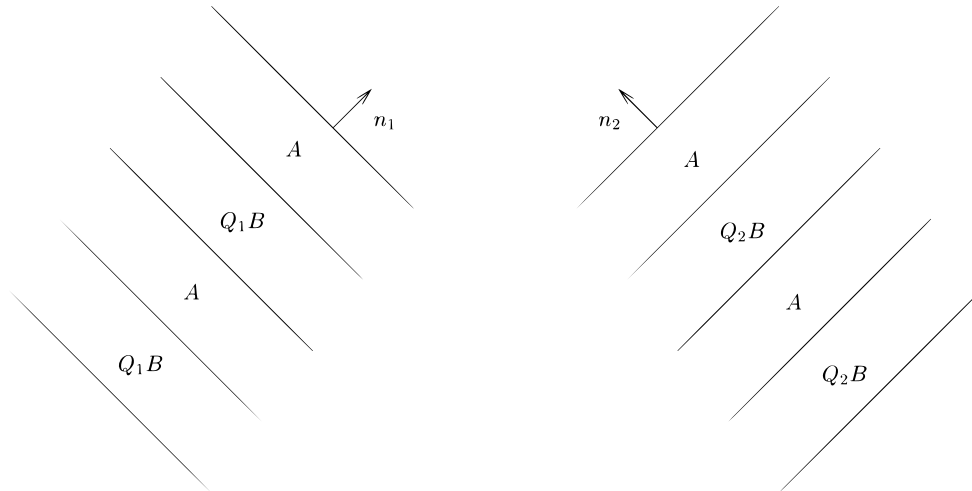


Figura 4.11: Dos posibles laminados para el problema de los dos pozos. Imagen utilizada desde [Mul98].

Sin embargo, no existe una forma obvia de combinar los dos laminados, vea la Figura 4.6. Por lo tanto, se creía que el problema no tiene soluciones no triviales. Esto es falso, la construcción de soluciones no triviales se basa en el método de integración convexa de Gromov.

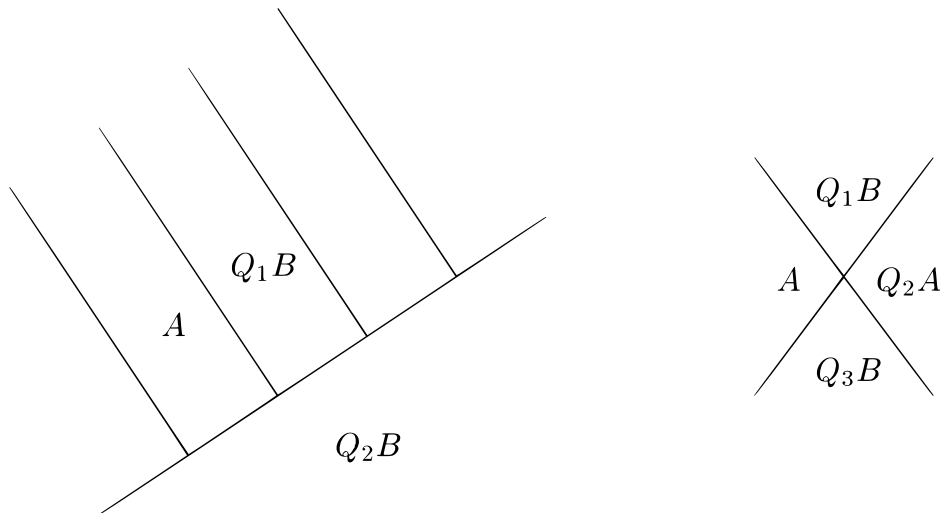


Figura 4.12: Ninguna de las construcciones anteriores satisface la condición de rango-1 en todas las interfaces.

4.6.1. Existencia de soluciones

Primero, se observa que la versión abierta del problema de dos gradientes admite una solución. Aquí y para el resto de esta sección decimos que la función $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$

es lineal por partes si es continuo Lipschitz y si existen finitos o numerables conjuntos abiertos disjuntos Ω_i cuya unión tiene plena medida en Ω tal que $u|_{\Omega_i}$ es afín.

Lema 4.21. Supongamos que $\text{rk}(BA) = 1$, $F = \lambda A + (1 - \lambda)B$, $\lambda \in (0,1)$. Entonces, para un dominio acotado Ω y cada $\delta > 0$ existe la función lineal por partes u tal que

$$\begin{aligned} u(x) &= Fx \text{ on } \partial\Omega \\ \text{dist}(Du, \{A, B\}) &< \delta \\ \sup |u(x) - Fx| &< \delta. \end{aligned}$$

Incluso es posible manejar ciertas restricciones. Si $n = m = 2$ y $\det A = \det B = c \neq 0$ entonces uno puede lograr $\det Du = c$.

Demostración. Primero construiremos una solución para un dominio especial U . Luego, el argumento se completará con una aplicación del teorema de cobertura de Vitali.

Por un cambio afín de variables podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$A = -\lambda a \otimes e_n, \quad B = (1 - \lambda)a \otimes e_n, \quad F = 0, \quad \text{and} \quad |a| = 1.$$

Sea $\epsilon > 0$, sea

$$V = (-1,1)^{n-1} \times ((\lambda - 1)\epsilon, \lambda\epsilon)$$

y definimos $v : V \rightarrow \mathbf{R}^m$ por

$$v(x) = -\epsilon\lambda(1 - \lambda)a + \begin{cases} -\lambda ax_n & \text{si } x_n < 0, \\ (1 - \lambda)ax_n & \text{si } x_n \geq 0 \end{cases}$$

Entonces $Dv \in \{A, B\}$ y $v = 0$ en $x_n = \epsilon(\lambda - 1)$ y $x_n = \epsilon\lambda$, pero v no desaparece en todo ∂V . Sea

$$h(x) = \epsilon\lambda(1 - \lambda)a \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|.$$

Entonces h es lineal por partes y $|Dh| = \epsilon\lambda(1 - \lambda)\sqrt{n - 1}$. Establecemos

$$\tilde{u} = v + h.$$

Notemos que $\tilde{u} \geq 0$ en ∂V y sea

$$U = \{x \in V : \tilde{u}(x) < 0\}.$$

Después

$$\begin{aligned} \tilde{u}|_U &\text{ es lineal por partes, } \tilde{u}|_{\partial U} = 0, \\ \text{dist}(D\tilde{u}, \{A, B\}) &\leq \epsilon\lambda(1 - \lambda)\sqrt{n - 1}, \\ |\tilde{u}| &\leq \epsilon\lambda(1 - \lambda). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por el teorema de cobertura de Vitali, se puede acotar Ω mediante copias a escala disjuntas de U . Más precisamente, existen $x_i \in \mathbf{R}^n$ y $r_i > 0$ tales que los conjuntos

$$U_i = x_i + r_i U$$

son mutuamente disjuntos y $|\Omega \setminus \cup_i U_i| = 0$. Definimos u por

$$u(x) = \begin{cases} r_i \tilde{u}\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right) & \text{if } x \in U_i, \\ 0 & \text{más.} \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que

$$Du(x) = D\tilde{u}\left(\frac{x-x_i}{r_i}\right) \quad \text{if } x \in U_i.$$

De ello se deduce que u es lineal por partes, que $u|_{\partial\Omega} = 0$ y que $\text{dist}(Du, \{A, B\}) < \delta$ para un $\epsilon > 0$ adecuado. Además, eligiendo $r_i \leq 1$ también se puede obtener la estimación de $|uFx|$. \square

El lema 4.21 se puede iterar fácilmente, y usando la noción de capa convexa de laminación de un conjunto se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.22. Supongamos que $U \subset M^{m \times n}$ es abierto. Sea $v : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ afín por tramos y Lipschitz continua y supongamos $Dv \in U^{lc}$ en c.t.p. Entonces existe $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que

$$Du \in U \text{ en c.t.p. en } \Omega, \quad u = v \text{ on } \partial\Omega.$$

El paso crucial es el paso de los conjuntos abiertos a los compactos $K \subset M^{m \times n}$. Siguiendo a Gromov decimos que una sucesión de conjuntos U_i es una aproximación de K si

- (i) los U_i están abiertos y contenidos en una bola fija
- (ii) $U_i \subset U_{i+1}^{lc}$ (iii) $U_i \rightarrow K$ en el siguiente sentido: if $F_{i_k} \in U_{i_k}, i_k \rightarrow \infty$ y $F_{i_k} \rightarrow F$, luego $F \in K$.

Teorema 4.23. Supongamos que K admite una aproximación $\{U_i\}$. Sea $v \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^m)$ con

$$Dv \in U_1.$$

Entonces existe una función de Lipschitz u tal que

$$Du \in K \text{ en c.t.p.,} \quad u = v \text{ on } \partial\Omega.$$

Demostración. Para lograr la fuerte convergencia, cada aproximación utiliza una escala espacial mucho más fina que la anterior, similar a la construcción de funciones continuas pero en ninguna parte diferenciables. Esta es una de las ideas clave de la integración convexa.

Primero construimos una sucesión de funciones lineales por partes u_i que satisfacen

$$\begin{aligned} Du_i &\in U_i && \text{en c.t.p.,} \\ \sup |u_{i+1} - u_i| &< \delta_{i+1}, && u_{i+1} = u_i \quad \text{en } \partial\Omega \\ \sup |u_1 - v| &< \delta/4, && u_1 = v \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Para construir u_1 tenga en cuenta que si Ω' está abierto y $\Omega' \subset\subset \Omega$ entonces $\text{dist}(Dv(x), \partial U_1) \geq c(\Omega') > 0$ para todo $x \in \Omega'$. Por lo tanto, es fácil obtener $u_1 \mid \Omega'$ introduciendo una triangulación suficientemente fina. Ahora acotamos Ω mediante una sucesión creciente de conjuntos $\Omega_i \subset\subset \Omega$.

Para construir u_{i+1} y δ_{i+1} a partir de u_i y δ_i procedemos de la siguiente manera. Dejar

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > 2^{-i}\}.$$

Sea ρ un núcleo suavizante habitual, es decir, sea ρ diferenciable con soporte en la bola unitaria y $\int \rho = 1$. Sea

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho(x/\epsilon).$$

Dado que la convolución $\rho_\epsilon * Du_i$ converge a Du_i en $L^1(\Omega_i)$ como $\epsilon \rightarrow 0$ podemos elegir $\epsilon_i \in (0, 2^{-i})$ tal que

$$\|\rho_{\epsilon_i} * Du_i - Du_i\|_{L^1(\Omega_i)} < 2^{-y_0}.$$

Pongamos

$$\delta_{i+1} = \delta_i \epsilon_i.$$

Usamos el Lema 4.22 para obtener u_{i+1} tal que $Du_{i+1} \in U_{i+1}$, $u_{i+1} = u_i$ en $\partial\Omega$ y

$$\sup_{\Omega} |u_{i+1} - u_i| < \delta_{i+1}.$$

Como $\delta_{i+1} \leq \delta_i/2$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \leq \delta/2$$

De este modo

$$u_i \rightarrow u_\infty \quad \text{uniformemente,}$$

y u_∞ es Lipschitz ya que u_i son uniformemente Lipschitz (por (ii) en la definición de una aproximación). Además $u_\infty = v$ en $\partial\Omega$.

Solo queda demostrar que $Du_\infty \in K$. El punto clave es asegurar una fuerte convergencia de Du_i . Como $\|D\rho_\epsilon\|_{L^1} \leq C/\epsilon$ deducimos que

$$\begin{aligned}
 \|\rho_{\epsilon_k} * (Du_k - Du_\infty)\|_{L^1(\Omega_k)} &= \|D\rho_{\epsilon_k} * (u_k - u_\infty)\|_{L^1(\Omega_k)} \\
 &\leq \frac{C}{\epsilon_k} \sup |u_k - u_\infty| \leq \frac{C}{\epsilon_k} \sum_{j=k+1}^{\infty} \delta_j \\
 &\leq 2 \frac{C}{\epsilon_k} \delta_{k+1} \leq C' \delta_k
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Y se deduce que

$$\begin{aligned}
 \|Du_k - Du_\infty\|_{L^1(\Omega)} &\leq C' \delta_k + 2^{-k} + \|\rho_{\epsilon_k} * Du_\infty - Du_\infty\|_{L^1(\Omega_k)} \\
 &\quad + \|Du_k - Du_\infty\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como Du_k y Du_∞ están acotados, obtenemos $Du_k \rightarrow Du_\infty$ en $L^1(\Omega)$. Por lo tanto existe una subsucesión u_{k_j} tal que

$$Du_{k_j} \rightarrow Du_\infty \quad \text{en c.t.p.}$$

De la definición de aproximación se sigue que

$$Du_\infty \in K \quad \text{en c.t.p.}$$

Por lo tanto, $u = u_\infty$ tiene las propiedades deseadas. □

Para el problema de los dos pozos, se puede construir una aproximación utilizando fórmula explícita.

Teorema 4.24. *Supongamos que $\lambda\mu > 1$. Entonces el problema de los dos pozos tiene solución si*

$$F \in \text{int } K^{lc}$$

dónde

$$K^{lc} = \left\{ F = (y, z) : |y| \leq \frac{\lambda\mu - \det F}{\lambda\mu - 1}, |z| \leq \frac{\det F - 1}{\lambda\mu - 1} \right\}$$

Un resultado similar es válido si $\lambda\mu = 1$ siempre que en la definición de aproximación e interior se consideren conjuntos relativamente abiertos sujetos a la restricción $\det F = 1$. Un análisis más detallado muestra que en la definición de aproximación se puede reemplazar la envoltura convexa de laminación que se basa en conexiones explícitas de rango-1 por la envoltura convexa de rango-1 definida por dualidad con funciones. Esto tiene una consecuencia sorprendente para el ejemplo de cuatro gradientes.

$$K = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para cualquier matriz

$$F \in K^{rc} \supset \left\{ \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} : |F_{11}| \leq 1, |F_{22}| \leq 1 \right\}$$

y cualquier entorno abierto $U \supset K$ existe la función $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} Du &\in U \text{ en c.t.p. de } \Omega, \\ u &= Fx \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Esto es cierto a pesar del hecho de que los entornos pequeños no contienen conexiones de rango-1, por lo que a primera vista parece que no hay forma de comenzar la construcción.

Este obstáculo se supera construyendo primero una función (lineal por partes) que satisface $Dv \in U^{rc}$ en c.t.p. y $Dv \in U$ excepto en un conjunto de medidas pequeñas. Entonces se puede demostrar que el conjunto excepcional se puede eliminar inductivamente.

El principal problema pendiente es si en la definición de una inaproximación se puede reemplazar la envoltura convexa de laminado (o envoltura convexa de rango-1) por la envoltura cuasiconvexa. Un paso clave sería resolver la siguiente pregunta.

Proposición 4.25. Sea K un conjunto cuasiconvexo compacto, es decir, $K^{qc} = K$ y sea $\nu \in \mathcal{M}^{qc}(K)$. Entonces para todo conjunto abierto $U \supset K$ existe una sucesión $u_j : (0,1)^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ tal que Du_j genera ν y $Du_j \in U$ en c.t.p.

La proposición es verdadera para conjuntos convexos compactos; esto refina el Lema de Zhang que implica la existencia de u_j tal que $Du_j \in B(0, R)$ para una bola suficientemente grande.

4.6.2. Regularidad y rigidez

La construcción descrita anteriormente produce soluciones muy complicadas del problema de los dos pozos. Esto plantea la cuestión de si se puede controlar la geometría de las soluciones. Considere el conjunto

$$E = \{x \in \Omega : Du(x) \in SO(2)A\}$$

donde Du toma valores en una componente conexa de K (o una fase en las aplicaciones a cristales). El perímetro de un conjunto $E \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$ se define como

$$\text{Per } E = \sup \left\{ \int_E \text{div } \varphi dx : \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbf{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Para conjuntos suaves o poliédricos esto concuerda con la medida dimensional $(n-1)$ de ∂E .

Teorema 4.26. Si u es una solución de

$$\begin{aligned} Du &\in K \text{ en c.t.p. de } \Omega, \quad u = Fx \text{ on } \partial\Omega, \\ K &= SO(2)A \cup SO(2)B \\ A &= \text{Id}, \quad B = \text{diag}(\lambda, \mu), \quad 0 < \lambda < 1 < \mu, \lambda\mu \geq 1. \end{aligned}$$

y si $\text{Per } E < \infty$ entonces u es localmente un laminado simple y ∂E consta de segmentos de línea recta que solo pueden cruzarse en $\partial\Omega$. La prueba combina ideas geométricas y de teoría de la medida. La idea geométrica es que la curvatura de Gauss $K(g)$ de la métrica de retroceso $g = (Du)^T Du$ debería desaparecer (en un sentido adecuado). Dado que g solo toma dos valores, esto debería dar información sobre E .

Un paso clave en la implementación de esta idea es una versión de perímetro finito del teorema de Liouville sobre la rigidez de las rotaciones infinitesimales. En este marco, los componentes conectados se reemplazan por componentes indescomponibles. Un conjunto A de perímetro finito es indescomponible si por cada $A_1 \subset A$ con $\text{Per } A = \text{Per } A_1 + \text{Per } A \setminus A_1$ el conjunto A_1 o $A \setminus A_1$ tiene medida cero. Se puede demostrar que cada conjunto de perímetro finito es una unión de, como máximo, muchos componentes contables indescomponibles.

Teorema 4.27. *Supongamos que $u : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ pertenece a $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^n)$ y que $\det Du \geq c > 0$. Supongamos además que $E \subset \Omega$ tiene un perímetro finito y*

$$Du \in SO(n) \quad \text{en c.t.p. de } E.$$

Entonces Du es constante en cada componente indescomponible de E .

Para terminar la prueba del Teorema 4.26 se puede descomponer Du como $e^{i\Theta} g^{1/2}$ (donde $g = (Du)^T Du \in \{A^T A, B^T B\}$) y analizando las condiciones de salto en el límite de cada componente indescomponible para deducir que Θ solo toma dos valores y resuelve (en el sentido distribucional) una ecuación de onda con direcciones características n_1 y n_2 .

B. Kirchheim ideó argumentos teóricos de medida más flexibles y, combinándolos con ideas algebraicas, estableció una generalización del teorema al problema de los tres pozos $K = \bigcup_{i=1}^3 SO(3)U_i$ en tres dimensiones con $U_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$, $U_2 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1)$, $U_3 = \text{diag}(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1)$, $\lambda_i > 0$.

Bibliografía

- [Bal76] John M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 63(4):337–403, 1976.
- [Bal89] J.M. Ball. A version of the fundamental theorem for young measures. *PDEs and Continuum Models of Phase Transitions. Lecture Notes in Physics, vol 344.*, 1989.
- [Con94] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1994.
- [EG92] L.C. Evans and R. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.
- [FL07] I. Fonseca and G. Leoni. *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer New York, 2007.
- [Mul98] S. Muller. *Variational models for microstructure and phase transitions*. Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, 1998.
- [Mül99] Stefan Müller. Rank-one convexity implies quasiconvexity on diagonal matrices. *International Mathematics Research Notices*, 1999:1087–1095, 1999.
- [Ped97] P. Pedregal. *Parametrized Measures and Variational Principles*. Birkhäuser Architectural Guide. Birkhäuser, 1997.
- [Rin18] F. Rindler. *Calculus of Variations*. Universitext. Springer International Publishing, 2018.
- [You37] L.C. Young. *Generalized Curves and the Existence of an Attained Absolute Minimum in the Calculus of Variations*. Mathematics Department, Princeton University, 1937.
- [You80] L.C. Young. *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Chelsea Publishing Company, 1980.
- [Šv91] V. Šverák. *On regularity for the Monge-Ampère equations*. Heriot-Watt University, 1991.

- [Šv92a] V. Šverák. *New examples of quasiconvex functions*. Arch. Rat. Mech. Anal., 1992.
- [Šv92b] Vladimír Šverák. Rank-one convexity does not imply quasiconvexity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 120(1-2):185–189, 1992.