



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# El Teorema de Nash-Kuiper y aplicaciones

**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

*Autor:* Jorge Sánchez Polo

*Tutor:* Daniel Faraco Hurtado

Curso 2021-2022



## Resumen

El Teorema de Nash-Kuiper es un resultado sorprendente de la producción matemática del siglo XX que ha tenido implicaciones trascendentales. Afirma que si tenemos un embedding suave estrictamente corto de una variedad diferenciable en el espacio euclídeo, entonces existe un embedding isométrico de clase  $\mathcal{C}^1$  que aproxima uniformemente al embedding original y de manera arbitraria. Esto es un ejemplo de  $\mathcal{C}^0$ -densidad. La principal consecuencia es que permite reconciliar el enfoque extrínscico e intrínscico de la geometría Riemanniana, i.e. el estudio de las variedades Riemannianas entendidas como ciertos subconjuntos de  $\mathbb{E}^m$  y como espacios abstractos. La otra consecuencia relevante es que con las herramientas empleadas por John Nash y Nicolaas Kuiper para probar su teorema y con el estudio de otros problemas geométricos, germinó una teoría conocida como Principio de homotopía y una técnica asociada llamada Integración convexa. El padre de esto fue Mijáil Gromov, que publicó los resultados principalmente en su libro *Partial differential relations*.

El primer capítulo del trabajo hace una introducción a la geometría Riemanniana, definiendo el concepto de métrica sobre una variedad diferenciable. En el segundo se estudia el Teorema de Nash-Kuiper, sus contraintuitivas consecuencias y una demostración detallada que pasa de una versión local a una global. Finalmente, en el tercer capítulo se hace una introducción al h-principio y a la integración convexa. En los apéndices se encuentra material complementario a los resultados o relevante para seguir algunas demostraciones.

## Abstract

The Nash-Kuiper Theorem is a surprising result of the mathematical production of the 20th century that has had transcendental consequences. It claims that if we have a smooth strictly short embedding from a differentiable manifold to the euclidean space, then there exists an isometric embedding of class  $\mathcal{C}^1$  that arbitrarily approximates the original embedding in the uniform norm. This is an example of  $\mathcal{C}^0$ -density. The main consequence of this is that it allows one to show that the extrinsic and intrinsic points of view of Riemannian geometry are the same, that is, the study of Riemannian manifolds as certain subsets of  $\mathbb{E}^m$  or as abstract spaces. The other relevant consequence is that with the tools developed by John Nash and Nicolaas Kuiper to proof their theorem and with the study of other geometric problems, a new theory was born known as the Homotopy principle and a mathematical tool associated known as Convex integration. The father to this was Mikhail Gromov, who published the results mainly in his book *Partial differential relations*.

The first chapter of this Bachelor's thesis is an introduction to Riemannian geometry, with the definition of metric on a differentiable manifold. The second chapter is devoted to the Nash-Kuiper Theorem, its counterintuitive consequences and a detailed exposition of the proof, that goes from a local version to a global one. Finally, in the third chapter there is an introduction to the h-principle and to Convex integration. In the appendixes there may be found complementary material to the results presented or relevant one to follow some proofs.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Breve introducción a la Geometría Riemanniana</b>	<b>1</b>
1.1	El concepto de métrica sobre una variedad. . . . .	2
<b>2</b>	<b>El Teorema de Nash-Kuiper</b>	<b>7</b>
2.1	Introducción . . . . .	7
2.2	Versión local . . . . .	10
2.2.1	Un primer intento de demostración del Teorema 2.5 . . . . .	13
2.2.2	Descomposición del error métrico . . . . .	13
2.2.3	Stages: reduciendo el error métrico . . . . .	16
2.2.4	Demostración del Teorema 2.5 . . . . .	19
2.3	El ajuste de Kuiper: Codimensión 1 . . . . .	20
2.4	Caso global. Variedades abstractas . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Introducción al h-principio y a la Integración convexa</b>	<b>25</b>
3.1	Introducción . . . . .	25
3.2	Integración convexa en una dimensión . . . . .	26
3.2.1	Un primer ejemplo . . . . .	26
3.2.2	Un ejemplo más general . . . . .	27
3.2.3	$\mathcal{C}^0$ -densidad . . . . .	28
3.3	Conceptos fundamentales y definición del Principio de Homotopía . . . . .	29
3.3.1	Jets y holonomía . . . . .	29
3.3.2	Relaciones Diferenciales . . . . .	32
3.3.3	El Principio de Homotopía . . . . .	33
3.4	Algunos ejemplos nada triviales de aplicación de Integración convexa y del h-principio	34
	<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>
<b>A</b>	<b>Embeddings isométricos suaves</b>	<b>39</b>
<b>B</b>	<b>Producto tensorial en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>41</b>
<b>C</b>	<b>Algunos resultados más de geometría Riemanniana</b>	<b>43</b>



# CAPÍTULO 1

## Breve introducción a la Geometría Riemanniana

---

El concepto de variedad diferenciable  $\mathcal{C}^\infty$  es conocido de los cursos típicos de Geometría Diferencial, donde la condición no topológica radica en exigir cambios de carta suaves. De forma natural, se puede llevar esta definición a variedades  $\mathcal{C}^r$  o analíticas.

**Definición 1.1.** Sea  $M$  una variedad topológica de dimensión  $n$ . Un  $\mathcal{C}^r$ -atlas de  $M$  es una colección de cartas

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$$

tal que  $\mathcal{A}$  cubre  $M$ , i.e.

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

y para cualquier  $\alpha, \beta \in \Lambda$  la función de transición

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \Big|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es de tipo  $\mathcal{C}^r$ .

Una carta  $(U, \varphi)$  en  $M$  se dice compatible con un  $\mathcal{C}^r$ -atlas  $\mathcal{A}$  de  $M$  si  $\mathcal{A} \cup (U, \varphi)$  es un  $\mathcal{C}^r$ -atlas. Un  $\mathcal{C}^r$ -atlas  $\hat{\mathcal{A}}$  se dice maximal en  $M$  si contiene todas las cartas compatibles con él. También se denomina  $\mathcal{C}^r$ -estructura en  $M$ . El par  $(M, \hat{\mathcal{A}})$  se llama  $\mathcal{C}^r$ -variedad o variedad diferenciable de clase  $\mathcal{C}^r$ . Una variedad diferenciable se dice suave si los cambios de carta son de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y analítica real si son  $\mathcal{C}^\omega$ . Decimos que una variedad es cerrada cuando es compacta y no tiene frontera.

**Definición 1.2** (Subvariedad). Un conjunto  $N \subset M$  es una  $m$ -subvariedad de  $M$  si  $\forall p \in N \exists (U, \varphi)$  carta de  $M$  tal que  $p \in U$  y  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ . El número natural  $n - m$  se llama codimensión de  $N$  en  $M$ .

De modo análogo para aplicaciones diferenciables, definimos:

**Definición 1.3** (Aplicación diferenciable). Sean  $(M_1, \hat{\mathcal{A}})$  y  $(M_2, \hat{\mathcal{B}})$  dos  $\mathcal{C}^r$ -variedades. Una aplicación  $f: M_1 \rightarrow M_2$  se dice diferenciable de clase  $\mathcal{C}^r$  si es continua y para todo par de cartas  $(U, \varphi) \in \hat{\mathcal{A}}$  y  $(V, \phi) \in \hat{\mathcal{B}}$  se tiene

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(U \cap f^{-1}(V))} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \phi(V)$$

es de clase  $\mathcal{C}^r$ .

Vamos a repasar conceptos básicos de geometría diferencial que serán ubíquos en este trabajo, a saber:

**Definición 1.4.** Dada una aplicación diferenciable  $f: M^n \rightarrow Q^q$ , decimos:

- La aplicación  $f$  es un difeomorfismo si es biyectiva y la inversa  $f^{-1}: M \rightarrow Q$  es diferenciable.
- El rango de  $f$  en  $p \in M$  es el rango de la diferencial  $d(\phi \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}$  para cualquier par de cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $p \in U$  y  $(V, \phi)$  de  $Q$  con  $f(p) \in V$ .
- La aplicación  $f$  es una inmersión si  $\text{rg}_p f = n$ ,  $\forall p \in M$ .
- Es un embedding de  $M$  en  $Q$  si es un difeomorfismo  $f: M \rightarrow N$ , con  $N \subset Q$  subvariedad.

En este punto es importante observar una serie de cuestiones relativas a la filosofía de este trabajo. La definición de inmersión es equivalente a que la diferencial de  $f$  sea inyectiva, pero eso es una condición sobre la diferencial, no sobre la propia  $f$ . En este sentido, la imagen  $f(M) \subset Q$  podría ser un objeto con autointersecciones, como la representación típica de la Botella de Klein en  $\mathbb{R}^3$ , pero para tener una representación como subvariedad debe hacerlo en  $\mathbb{R}^4$ , como mínimo. La noción de embedding es la que precisa esto, al exigir que  $f$  sea biyectiva. Una pregunta natural es si dada una variedad cualquiera  $M$ , esta admite un embedding a  $\mathbb{R}^m$  de modo que se reconcilien la perspectiva intrínseca (en el sentido de  $M$  como espacio topológico sin ambiente aparente) y extrínseca (como se hiciera en un primer curso de curvas y superficies, vistas como objetos dentro de  $\mathbb{R}^3$ ). La respuesta a esta pregunta desde el enfoque no Riemanniano fue dada por Whitney en su famoso resultado de 1936 y dice lo siguiente:

**Teorema 1.5** (Teorema de Whitney). *Toda variedad diferenciable  $M$  admite un embedding en  $\mathbb{R}^m$  con  $m \geq 2 \dim M + 1$ .*

Sin embargo, estas inmersiones y embeddings son "flexibles", se permiten "estirar" o curvar la figura de modo que perdemos la noción intuitiva y rígida que pudiéramos tener de la variedad original. El ejemplo más sencillo sería el embedding de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^n$ , que puede producir elipses o nudos. Para preservar esa "rigidez" debemos hablar de métricas, y nos volvemos a plantear la misma pregunta: ¿se puede embeber una variedad en el espacio euclídeo preservando la "forma"? Este es el punto central de este trabajo.

## 1.1. El concepto de métrica sobre una variedad.

A continuación, introducimos la noción de métrica en una variedad y una serie de conceptos asociados que son fundamentales, aunque no se pretende hacer una exposición exhaustiva de geometría Riemanniana.

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Sabemos que  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , el conjunto de funciones  $M \rightarrow \mathbb{R}$  suaves, es un anillo conmutativo y que el conjunto de campos vectoriales sobre  $M$ , que denotamos  $\mathcal{C}^\infty(TM)$ , es un  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulo. Sea  $\mathcal{C}_0^\infty(TM) = \mathcal{C}^\infty(M)$  y, para cada  $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{C}_k^\infty(TM) = \mathcal{C}^\infty(TM) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}^\infty(TM)$$



el producto k-tensorial<sup>1</sup> de los módulos  $\mathcal{C}^\infty(TM)$ . Entonces definimos:

**Definición 1.6.** Un campo tensorial  $B$  en  $M$  de tipo  $(s, r)$  es una aplicación  $B: \mathcal{C}_r^\infty(TM) \rightarrow \mathcal{C}_s^\infty(TM)$  lineal en cada variable, es decir,

$$\begin{aligned} & B(X_1 \otimes \cdots \otimes X_{l-1} \otimes (f \cdot Y + g \cdot Z) \otimes X_{l+1} \otimes \cdots \otimes X_r) \\ & \quad f \cdot B(X_1 \otimes \cdots \otimes X_{l-1} \otimes Y \otimes X_{l+1} \otimes \cdots \otimes X_r) \\ & \quad + g \cdot B(X_1 \otimes \cdots \otimes X_{l-1} \otimes Z \otimes X_{l+1} \otimes \cdots \otimes X_r) \end{aligned}$$

para todo  $X_1, \dots, X_r, Y, Z \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ ,  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $l = 1, \dots, r$ .

Por comodidad, denotamos  $B(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r) \equiv B(X_1, \dots, X_r)$ .

Una propiedad<sup>2</sup> importante de los campos tensoriales es que el valor de  $B(X_1, \dots, X_r)$  en el punto  $p \in M$  solo depende del valor de cada campo  $X_i$  en  $p$ , y es independiente de lo que pase fuera. Es decir, dados los campos suaves en  $M$   $X_1, \dots, X_r$  y  $Y_1, \dots, Y_r$  con  $(X_i)_p = (Y_i)_p$ ,  $\forall i = 1, \dots, r$ , entonces

$$B(X_1, \dots, X_r)(p) = B(Y_1, \dots, Y_r)(p).$$

Dado un punto  $p \in M$ , denotamos por  $B_p$  la restricción multilinear del campo tensorial  $B$  al producto tensorial

$$\bigotimes_{l=1}^r T_p M$$

del espacio tangente en  $p$ ,  $T_p M$ , de modo que

$$B_p: ((X_1)_p \otimes \cdots \otimes (X_r)_p) \mapsto B(X_1, \dots, X_r)(p).$$

Con esto estamos en condiciones de introducir el siguiente concepto clave:

**Definición 1.7** (Métrica Riemanniana). Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana  $g$  en  $M$  es un  $(0, 2)$ -campo tensorial en  $M$

$$g: \mathcal{C}_2^\infty(TM) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(TM)$$

tal que, para cada  $p \in M$ , la restricción

$$\begin{aligned} g_p = g|_{T_p M \otimes T_p M}: T_p M \otimes T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longmapsto g(X, Y)(p) \end{aligned}$$

define un producto interno en el espacio vectorial  $T_p M$ . El par  $(M, g)$  se denomina Variedad Riemanniana. El ejemplo clásico es  $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m})$ , que se suele denotar por  $\mathbb{E}^m$ .

Al ser producto interno, para cada  $p \in M$ , la aplicación  $g_p(\cdot, \cdot)$  tendrá una matriz simétrica asociada que obtenemos descomponiendo dos vectores arbitrarios  $v, w \in T_p M$  en la base  $\mathfrak{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$  inducida por la carta  $(U, \varphi)$ , con  $p \in U$  y  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ , es decir,

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad w = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p.$$

<sup>1</sup>Para una definición de producto k-tensorial véase [1].

<sup>2</sup>Para una demostración ver [15] p.44 Proposition 5.1

Como  $g_p$  es bilineal

$$g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = [v]_{\mathfrak{B}}^T (g_{i,j}(p)) [w]_{\mathfrak{B}},$$

donde  $[v]_{\mathfrak{B}}^T = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $[w]_{\mathfrak{B}}^T = (b_1, \dots, b_n)$  y  $g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = g_{i,j}(p)$  y  $(g_{ij})$  es la matriz de la métrica, que es simétrica y definida positiva.

Dado  $U \subset M$  un abierto coordenado, escribimos  $g$  en coordenadas con la siguiente notación:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j.$$

Decir que  $g$  es suave significa que para cualquier carta del atlas suave, los coeficientes  $g_{ij}$  son funciones  $\mathcal{C}^\infty$ , pero también podemos decir que la métrica es de clase  $\mathcal{C}^k$  o analítica en función de si los coeficientes son de clase  $\mathcal{C}^k$  o analíticos, etc.

**Definición 1.8** (Aplicación isométrica). Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  dos variedades Riemannianas. Una aplicación  $\phi: (M, g) \rightarrow (N, h)$  se dice conforme si existe una aplicación  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$e^{\lambda(p)} g_p(X_p, Y_p) = h_{\phi(p)}(d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p))$$

para todo  $X, Y \in \mathcal{C}^\infty(TM)$  y  $p \in M$ . La función  $e^\lambda$  se llama factor conforme de  $\phi$ . Una aplicación conforme con  $\lambda \equiv 0$  se dice isométrica. Un difeomorfismo isométrico se llama isometría.

**Definición 1.9.** Sea  $\phi: M \rightarrow N$ , el pull-back de la métrica  $h$  por  $\phi$ , que denotamos por  $\phi^*h$ , se define por

$$(\phi^*h)_p(X_p, Y_p) = h_{\phi(p)}(d\phi_p(X_p), d\phi_p(Y_p)).$$

Es obvio entonces que la condición de que  $\phi$  sea isométrica es que  $(\phi^*h)_p = g_p$ ,  $\forall p \in M$ , es decir,

$$(1.1) \quad \phi^*h = g.$$

También podemos descomponer  $\phi^*h$  en componentes: como  $d\phi_p: T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$  es lineal,

$$\begin{aligned} (\phi^*h)_p(X_p, Y_p) &= h_{\phi(p)}\left(d\phi_p\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right), d\phi_p\left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j h_{\phi(p)}\left(d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right), d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)\right). \end{aligned}$$

Como  $\phi^*h$  está definida en  $M$ , se tiene que, en coordenadas,

$$(1.2) \quad \phi^*h = \sum_{i,j=1}^n h_{\phi(\cdot)}\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) dx_i dx_j.$$

Introducimos a continuación la noción de longitud de una curva, que es de las primeras nociones que podemos empezar a **medir** en una variedad una vez introducimos métricas, y que dará la interpretación visualizable y contraintuitiva del Teorema de Nash-Kuiper.

**Definición 1.10** (Longitud de una curva). Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva  $\mathcal{C}^1$  en  $M$ . Entonces, la longitud  $L_g(\gamma)$  de  $\gamma$  se define como

$$L_g(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

De aquí se deducen dos cuestiones importantes. La primera es la siguiente proposición, cuya demostración se puede encontrar en [21].

**Proposición 1.11.** *Dada  $(M, g)$  variedad Riemanniana con  $p, q \in M$ , denotamos por  $C_{pq}$  el conjunto de curvas  $\mathcal{C}^1 \gamma: [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(1) = q$  y definimos la función  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por*

$$d(p, q) = \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in C_{pq}\}.$$

*Entonces  $(M, d)$  es un espacio métrico y la topología en  $M$  inducida por  $d$  coincide con la que tenía  $M$  como variedad topológica.*

La otra cuestión importante es que, para  $\phi$ , ser aplicación isométrica es equivalente a preservar la longitud de curvas al pasar de una variedad a otra, esto es

$$(1.3) \quad L_g(\gamma) = L_h(\phi \circ \gamma) \quad \text{para toda } \gamma \text{ curva } \mathcal{C}^1.$$

Esto captura lo que decíamos de no estirar la variedad, en particular al embeberla en  $\mathbb{R}^m$ . Nuestro objetivo principal es estudiar un análogo del Teorema 1.5 que incluya métricas y se hará con detalle en el siguiente capítulo.



## CAPÍTULO 2

# El Teorema de Nash-Kuiper

---

### 2.1. Introducción

Como se menciona en [9], la existencia de inmersiones y embeddings isométricos de variedades diferenciables a  $\mathbb{R}^m$  es un problema clásico de las Matemáticas, cuya formulación se atribuye al matemático suizo Schläfli. Durante la época de Nash había pocos resultados sobre este tema. Janet, Cartan y Burstin habían provado la existencia de embeddings locales isométricos para el caso de métricas analíticas. Para el caso de 2-esferas dotadas de métricas de curvatura gaussiana positiva, Weyl planteó la existencia de embeddings isométricos en  $\mathbb{R}^3$ . El problema de Weyl fue resuelto por Lewy para el caso de métricas analíticas y, poco antes del trabajo de Nash, Louis Nirenberg y Pogorev (sobre un trabajo de Alexandrov) habían zanjado de forma independiente la cuestión de métricas suaves (de hecho  $\mathcal{C}^4$ ).

En sus dos trabajos publicados en 1954 y 1956 (cf. [19] y [20]), Nash revolucionó la cuestión. Primero demostró un resultado totalmente contraintuitivo que asombró a los geómetras de su tiempo: la existencia de embeddings isométricos de tipo  $\mathcal{C}^1$  en ausencia de obstrucciones topológicas. En este trabajo trataremos las conclusiones principales de aquel artículo. En 1956, demostró la existencia de embeddings isométricos para codimensión suficientemente alta, introduciendo sus conclusiones sobre los teoremas de funciones implícitas. El teorema se discute en el Apéndice A.

Empezamos fijando notación. Sea  $e$  la métrica euclídea en  $\mathbb{R}^m$ , que en la carta trivial se expresa

$$e = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} dx_i dx_j.$$

Si  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una inmersión, denotamos por  $u^*e$  el pull-back de la métrica en  $M$ . Para obtener su expresión en coordenadas consideramos lo siguiente: si  $(U, \phi)$  es una carta en  $M$ , sabemos que se define  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p := d\phi^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , donde  $(0, \dots, 1, \dots, 0) = e_i$ , elemento de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} du_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) &= du_p(d\phi^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0)) \\ &= d(u \circ \phi^{-1})|_{\phi(p)}(0, \dots, 1, \dots, 0) \\ &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(\phi(p)). \end{aligned}$$

donde  $\tilde{u} = u \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Además, la restricción  $e_{\phi(p)}$  es el producto escalar en  $\mathbb{R}^m$  para todo  $p$ . Luego, por (1.2) el pull-back se escribe en coordenadas locales como

$$(2.1) \quad u^*e = \sum_{i,j=1}^n (\partial_i u \cdot \partial_j u) dx_i dx_j,$$

donde hemos identificado  $u$  con  $\tilde{u}$  para no añadir más notación. Por (1.1), la condición para que la inmersión sea isométrica es que  $u^*e = g$ , que a su vez equivale a

$$(2.2) \quad g_{ij} = \partial_i u \cdot \partial_j u, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Como las matrices de las métricas son simétricas para todo punto, (2.2) es un sistema de  $\frac{n(n+1)}{2}$  ecuaciones en derivadas parciales en  $m$  variables  $u^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  si  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Para enunciar los principales teoremas del artículo de Nash de 1954 debemos definir el concepto de inmersión corta.

**Definición 2.1** (Aplicación corta). Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana. Una inmersión  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es corta si se satisface la desigualdad  $u^*e \leq g$  en el sentido de formas cuadráticas. Mas precisamente,  $h \leq g$  significa que

$$(2.3) \quad h_{ij}(p)w_i w_j \leq g_{ij}(p)w_i w_j, \quad \forall p \in M, \forall w \in T_p M$$

donde  $[w]_{\mathfrak{B}} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  son las coordenadas de  $w$  en la base  $\mathfrak{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$  de  $T_p M$  dada una carta  $(U_p, \phi_p)$ . Análogamente, escribimos  $h < g$  cuando (2.3) es una desigualdad estricta para cualquier vector  $w \neq 0$ , y decimos que la inmersión es estrictamente corta si  $u^*e < g$ .

Usando (1.3) vemos que una aplicación corta reduce la longitud de las curvas, i.e.  $L_e(u(\gamma)) \leq L_g(\gamma)$  para toda curva suave  $\gamma$ . Con esto podemos formular el teorema fundamental de esta sección.

**Teorema 2.2** (Teorema de Nash-Kuiper). Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana suave cerrada  $n$ -dimensional y sea  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  una inmersión corta  $C^\infty$  con  $m \geq n + 1$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  existe una inmersión isométrica  $C^1$   $\tilde{u}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\|\tilde{u} - u\|_{C^0} < \epsilon$ . Si además  $u$  es un embedding, entonces podemos asumir que  $\tilde{u}$  también lo es.

El primer teorema fundamental del paper de Nash enunciaba lo anterior pero en el caso de codimensión 2, aunque ya observó que era posible optimar ese valor con cálculos un poco más sofisticados. Esa fue la aportación de Kuiper, que en su trabajo de 1955 (cf. [17]) adaptó convenientemente la idea de Nash para rebajar la codimensión a 1.

La hipótesis de que la variedad sea cerrada se puede eliminar, pero la prueba requiere un pequeño detalle adicional que involucra la noción de *conjunto límite*.

**Definición 2.3** (Conjunto límite). Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sea una colección exhaustiva de conjuntos compactos  $\Gamma_k \subset M$  tal que  $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$  y  $\bigcup_k \Gamma_k = M$ . El conjunto de puntos límite de  $u$  es la colección de puntos  $q$  que son límite de cualquier sucesión  $\{u(p_k)\}$  tal que  $p_k \in M \setminus \Gamma_k$ .

**Teorema 2.4** (Embedding isométrico  $C^1$ , caso no cerrado). Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional. Se tiene las mismas conclusiones que el Teorema 2.2 si la aplicación  $u$  es corta y su conjunto límite no interseca su imagen  $u(M)$ . Además, se puede imponer que la aplicación isométrica  $\tilde{u}$  que aproxima de forma uniforme tenga el mismo conjunto límite que  $u$  si  $u$  es estrictamente corta.

Combinado con el clásico teorema de Whitney sobre la existencia de inmersiones y embeddings suaves (i.e. el Teorema 1.5), los teoremas anteriores tienen el siguiente importante corolario.

**Corolario 2.4.1.** *Cualquier variedad Riemanniana  $n$ -dimensional tiene una inmersión isométrica  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^{2n}$  y un embedding isométrico  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Si, además, la variedad es cerrada, entonces hay un embedding isométrico<sup>1</sup>  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

El teorema del embedding isométrico  $\mathcal{C}^1$  de Nash y Kuiper es considerado a menudo como una de las primeros ejemplos del h-principio de Gromov, que introduciremos en el Capítulo 3. Una forma de visualizar el teorema es imaginarse que arrugamos la esfera  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  dentro de una bola muy pequeña  $B_\epsilon$ . Intuitivamente es claro que la aplicación  $u$  que deforma homotéticamente  $\mathbb{S}^n \rightarrow \epsilon\mathbb{S}^n$  es un embedding corto. Lo que el teorema nos dice es que existe otra aplicación  $\tilde{u}$  que aproxima uniformemente a  $u$  y que es un embedding isométrico de tipo de  $\mathcal{C}^1$ , por tanto hay imágenes  $\mathcal{C}^1$  isométricas de  $\mathbb{S}^n$  en un entorno arbitrario de  $\epsilon\mathbb{S}^n$ , que sí preservará las longitudes de las curvas prescritas en  $\mathbb{S}^n$  aunque las curvas imagen por  $u$  en  $\epsilon\mathbb{S}^n$  se haya reducido arbitrariamente. De alguna manera la imagen de  $\mathbb{S}^n$  por  $\tilde{u}$  consistirá en "arrugar" la esfera, pero como  $\tilde{u}$  es  $\mathcal{C}^1$ , esas arrugas no tendrán picos (como sí esperaríamos de una aplicación solo Lipschitz), si no que producirán tangentes continuas. El caso  $n = 1$  lo ilustra muy bien, ver figura 2.1.

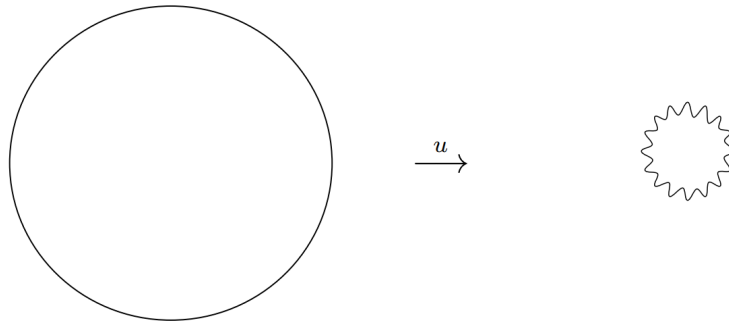


Figura 2.1: Embedding isométrico  $\mathcal{C}^1$  en  $\dim n = 1$ .

Es, sin duda, un resultado sorprendente y contraintuitivo, especialmente si lo comparamos con la clásica rigidez de la esfera en el mencionado problema de Weyl, que nos dice (Véase [8] y [16]) que si  $M$  es una 2-esfera y  $g$  una métrica  $\mathcal{C}^2$  con curvatura Gaussiana positiva, la imagen de cualquier embedding isométrico  $\mathcal{C}^2$   $v: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la frontera de un conjunto convexo módulo movimiento rígido en  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto el embedding  $\tilde{u}$  no puede ser  $\mathcal{C}^2$  y concluimos que, en general, el Teorema 2.2 produce isometrías  $\mathcal{C}^1$  que no tienen más regularidad. Es interesante observar que suponer regularidad Hölder suficientemente fuerte en la primera derivada permite mantener el argumento de rigidez, mientras que para un exponente Hölder  $\alpha$  suficientemente bajo el Teorema de Nash-Kuiper sigue siendo válido en  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ . La existencia de un exponente que marque el cambio de comportamiento en codimensión baja sigue siendo un problema abierto de relevancia, que tiene mucha relación con una conocida conjetura sobre turbulencia resuelta recientemente usando métodos basados en los usados para resolver el Teorema 2.2.

<sup>1</sup>Hoy en día se conoce la solución de Cohen sobre la conjetura para inmersiones de variedades compactas en dimensión menor a  $n - a(n)$ , donde  $a(n)$  es igual al número de 1's en la expansión binaria de  $n$  (pone referencia)

## 2.2. Versión local

Para comprender la idea analítica detrás de la prueba del Teorema de Nash-Kuiper conviene considerar primero una versión local, en el espacio euclídeo, y estar familiarizado con los conceptos presentados en el Apéndice B. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado con frontera  $\mathcal{C}^1$ , que podemos pensar como el conjunto homeomorfo a un abierto coordinado de la variedad  $M^n$ , y sea  $g$  una métrica suave en  $\Omega$ . Es decir,  $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}; \mathcal{P})$ , donde

$$\mathcal{P} = \{\text{matrices } n \times n \text{ definidas positivas}\}.$$

Dada una inmersión  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $m \geq n + 1$ , la matriz del pull-back  $u^*e$  es, como ya hemos visto en (2.1), de la forma  $(\partial_i u \cdot \partial_j u)_{i,j=1,\dots,n} = Du^T Du$ . Vemos entonces que el sistema (2.2) se traduce en la igualdad

$$Du^T Du = g, \quad \text{en } \Omega$$

donde identificamos la métrica  $g$  con su matriz  $(g_{ij})$ .

**Teorema 2.5.** *Sea  $m \geq n + 2$  y  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una inmersión estrictamente corta suave. Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\tilde{u} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$  tal que  $\|u - \tilde{u}\|_{C^0(\bar{\Omega})} < \epsilon$  y*

$$D\tilde{u}^T D\tilde{u} = g \text{ en } \bar{\Omega}.$$

Para poder ver la demostración, debemos estudiar unos resultados previos.

**Lema 2.6.** *Sea  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  cerrado, difeomorfo a la  $n$ -bola cerrada y sea  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una inmersión suave, con  $m \geq n + 2$ . Entonces existen dos funciones  $\zeta, \eta \in C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$  tal que*

$$(a) \quad \|\zeta(x)\|_{\mathbb{R}^m} = \|\eta(x)\|_{\mathbb{R}^m} = 1 \quad \text{y} \quad \zeta(x) \cdot \eta(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

$$(b) \quad \zeta(x) \text{ y } \eta(x) \text{ son ambos ortogonales a } T_{u(x)}(u(\bar{\Omega})) \text{ para todo } x \in \bar{\Omega}.$$

Para una demostración ver [9] Lemma 2.4.1. p. 32 & 33.

*Observación 2.6.1.* La condición (b) es equivalente a  $Du^T(x)\zeta(x) = Du^T(x)\eta(x) = 0$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ .

Lo vemos con un ejemplo. Sea  $u: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  es de la forma  $u(x) = (u^1(x), u^2(x), u^3(x), u^4(x))$ .

La matriz de la diferencial en  $x$  es

$$Du = \begin{pmatrix} \partial_1 u^1 & \partial_2 u^1 \\ \partial_1 u^2 & \partial_2 u^2 \\ \partial_1 u^3 & \partial_2 u^3 \\ \partial_1 u^4 & \partial_2 u^4 \end{pmatrix} = (\partial_1 u, \partial_2 u).$$

Sabemos que  $Du(x): T_x \bar{\Omega} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{u(x)} u(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^4$ , luego los vectores  $\partial_1 u(x) = Du(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y

$\partial_2 u(x) = Du(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  son tangentes a  $u(\bar{\Omega})$  y, como  $\eta(x) \perp u(\bar{\Omega}), \forall x \in u(\bar{\Omega})$ , por definición de ortogonalidad,  $\eta(x) \cdot \partial_1 u(x) = \eta(x) \cdot \partial_2 u(x) = 0, \forall x \in u(\bar{\Omega})$ . Por tanto,  $Du^T(x)\eta(x) = 0, \forall x \in u(\bar{\Omega})$ .

Lo mismo con  $\zeta$ .



**Lema 2.7.** Sea  $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$  una dirección en  $\mathbb{R}^n$  y sea la **perturbación espiral** de  $u$

$$(2.4) \quad v(x) := u(x) + \frac{a(x)}{\lambda} \left( \sin(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \eta(x) \right)$$

para una amplitud  $a(x)$  y una frecuencia  $\lambda \gg 1$ . Se tiene

$$Dv(x) = Du(x) + a(x) \left( \cos(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) \otimes \xi - \sin(\lambda x \cdot \xi) \eta(x) \otimes \xi \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Antes de la prueba, un comentario sobre  $v(x)$ . Veamos por qué se llama perturbación espiral: Denotemos por  $B(x) = \left( \sin(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \eta(x) \right)$ . Entonces, por el Lema 2.6

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \|B(x)\|_2^2 &= B(x) \cdot B(x) \\ &= \sin^2(\lambda x \cdot \xi) \|\zeta(x)\|^2 + \cos^2(\lambda x \cdot \xi) \|\eta(x)\|^2 + 2 \sin(\lambda x \cdot \xi) \cos(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) \cdot \eta(x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto,  $B(x)$  es un vector combinación lineal de dos vectores ortonormales entre sí, modulados por un seno y un coseno con el mismo argumento, de modo que  $B(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$  para todo  $x$ . El argumento  $\lambda x \cdot \xi < \infty, \forall x \in \Omega$ , es el módulo de la proyección de  $x$  en la dirección  $\xi$ , regulado por  $\lambda$ . Dados  $\xi$  y  $\lambda$  fijos, al ir variando  $x$  de forma continua (por ejemplo según una curva) se dibujará una trayectoria sobre  $u(\Omega)$  similar a una espiral que varía su amplitud en cada punto según  $a(x)$  porque  $B$  es suave. Además,  $B(x)$  es ortogonal a  $T_{u(x)}u(\Omega)$  en cada  $x$ . Observar que  $v(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} u(x)$  porque  $\|v(x) - u(x)\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ .

De una forma similar, dado un  $x$  fijo (por tanto,  $u(x)$  punto fijo de la subvariedad), a medida que varía  $\lambda$ , la aplicación  $B$  dibuja una trayectoria circular contenida en  $\text{span}\{\eta(x), \zeta(x)\} \perp u(U)$ . Por tanto, interpretamos  $v(x) = u(x) + \frac{a(x)}{\lambda} B(x)$  como una perturbación sobre  $u(x)$  que, a medida que  $\lambda \rightarrow \infty$ , va dibujando una espiral alrededor de  $u(x)$  contenida en un espacio ortogonal a la subvariedad  $u(\Omega)$ .

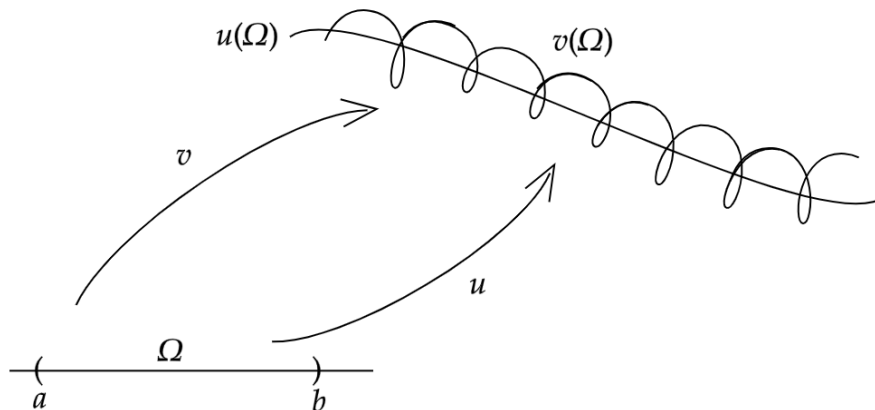


Figura 2.2: Perturbación espiral.

*Demostración del Lema 2.7.* Lo hacemos por coordenadas. Sabemos que la matriz Jacobiana tiene la forma

$$Dv = \begin{pmatrix} \partial_1 v^1 & \dots & \partial_n v^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 v^m & \dots & \partial_n v^m \end{pmatrix} = (\partial_1 v, \partial_2 v, \dots, \partial_n v).$$

Primero observamos que  $\partial_i(\lambda x \cdot \xi) = \lambda x^i \xi^i$  y que

$$\begin{aligned} \partial_i B^j(x) &= \zeta^j(x) \partial_i \sin(\lambda x \cdot \xi) + \sin(\lambda x \cdot \xi) \partial_i \zeta^j(x) + \eta^j(x) \partial_i \cos(\lambda x \cdot \xi) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \partial_i \eta^j(x) \\ &= \lambda \left( \underbrace{\cos(\lambda x \cdot \xi)}_{(\zeta(x) \otimes \xi)_{ji}} \underbrace{\zeta^j(x) \xi^i}_{(\zeta(x) \otimes \xi)_{ji}} - \underbrace{\sin(\lambda x \cdot \xi)}_{(\eta(x) \otimes \xi)_{ji}} \underbrace{\eta^j(x) \xi^i}_{(\eta(x) \otimes \xi)_{ji}} \right) + \sin(\lambda x \cdot \xi) \partial_i \zeta^j(x) + \cos(\lambda x \cdot \xi) \partial_i \eta^j(x) \end{aligned}$$

Luego la entrada  $ji$  de la matriz  $Dv(x)$  será

$$\begin{aligned} \partial_i v^j(x) &= \partial_i u^j(x) + \partial_i a(x) \frac{B^j(x)}{\lambda} + \frac{a(x)}{\lambda} \partial_i B^j(x) \\ &= \partial_i u^j(x) + a(x) \left( \cos(\lambda x \cdot \xi) (\zeta(x) \otimes \xi)_{ji} - \sin(\lambda x \cdot \xi) (\eta(x) \otimes \xi)_{ji} \right) + \frac{1}{\lambda} K(x, \lambda) \end{aligned}$$

donde  $K(x, \lambda)$  función acotada por regularidad  $\mathcal{C}^\infty$  de las partes involucradas.  $\square$

**Corolario 2.7.1.** *La matriz del pull-back  $v^*$  e por la perturbación espiral (2.4) viene dada por*

$$(2.6) \quad Dv^T Dv = Du^T Du + a^2(x) \xi \otimes \xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

*Demostración.* Definimos  $\tilde{a}(x) = a(x) \left( \cos(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) \otimes \xi + \sin(\lambda x \cdot \xi) \eta(x) \otimes \xi \right)$ , luego

$$Dv^T Dv = Du^T Du + \tilde{a}^T Du + Du^T \tilde{a} + \tilde{a}^T \tilde{a} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Por el Lema 2.6 y usando las propiedades descritas en la definición B.1

- $\tilde{a}^T Du = a(x) \cos(\lambda x \cdot \xi) (\xi \otimes \zeta(x)) Du - a(x) \sin(\lambda x \cdot \xi) (\xi \otimes \eta(x)) Du$   
 $= a(x) \cos(\lambda x \cdot \xi) \xi \otimes (Du^T \zeta(x)) - a(x) \sin(\lambda x \cdot \xi) \xi \otimes (Du^T \eta(x)) = 0.$
- $Du^T \tilde{a} = (\tilde{a}^T Du)^T = 0.$
- $\tilde{a}^T \tilde{a} = a^2(x) \cos^2(\lambda x \cdot \xi) (\zeta(x) \otimes \xi)^T (\zeta(x) \otimes \xi) + a^2(x) \sin^2(\lambda x \cdot \xi) (\eta(x) \otimes \xi)^T (\eta(x) \otimes \xi)$   
 $- a^2(x) \sin(\lambda x \cdot \xi) \cos(\lambda x \cdot \xi) \left( (\zeta(x) \otimes \xi)^T (\eta(x) \otimes \xi) + (\eta(x) \otimes \xi)^T (\zeta(x) \otimes \xi) \right)$   
 $= a^2(x) \cos^2(\lambda x \cdot \xi) \zeta(x) \cdot \zeta(x) \xi \otimes \xi + a^2(x) \sin^2(\lambda x \cdot \xi) \eta(x) \cdot \eta(x) \xi \otimes \xi$   
 $- a^2(x) \sin(\lambda x \cdot \xi) \cos(\lambda x \cdot \xi) \left( \zeta(x) \cdot \eta(x) \xi \otimes \xi + \eta(x) \cdot \zeta(x) \xi \otimes \xi \right)$   
 $= a^2(x) \xi \otimes \xi.$
- Hemos dicho en la demostración del Lema 2.7 que  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  está bien definido. En este caso,  $\tilde{a}$  y  $Du$  también están acotadas, por lo que al tomar el producto  $Dv^T Dv$  todo lo que multiplica al término  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  queda también de orden mínimo 1.  $\square$

### 2.2.1. Un primer intento de demostración del Teorema 2.5

Con lo anterior en mente, podríamos intentar dar una demostración del Teorema 2.5 como sigue: Para cada  $x \in \Omega$ , diagonalizamos según la Proposición B.2

$$(2.7) \quad g(x) - Du(x)^T Du(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)^2 \xi_k(x) \otimes \xi_k(x)$$

y usamos los elementos  $a_k(x)$ ,  $\xi_k(x)$  para construir la sucesión  $\{u_k\}_{k=0}^n$  definida por:  $u_0 = u$  y

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \frac{a_k(x)}{\lambda_k} \left( \sin(\lambda_k x \cdot \xi_k(x)) \zeta_k(x) + \cos(\lambda_k x \cdot \xi_k(x)) \eta_k(x) \right).$$

Ahora bien, si  $\xi_k$  no dependiera de  $x$ , por el Corolario 2.7.1 tendríamos

$$Du_{k+1}(x)^T Du_{k+1}(x) = Du_k(x)^T Du_k(x) + a_k^2(x) \xi^k \otimes \xi^k + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right).$$

Es decir, la perturbación espiral (2.4) da lugar a una aplicación  $u_{k+1}$  cuya métrica inducida  $Du_{k+1}^T Du_{k+1}$  aumenta, hasta un error de orden  $\lambda^{-1}$ , una cantidad  $a^2$  en la dirección  $\xi$  y *no cambia* en las direcciones ortogonales. Iterando,

$$Du_n(x)^T Du_n(x) = Du(x)^T Du(x) + \sum_{k=1}^n a_k^2(x) \xi^k \otimes \xi^k + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

donde hemos fijado  $\lambda$  igual para todo  $k$ . Por tanto, por (2.7)

$$g(x) - Du_n(x)^T Du_n(x) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Con esto tendríamos una prueba heurística del Teorema 2.5. Sin embargo, no podemos suponer que en cada paso  $\xi^k$  no dependa de  $x$ , con lo que la diferencia anterior es, en general, falsa. La solución planteada por Nash fue introducir una descomposición de la matriz  $g(x) - Du_n(x)^T Du_n(x)$  en el espacio de matrices simétricas definidas positivas que no dependiera de  $x$ , introduciendo las métricas primitivas.

### 2.2.2. Descomposición del error métrico

Para emular una prueba similar a la planteada en la Sección 2.2.1 pero con vectores  $\xi$  que no dependan de  $x$ , buscamos una descomposición del error métrico alternativa, en un número  $N \gg n$  de términos. Esto será posible gracias al Lema 2.10. Pero antes, recordamos dos cuestiones importantes.

**Definición 2.8** (Cierre convexo). Dado un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^d$  llamamos cierre convexo o convex hull de  $S$  a

$$\text{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Teorema 2.9** (Caratheodory). *Si  $x \in \mathbb{R}^d$  está en el cierre convexo de un conjunto  $\mathcal{Q}$ , entonces  $x$  se puede escribir como combinación convexa de al menos  $d + 1$  puntos en  $\mathcal{Q}$ . En concreto, existe un subconjunto  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{Q}$  formado por  $d + 1$  puntos o menos tal que  $x$  se encuentra en su cierre convexo. Equivalentemente,  $x$  se encuentra en un  $r$ -simplex con vértices en  $\mathcal{Q}$ , donde  $r \leq d$ . El mínimo  $r$  que permite esto para todo  $x \in \text{conv}(\mathcal{Q})$  se llama número de Caratheodory del conjunto  $\mathcal{Q}$ . Dependiendo de las propiedades de  $\mathcal{Q}$ , se pueden obtener mejores cotas.*

Para una demostración véase [18].

**Lema 2.10** (Descomposición del error métrico). *Existe una secuencia  $\{\xi^k\}$  de vectores unitarios en  $\mathbb{R}^n$  y una secuencia  $\Gamma_k \in C_c^\infty(\mathcal{P}; [0, \infty))$  tal que*

$$(2.8) \quad A = \sum_k \Gamma_k^2(A) \xi^k \otimes \xi^k, \quad \forall A \in \mathcal{P},$$

*y existe un número  $N \in \mathbb{N}$  que depende solo de  $n$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{P}$ , al menos  $N$  de los coeficientes  $\Gamma_k(A)$  son distintos de cero.*

*Demostración.* El conjunto  $L := \{A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 1\}$  es un subespacio afín de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . De hecho es un hiperplano de  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , pues  $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  y estamos imponiendo una condición lineal sobre sus coordenadas,  $\text{tr}(A) = 1$ . De modo que  $\dim(L) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$  y  $L \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} - 1}$ . Observamos que  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap \{\text{tr}(A) = 1\}$  es un subconjunto convexo abierto de  $L$  ya que:

Es un subconjunto abierto, pues es intersección del espacio total con un hiperplano.

El conjunto  $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$  es espacio vectorial, luego es cerrado por combinación lineal sobre  $\mathbb{R}$ , en particular, por combinación convexa. Para la parte de  $\text{tr}(A) = 1$  observamos que la traza es una aplicación lineal, de modo que  $\text{tr}(tA + (1-t)B) = \text{tr}(A) + (1-t)\text{tr}(B) = t + (1-t) = 1$ .

Falta ver que la combinación convexa es definida positiva:

$$v^T(tA + (1-t)B)v = tv^T Av + (1-t)v^T Bv \geq 0,$$

pues  $v^T Av \geq 0$ ,  $v^T Bv \geq 0$  y  $t \in [0, 1]$ .

Por tanto, en virtud del Teorema de Caratheodory, todo elemento  $A$  de  $\mathcal{P}_1$  está contenido en el interior de un simplex no degenerado  $S = \left\{A_1, \dots, A_{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}^{co} \subset L$ .

Puesto que  $L$  es una variedad afín y  $\mathcal{P}_1$  es un subconjunto abierto de  $L$ , se tiene que  $\mathcal{P}_1$  es una variedad topológica de dimensión  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ . Es más, puesto que  $\forall A \in \mathcal{P}_1 \exists S_A$  simplex como antes tal que  $A \in S_A$  y  $\mathcal{P}_1$  es abierto, entonces  $A \in \text{int}(S_A)$  tenemos que  $\mathcal{P}_1 \subset \bigcup_{A \in \mathcal{P}_1} \text{int}(S_A)$ . Por tanto, se tiene que  $\{(\text{int}(S_A), \phi_A)\}_{A \in \mathcal{P}_1}$  es una atlas de  $\mathcal{P}_1$ . Por los resultados del Apéndice C existe un subrecubrimiento localmente finito  $\{S^{(i)}\}_i$  con una partición de la unidad  $\{\psi_i^2\}_i$  subordinada.

Cada  $S^{(i)}$  de la forma

$$S^{(i)} = \text{int} \left\{ A_1^{(i)}, \dots, A_{\frac{n(n+1)}{2}}^{(i)} \right\}^{co}$$

para ciertos  $A_j^i \in \mathcal{P}_1$ . Puesto que  $\{S^{(i)}\}_i$  es un cubrimiento localmente finito,  $\forall A \in \mathcal{P}_1 \exists U_A$  entorno de  $A$  tal que  $U_A$  interseca con un número finito de abiertos  $S^{(i)}$ . De ellos, solo un número también

finito, digamos  $\tilde{N}(A)$ , contendrá a  $A$ . Tomando  $N_0 := \sup_{A \in \mathcal{P}_1} \{\tilde{N}(A)\}$ , podemos afirmar que cada  $A \in \mathcal{P}_1$  está contenido en como mucho  $N_0$  simplices no degenerados de  $L$ , donde  $N_0$  solo depende de  $n$  (que al final es el valor que define el espacio topológico donde estamos trabajando).

Dado  $A \in S^{(i)}$ , escribimos  $A$  como combinación convexa de los vértices  $\{A_j^{(i)}\}_{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}}$ . Existen funciones  $\mu_{ij} \in C^\infty(S^{(i)}; (0, 1))$  tal que

$$A = \sum_{j=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \mu_{ij}(A) A_j^{(i)}.$$

Cada  $A_j^{(i)}$  es diagonalizable, por ser simétrica, y definida positiva, luego por la Proposición B.2

$$A_j^{(i)} = \sum_{k=1}^n (c_{j,k}^{(i)})^2 \xi_{j,k}^{(i)} \otimes \xi_{j,k}^{(i)},$$

donde  $c_{j,k}^{(i)} \in \mathbb{R}$  y  $\xi_{j,k}^{(i)} \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Recuperamos ahora la partición de la unidad  $\{\psi_i^2\}_i$  subordinada al cubrimiento  $\{S^{(i)}\}_i$ . Es decir,  $\psi_i^2: \mathcal{P}_1 \rightarrow [0, 1]$  funciones tal que

- $\text{sop}(\psi_i^2) \subset S^{(i)}$ ,
- $\sum_i \psi_i^2 = 1$  en  $\mathcal{P}_1$ .

Luego:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n \mu_{ij}(A) (c_{j,k}^{(i)})^2 \xi_{j,k}^{(i)} \otimes \xi_{j,k}^{(i)} \\ &= \left( \sum_i \psi_i^2(A) \right) \sum_{j=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n \mu_{ij}(A) (c_{j,k}^{(i)})^2 \xi_{j,k}^{(i)} \otimes \xi_{j,k}^{(i)} \\ &= \sum_i \sum_{j=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n (\psi_i(A) \mu_{ij}(A) c_{j,k}^{(i)})^2 \xi_{j,k}^{(i)} \otimes \xi_{j,k}^{(i)}. \end{aligned}$$

Es importante observar que, como hemos señalado, cada  $A \in \mathcal{P}_1$  está contenido en como mucho  $N_0$  simplices, luego para cada  $A$  solo están definidos como mucho  $N_0$  de los valores  $\psi_i(A)$  por la condición  $\text{sop}(\psi_i^2) \subset S^{(i)}$ .

Si  $A \in \mathcal{P}$ , definimos

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}_1 \\ A &\longmapsto \frac{A}{\text{tr}(A)} \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{1}{\text{tr}(A)} A = f(A) = \sum_{s=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n (\psi_{i_s}(f(A)) \mu_{i_s j}(f(A)) c_{j,k}^{(i_s)})^2 \xi_{j,k}^{(i_s)} \otimes \xi_{j,k}^{(i_s)}.$$

Es decir,

$$(2.9) \quad A = \sum_{s=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^n \text{tr}(A) \left( \psi_{i_s} \left( \frac{1}{\text{tr}(A)} A \right) \mu_{i_s j} \left( \frac{1}{\text{tr}(A)} A \right) c_{j,k}^{(i_s)} \right)^2 \xi_{j,k}^{(i_s)} \otimes \xi_{j,k}^{(i_s)}$$

Como las sumas son independientes, finalmente resumimos la expresión (2.9) en:

$$A = \sum_k \Gamma_k^2(A) \xi^k \otimes \xi^k, \quad \forall A \in \mathcal{P}$$

donde:

$\Gamma_k^2(\cdot) = \text{tr}(\cdot) \left( \psi_k \left( \frac{1}{\text{tr}(\cdot)} \cdot \right) \mu_k \left( \frac{1}{\text{tr}(\cdot)} \cdot \right) c_k \right)^2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{P}; [0, \infty))$ . El soporte es compacto porque  $\mathcal{P} \cong \mathbb{R}^k$ , cierto  $k$ , donde compacto es equivalente a cerrado y acotado. El soporte es el cierre del conjunto donde las funciones son no nulas, luego solo hay que probar que es acotado, y lo es porque  $\Gamma_k^2$  es no nula en como mucho  $N_0$  de los símplices del cubrimiento localmente finito  $\{S^{(i)}\}_i$ , que por hipótesis son no degenerados, luego son acotados, y unión finita de acotados en la topología usual es acotado.

El valor finito que depende de  $n$  y que acota el número de términos  $\Gamma_k^2(A)$  no nulos para cada  $A \in \mathcal{P}$  es  $N = N_0 \frac{n(n+1)}{2} n = N(n)$ .  $\square$

**Definición 2.11** (Métricas primitivas). Cada término  $\Gamma_k(A) \xi^k \otimes \xi^k$  es lo que se conoce como métrica primitiva. El término hoy en día es común, pero no fue introducido por Nash en sus artículos.

Observar que la colección de vectores  $\{\xi_k\}_k$  no depende de  $A$  pues se obtienen a partir de los autovectores de los vértices de todos los símplices del recubrimiento, pero la cota  $N_0$  no discrimina cuáles intervienen en cada  $A \in \mathcal{P}$ .

Con este resultado podemos repetir, pero esta vez con éxito, la idea de la demostración heurística planteada en la Sección 2.2.1. Lo usaremos en la siguiente proposición, de la que se deducirá inmediatamente la demostración del Teorema 2.5.

### 2.2.3. Stages: reduciendo el error métrico

En esta sección introducimos la aportación fundamental de Nash, la noción de *Stage*:

**Definición 2.12** (Stage). En la terminología de Nash, un *Stage* consiste en descomponer el error métrico dado por  $g - D^T u D u$  en métricas primitivas según el Lema 2.10 y añadir sucesivamente cada métrica primitiva en *steps* o pasos usando las perturbaciones espirales (2.4).

Dada una métrica  $g$ , denotamos  $\|g\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} \|g(x)\|$ , donde tomamos la norma de Hilbert-Schmidt  $\|g(x)\| := \sqrt{\text{tr}(g(x)^T g(x))}$ . De modo similar, si  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  tomaremos  $\|u\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} \|u(x)\|$  y  $\|Du\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} \|Du(x)\|$ .

**Proposición 2.13.** *Sea  $m \geq n + 2$  y  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una inmersión suave estrictamente corta. Para todo  $\epsilon > 0$  existe una inmersión suave estrictamente corta  $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que*

$$(2.10) \quad \|g - D\hat{u}^T D\hat{u}\|_{C^0(\Omega)} \leq \epsilon,$$

$$(2.11) \quad \|Du - D\hat{u}\|_{C^0(\Omega)} \leq C \|g - Du^T Du\|_{C^0(\Omega)}^{1/2},$$

$$(2.12) \quad \|u - \hat{u}\|_{C^0(\Omega)} \leq \epsilon.$$

*Demostración.* Sea  $h = g - Du^T Du$ , de modo que  $h \in C^\infty(\bar{\Omega}; \mathcal{P})$ . De acuerdo al lema 2.10,  $\forall x \in \bar{\Omega}$  se tiene que:

$$(2.13) \quad h(x) = \sum_k a_k^2(x) \xi^k \otimes \xi^k,$$

donde

$$a_k(x) := \Gamma_k(h(x))$$

y  $\{\xi^k\}$  es una colección de vectores en  $\mathbb{S}^{n-1}$  independiente de  $x$ .

Observar que, dado un  $x$  fijo, la suma (2.13) es finita con  $M = \frac{\tilde{N}(x)}{2} n^2 (n+1)$  términos y, para todo  $x \in \bar{\Omega}$ , la suma es finita con  $N \neq N(x)$  términos, con  $\tilde{N}$ ,  $N$  definidas como en el Lema 2.10.

Fijamos  $0 < \delta < 1/2$  y definimos la sucesión de aplicaciones  $\{u_k\}_{k=0}^N$  dada por:  $u_0 = u$  y

$$(2.14) \quad u_{k+1}(x) = u_k(x) + (1 - \delta)^{1/2} \frac{a_k(x)}{\lambda_k} \left( \sin(\lambda_k x \cdot \xi^k) \zeta_k(x) + \cos(\lambda_k x \cdot \xi^k) \eta_k(x) \right),$$

donde  $\eta_k, \zeta_k$  son funciones  $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$  que definen para cada  $x$  vectores unitarios normales a  $u_k(\bar{\Omega})$  y que dependen de la aplicación  $u_k$ , i.e. de modo que para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$\|\zeta_k(x)\|_{\mathbb{R}^m} = \|\eta_k(x)\|_{\mathbb{R}^m} = 1, \quad \zeta_k(x) \cdot \eta_k(x) = 0 \quad \text{y} \quad Du_k^T(x) \zeta_k(x) = Du_k^T(x) \eta_k(x) = 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Sabemos que están bien definidos por el Lema 2.6 y, claramente,  $u_k$  es suave. Por Corolario 2.7.1 obtenemos

$$(2.15) \quad Du_{k+1}(x)^T Du_{k+1}(x) = Du_k(x)^T Du_k(x) + (1 - \delta) a_k^2(x) \xi^k \otimes \xi^k + O\left(\frac{1}{\lambda_k}\right).$$

Iterando esta expresión, llegamos a

$$\begin{aligned} Du_N(x)^T Du_N(x) &= Du(x)^T Du(x) + (1 - \delta) \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2(x) \xi^k \otimes \xi^k + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= Du(x)^T Du(x) + (1 - \delta) h(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

con  $\lambda_k > \lambda, \forall k$ . En este punto, usando que  $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$  y que  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} K(x, \lambda)$ , con  $K$  acotada, se ve que

$$\det(Du_N(x)^T Du_N(x)) \geq \underbrace{\det(Du(x)^T Du(x))}_{=n} + \underbrace{(1 - \delta)^n \det h(x)}_{>0} + \frac{1}{\lambda^n} \det K(x, \lambda), \quad \forall x \in \Omega.$$

A priori, podría ser que  $\det K(x, \lambda) \leq 0$ , pero como  $\lambda$  actuando en  $K(x, \lambda)$  como variable lo hace dentro de funciones trigonométricas y eso está controlado, tomando  $\lambda \gg 1$  conseguimos  $\det(Du_N(x)^T Du_N(x)) > 0$  y, por tanto, que sea invertible para todo  $x$ .

Luego  $\operatorname{rg} Du_N(x) = \operatorname{rg} Du_N(x)^T Du_N(x) = n$ ,  $\forall x \in \Omega$ , i.e  $u_N$  es inmersión. Además

$$(2.16) \quad \|g - Du_N^T Du_N\|_{C^0(\Omega)} \leq \delta \|h\|_{C^0(\Omega)} + \frac{\delta^2}{2}$$

ya que, eligiendo  $\lambda$  suficientemente grande tenemos

$$\|g - Du_N^T Du_N\|_{C^0(\Omega)} = \|h - (1 - \delta)h + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\|_{C^0(\Omega)} \leq \delta \|h\|_{C^0(\Omega)} + \frac{\delta^2}{2}.$$

Deducimos también que

$$g - Du_M^T Du_M = \delta h - \frac{1}{\lambda} K > 0$$

para  $\forall x \in \Omega$  ya que  $v^T h(x)v > 0$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  y podemos tomar  $\lambda$  suficientemente como para que  $v^T \frac{1}{\lambda} K(x)v$  sea tan pequeño como queramos. Es decir, hemos probado que  $u_N$  es estrictamente corta. Además, por Lema 2.7 y (2.5)

$$\|Du_{k+1}(x) - Du_k(x)\| = \|a_k(x)B_k(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\| \leq \|a_k(x)\| + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Luego, para cualquier  $x \in \Omega$

$$\|Du_N(x) - Du(x)\| = \left\| \sum_{k=0}^{N-1} Du_{k+1}(x) - Du_k(x) \right\| \leq \sum_{k=0}^{N-1} (\|a_k(x)\| + \delta).$$

Por otro lado, como  $h$  es simétrica, se tiene que

$$\begin{aligned} \|h(x)\| &:= \sqrt{\operatorname{tr}(h(x)^T h(x))} = \sqrt{\operatorname{tr}(h(x)^2)} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{\operatorname{tr}(h(x))^2} = \operatorname{tr}(h(x)) \\ &= \sum_k a_k^2(x) \operatorname{tr}(\xi^k \otimes \xi^k) = \sum_k a_k^2(x) \|\xi^k\|^2 = \sum_k a_k^2(x). \end{aligned}$$

El paso (\*) se justifica porque  $h(x)$  es simétrica y la traza es invariante por cambio de base, luego podemos pensar en  $h(x)$  como diagonal y eso respeta mover los cuadrados. Deducimos entonces que  $\|a_k\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |a_k(x)| \leq \|h(x)\|_{C^0(\Omega)}^{1/2} = \|g - Du^T Du\|_{C^0(\Omega)}^{1/2}$ . Por tanto, se tiene que

$$(2.17) \quad \|Du_N - Du\|_{C^0(\Omega)} \leq N \|g - Du^T Du\|_{C^0(\Omega)}^{1/2} + N\delta.$$

De forma similar obtenemos

$$(2.18) \quad \|u_N - u\|_{C^0(\Omega)} \leq \delta.$$

Tomando  $\delta$  suficientemente pequeño, de (2.16), (2.17), (2.18), deducimos (2.10), (2.11), (2.12) para  $\hat{u} = u_N$  con  $C = 2N$ .  $\square$



### 2.2.4. Demostración del Teorema 2.5

Sea  $\{\epsilon_n\}_n$  una sucesión  $\epsilon_n \rightarrow 0$  tal que

$$\sum_n \epsilon_n \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \sum_k \epsilon_n^{1/2} \leq \infty.$$

Usando la Proposición 2.13, obtenemos una secuencia de funciones suaves estrictamente cortas  $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$  tal que  $u_0 = u$  y para  $n \geq 1$

$$(2.19) \quad \|g - Du_n^T Du_n\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq \epsilon_n,$$

$$(2.20) \quad \|Du_{n+1} - Du_n\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq C\epsilon_n^{1/2},$$

$$(2.21) \quad \|u_{n+1} - u_n\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq \epsilon_n.$$

Para ver esto, imaginemos que, según enuncia el Teorema 2.5 empezamos con una inmersión suave estrictamente corta  $u$ . Llamamos  $u_0 = u$ . Proposición 2.13 nos dice que  $\exists u_1$  también  $\mathcal{C}^\infty$  estrictamente corta, tal que  $\|g - Du_1^T Du_1\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq \epsilon_0$ ,  $\|Du_0 - Du_1\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq C\|g - Du_0^T Du_0\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)}^{1/2}$  y  $\|u_0 - u_1\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq \epsilon_0$ . Como  $u_1$  también está en las hipótesis de la Proposición 2.13,  $\exists u_2$  del mismo tipo tal que  $\|g - Du_2^T Du_2\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq \epsilon_1$ ,  $\|Du_1 - Du_2\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq C\|g - Du_1^T Du_1\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)}^{1/2} \leq C\epsilon_0^{1/2}$  y  $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq \epsilon_1$ . Aunque cada  $u_n$  es  $\mathcal{C}^\infty$  la sucesión  $\{u_n\}_n$  es de Cauchy en  $\mathcal{C}^1$  ya que, dado  $r > s$

$$\begin{aligned} \|u_r - u_s\|_{\mathcal{C}^1(\Omega)} &= \left\| \sum_{k=s}^r u_{k+1} - u_k \right\|_{\mathcal{C}^1(\Omega)} \leq \sum_{k=s}^r \|u_{k+1} - u_k\|_{\mathcal{C}^1(\Omega)} \\ &= \sum_{n=s}^r \|u_{n+1} - u_n\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} + \|Du_{n+1} - Du_n\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \\ &\leq \sum_{n=s}^r \epsilon_{n+1} + C\epsilon_n^{1/2} \xrightarrow{s,r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$  es de Banach, se tiene que  $u_n \rightarrow \tilde{u} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ . Finalmente, como la norma es continua, tomando el límite en (2.19) concluimos

$$(2.22) \quad D\tilde{u}^T D\tilde{u} = g, \text{ en } \Omega$$

$$(2.23) \quad \|\tilde{u} - u\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} - u_n \right\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} \leq \sum_n \epsilon_n \leq \epsilon.$$

En particular, por (2.22) tenemos que  $\tilde{u}$  es isometría. También que  $D\tilde{u}^T D\tilde{u} \in \mathcal{P}$ , luego  $\text{rg } D\tilde{u} = \text{rg } D\tilde{u}^T D\tilde{u} \stackrel{(*)}{=} n$  y concluimos que  $\tilde{u}$  es inmersión.

*Observación 2.13.1.* Para probar (\*) recordamos que  $D\tilde{u}^T D\tilde{u} = g \in \mathcal{P}$ .

Si  $A \in \mathcal{P}$ , entonces  $\ker A = \{0\}$  para  $A$  vista como aplicación lineal de espacios vectoriales  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; luego  $A$  inyectiva. Como  $\mathbb{R}^n = \text{Im } A \oplus \ker A$ , concluimos que  $A$  es biyectiva y, por tanto, invertible (i.e.  $\text{rg } A = n$ ).

### 2.3. El ajuste de Kuiper: Codimensión 1

Presentamos ahora la modificación introducida por Kuiper en 1955 y que permite rebajar la cota de la dimensión del codominio a  $m = n + 1$ . Lo haremos también en el caso local para aislar las ideas analíticas. Si recordamos, la clave para la prueba antes presentada era la construcción de las espirales, donde la perturbación se hacía a base de senos y cosenos bien planteados y dos funciones suaves  $\eta$  y  $\zeta$  ortogonales entre sí y a la imagen de  $\Omega$ . Para pasar al caso de codimensión 1 tenemos que sustituir esto por **corrugaciones**, que Kuiper denominó *strains* en su artículo. Ahora consideramos

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

una inmersión suave estrictamente corta, y sea

$$\begin{aligned} \gamma: \Omega \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto (\gamma_1(x, t), \gamma_2(x, t)) \end{aligned}$$

una familia de curvas cerradas (i.e.  $2\pi$  periódicas en  $t$ ) parametrizadas por  $x \in \Omega$ . Tomamos la corrugación

$$(2.24) \quad v(x) = u(x) + \frac{1}{\lambda} \left( \gamma_1(x, \lambda x \cdot \xi) \zeta(x) + \gamma_2(x, \lambda x \cdot \xi) \eta(x) \right),$$

donde  $\eta(x)$  es ahora el único vector normal a  $u(\Omega)$  en cada  $x$ , salvo módulo, y  $\zeta$  está por determinar.

**Lema 2.14.** *La nueva matriz Jacobiana es*

$$(2.25) \quad Dv(x) = Du(x) + \dot{\gamma}_1(\zeta(x) \otimes \xi) + \dot{\gamma}_2(\eta(x) \otimes \xi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

*Demostración.* Definamos para la prueba  $\zeta_1 = \zeta$  y  $\zeta_2 = \eta$ . Observamos que  $\gamma_k(x, \lambda x \cdot \xi) = \gamma_k(x_1, \dots, x_n, \lambda \sum_{l=1}^n x_l \xi_l)$ . Denotando  $\tilde{t} := \lambda x \cdot \xi$  podemos ver que

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_l} \underbrace{\frac{\partial x_l}{\partial x_i}}_{\delta_{li}} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x_i} = \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial \tilde{t}} \lambda \xi_i.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^j}{\partial x_i} &= \frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k \in \{1,2\}} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_k(x, \lambda x \cdot \xi) \zeta_k^j(x) + \gamma_k(x, \lambda x \cdot \xi) \frac{\partial \zeta_k^j}{\partial x_i}(x) \right) \\ &= \frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k \in \{1,2\}} \left( \left( \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial \tilde{t}} \lambda \xi_i \right) \zeta_k^j(x) + \gamma_k(x, \lambda x \cdot \xi) \frac{\partial \zeta_k^j}{\partial x_i}(x) \right) \\ &= \frac{\partial u^j}{\partial x_i} + \gamma_1 \underbrace{\xi_i \zeta_1^j(x)}_{(\zeta_1(x) \otimes \xi)_{ji}} + \gamma_2 \underbrace{\xi_i \zeta_2^j(x)}_{(\zeta_2(x) \otimes \xi)_{ji}} + \frac{1}{\lambda} K(x) \end{aligned}$$

con  $K(x) =$  combinaciones de derivadas de  $\gamma_k$  y  $\zeta_k$ , que suponemos acotadas por regularidad, y  $\dot{\gamma}_k := \frac{\partial \gamma_k}{\partial \tilde{t}}$ . □

**Corolario 2.14.1.** *La matriz del pull-back  $v^*$  e por la corrugación (2.24) será ahora:*

$$Dv^T Dv = Du^T Du + \dot{\gamma}_1 (Du^T \zeta \otimes \xi + \xi \otimes Du^T \zeta) + (\dot{\gamma}_1^2 \|\zeta\|^2 + \dot{\gamma}_2^2 + 2\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \zeta \cdot \eta) \xi \otimes \xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

*Demostración.* Denotamos  $A(x) = \dot{\gamma}_1 (\zeta(x) \otimes \xi) + \dot{\gamma}_2 (\eta(x) \otimes \xi)$ . Se tiene que

$$Dv^T Dv = Du^T Du + Du^T A + A^T Du + A^T A + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Cada sumando por separado:

$$Du^T A = \dot{\gamma}_1 (Du^T \zeta) \otimes \xi + \dot{\gamma}_2 (Du^T \eta) \otimes \xi = \dot{\gamma}_1 (Du^T \zeta) \otimes \xi.$$

$$A^T Du = (Du^T A)^T = \dot{\gamma}_1 \xi \otimes (Du^T \zeta).$$

$$\begin{aligned} A^T A &= \dot{\gamma}_1^2 (\xi \otimes \zeta)(\zeta \otimes \xi) + \dot{\gamma}_2^2 (\xi \otimes \eta)(\eta \otimes \xi) + 2\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 ((\xi \otimes \zeta)(\eta \otimes \xi) + (\xi \otimes \eta)(\zeta \otimes \xi)) \\ &= (\dot{\gamma}_1^2 \|\zeta\|^2 + \dot{\gamma}_2^2 + 2\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \zeta \cdot \eta) \xi \otimes \xi. \end{aligned} \quad \square$$

Por tanto, la elección natural para  $\zeta$  será tal que  $Du^T \zeta = \xi$ , es decir,

$$\zeta = Du(Du^T Du)^{-1} \xi$$

con lo que se tiene, en particular,  $\eta \cdot \zeta = (\eta^T Du)(Du^T Du)^{-1} \xi = 0$ , y la matriz dada por

$$Dv^T Dv = Du^T Du + (2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2^2 + \dot{\gamma}_1^2 \|\zeta\|^2) \xi \otimes \xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Una elección más astuta de los vectores da lugar a una expresión más simétrica. Tomamos

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{\|\zeta\|^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\|\zeta\|}$$

y repitiendo el proceso pero sustituyendo por estos vectores en (2.24), obtenemos

$$(2.26) \quad Dv^T Dv = Du^T Du + \frac{1}{\|\zeta\|^2} (2\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2^2 + \dot{\gamma}_1^2) \xi \otimes \xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Nos gustaría que esta expresión se pareciera lo máximo posible a (2.6), para que la prueba a partir de aquí sea igual. Por tanto, debemos escoger  $\gamma$  de modo que

- (i)  $(1 + \dot{\gamma}_1^2) + \dot{\gamma}_2^2 = \|\zeta\|^2 a^2 + 1$ ,
- (ii)  $t \mapsto \gamma(x, t)$  es  $2\pi$ -periódica.

Vemos que (i) no tiene por qué verse como una ecuación diferencial, pues para un  $x$  fijo se puede integrar directamente en  $t$ . Podemos interpretarla como una ecuación algebraica en la que  $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$  satisface la ecuación de un círculo de centro  $(-1, 0)$  y radio  $r = \sqrt{\|\zeta\|^2 a^2 + 1}$ .

También observamos que si una función  $f$  es  $2\pi$ -periódica, entonces  $\dot{f}$  tiene media 0 en  $[0, 2\pi]$ , pues  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{f} dt = \frac{1}{2\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0$ . Luego es razonable sustituir (ii) por

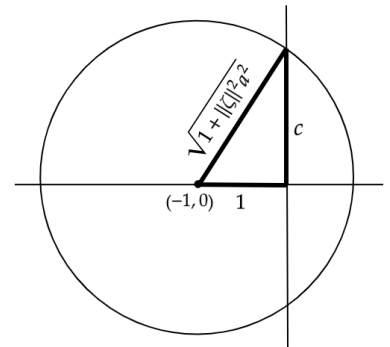


Figura 2.3

(ii')  $t \mapsto \dot{\gamma}(x, t)$  es  $2\pi$ -periódica con media 0.

Por tanto, hemos impuesto que  $\dot{\gamma}$  satisfaga una inclusión diferencial en una región de  $B_r((-1, 0)) \subset \mathbb{R}^2$ , con media 0 y que, en particular,  $(0, 0)$  pertenezca al cierre convexo de los valores de  $\dot{\gamma}$ . En la iteración de steps de la Proposición 2.13 los valores de  $a_k$  (que aquí representamos por  $a$ ) y de  $\zeta_k$  están controlados, así que lo que estamos describiendo está bien hecho en cada paso. Si nos fijamos en la Figura 2.3, por Pitágoras  $c = \|\zeta\| |a|$ . Podemos asegurar las condiciones impuestas sobre  $\dot{\gamma}$  tomando una constante  $C' > \|\zeta\|$  tal que  $\|\dot{\gamma}\| \leq C'|a|$ .

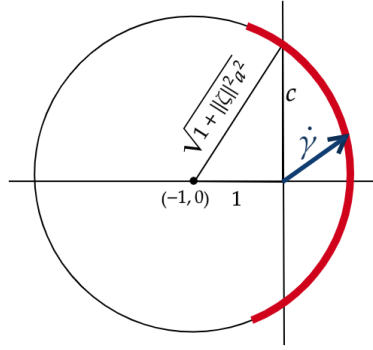


Figura 2.4: En rojo vemos la región que define la inclusión diferencial.

Supongamos que hemos construido los stages  $\{u_k\}_{k=1}^N$  según la corrugación (2.24) con la elección  $\tilde{\eta}$  y  $\tilde{\zeta}$  de vectores y un valor  $0 < \delta < 1/2$ , de modo que

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + (1 - \delta)^{1/2} \frac{1}{\lambda} \left( \gamma_{k_1}(x, \lambda x \cdot \xi^k) \tilde{\zeta}_k(x) + \gamma_{k_2}(x, \lambda x \cdot \xi^k) \tilde{\eta}_k(x) \right).$$

Puesto que  $2\gamma_1 + \gamma_2^2 + \gamma_1^2 \|\zeta\|^2 = a_k^2$ , que es el coeficiente  $k$ -ésimo en la descomposición en métricas primitivas de  $h$ , iterando (2.26) adecuadamente indexado en  $k$  se tiene de nuevo que

$$Du_N(x)^T Du_N(x) = Du(x)^T Du(x) + (1 - \delta)h(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

por lo que  $u_M$  es también una inmersión suave estrictamente corta que cumple

$$(2.27) \quad \|g - Du_N^T Du\|_{C^0(\Omega)} \leq \|h\|_{C^0(\Omega)} + \frac{\delta^2}{2}.$$

Además, la cota  $\|\dot{\gamma}(x, t)\| \leq C|a_k(x)|$ ,  $\forall x, t$  proporciona una estimación  $C^1$ . Para ello, observamos que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}_k \otimes \xi^k\| &= \text{tr}((\tilde{\eta}_k \otimes \xi^k)^T (\tilde{\eta}_k \otimes \xi^k)) = \|\tilde{\eta}_k\|^2 \text{tr}(\xi^k \otimes \xi^k) = \frac{1}{\|\zeta_k\|^2} \\ \|\tilde{\zeta}_k \otimes \xi^k\| &= \|\tilde{\zeta}_k\|^2 \text{tr}(\xi^k \otimes \xi^k) = \frac{1}{\|\zeta_k\|^2} \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\xi^k \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Por (2.25)

$$\|Du_{k+1}(x) - Du_k(x)\| \leq \frac{\|\dot{\gamma}_1\|}{\|\zeta_k\|^2} + \frac{\|\dot{\gamma}_2\|}{\|\zeta_k\|^2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{2C'\|a_k\|}{\|\zeta_k\|^2} + \delta$$

y de nuevo, tomando una suma telescópica

$$(2.28) \quad \|Du_N - Du\|_{C^0(\Omega)} \leq KN\|g - Du^T Du\|_{C^0(\Omega)}^{1/2} + N\delta$$

con  $K = 2C'/\sup\{\|\zeta_k\|^2\}$ . De forma similar, tomando  $\lambda_k \gg 1$ , obtenemos

$$(2.29) \quad \|u_N - u\|_{C^0(\Omega)} \leq \delta$$

porque  $\gamma_k$  son suaves, y por tanto acotadas.

Ahora podríamos repetir la demostración del Teorema 2.5 pero habiendo rebajado la codimensión.

## 2.4. Caso global. Variedades abstractas

Probaremos ahora el Teorema 2.2. Primero llevamos la idea introducida localmente en el abierto  $\Omega$  a la variedad global  $M$ . Sea  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  un atlas de una variedad diferenciable  $(M, g)$

$$M \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B_{r_\alpha}(0)$ . Dada una inmersión  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sea  $u^*e$  el pullback de la métrica euclídea por  $u$ . Definimos

$$h = g - u^*e.$$

Se tiene que,  $\forall p \in M$ ,  $h(p) \in \mathcal{P}$ , luego podemos descomponer  $h$  en métricas primitivas en las distintas cartas como

$$h(p) = \sum_k a_k^2(p) \xi^k \otimes \xi^k$$

con  $a_k(p) = \Gamma_k(h(p))$ . Ahora podemos definir la sucesión  $\{u_k\}_k$  como antes pero, al tratarse de funciones  $u_k: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  definidas globalmente, hay que conseguir diferenciar de alguna manera por abiertos coordenados para poder aplicar el proceso iterativo descrito en la Proposición 2.5. Para que cada perturbación sea suave en toda la variedad, tomamos una partición de la unidad  $\{\psi\}_\alpha$  asociada al cubrimiento por los abiertos coordenadas tal que  $\sum_\alpha \psi_\alpha = 1$  y  $\psi_\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(U_\alpha)$  con lo que

$$h(p) = \sum_{k,\alpha} \psi_\alpha(p) a_k^2(p) \xi^k \otimes \xi^k.$$

En este caso, cada  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$  hará las veces del  $\Omega$  del caso local, y tendremos funciones  $\eta_\alpha, \zeta_\alpha$  definidas en cada uno de estos conjuntos.

- En el caso de las espirales de Nash:

Sea  $f^k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin(\lambda_k x \cdot \xi^k)$  y  $g^k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos(\lambda_k x \cdot \xi^k)$ . Definimos  $\tilde{f}_\alpha^k(p) := f^k \circ \varphi_\alpha(p)$ ,  $\tilde{g}_\alpha^k(p) := g^k \circ \varphi_\alpha(p)$ ,  $\tilde{\zeta}_{\alpha k}(p) := \zeta_k \circ \varphi_\alpha(p)$  y  $\tilde{\eta}_{\alpha k}(p) := \eta_k \circ \varphi_\alpha(p)$ .

Para definir los Stages, tomamos  $u_0 = u$  y, para cada  $p \in M$ , dado  $U_\alpha \ni p$

$$u_{k+1}(p) = u_k(p) + (1 - \delta)^{1/2} \frac{\psi_\alpha(p) a_k(p)}{\lambda_k} \left( \tilde{f}_\alpha^k(p) \tilde{\zeta}_{\alpha k}(p) + \tilde{g}_\alpha^k(p) \tilde{\eta}_{\alpha k}(p) \right).$$

Observamos  $u_{k+1}$  es aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ .

En Geometría Diferencial, se define  $(Du)_p = (D(u \circ \varphi_\alpha^{-1}))_{\varphi_\alpha(p)} = (\partial_i(u^j \circ \varphi_\alpha^{-1}))_{\varphi_\alpha(p)}{}_{j,i}$  y  $(\partial_i u^j)_p = \partial_i(u^j \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$ .

Omitimos los índices  $k$  por claridad y usamos lo descrito a continuación para construir la sucesión. También omitimos las  $\alpha$  pero sabemos que los cálculos son locales

$$\begin{aligned} (\partial_i v^j)_p &= (\partial_i u^j)_p + (1 - \delta)^{1/2} \frac{(\partial_i \psi_\alpha a)_p}{\lambda} (\tilde{f}(p) \tilde{\zeta}^j(p) + \tilde{g}(p) \tilde{\eta}^j(p)) \\ &\quad + (1 - \delta)^{1/2} \frac{\psi_\alpha(p) a(p)}{\lambda} \left( \tilde{\zeta}^j(p) (\partial_i \tilde{f})_p + \tilde{f}(p) (\partial_i \tilde{\zeta}^j)_p + \tilde{\eta}^j(p) (\partial_i \tilde{g})_p + \tilde{g}(p) (\partial_i \tilde{\eta}^j)_p \right), \end{aligned}$$

donde

$$(\partial_i \tilde{f})_p = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} f = \cos(\lambda \varphi(p) \cdot \xi) \lambda \xi_i.$$

Por tanto,

$$\tilde{\zeta}^j(p) (\partial_i \tilde{f})_p = \cos(\lambda \varphi(p) \cdot \xi) \lambda (\tilde{\zeta}(p) \otimes \xi)_{ji}.$$

Hemos explicitado solo la parte de  $f$  y  $\zeta$  porque la de  $g$  y  $\eta$  es igual. La expresión final queda

$$(Dv)_p = (Du)_p + \psi_\alpha(p) a(p) \left( \cos(\lambda \varphi(p) \cdot \xi) \zeta(\varphi(p)) \otimes \xi - \sin(\lambda \varphi(p) \cdot \xi) \eta(\varphi(p)) \otimes \xi \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Observar que es completamente análoga a la obtenida en el Lema 2.7. O sea, que  $(Dv)_p \in \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $(Dv)_p^T (Dv)_p \in \mathcal{M}^{n \times n}(\mathbb{R})$  y todo lo estudiado anteriormente se aplica exactamente igual. Reducimos el problema a trabajar con matrices, así que volveremos a tener inmersiones, rango n...

Conseguiremos (2.10), (2.11), (2.12) en cada  $U_\alpha$  y, tomando  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0} := \sup_\alpha \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0(U_\alpha)}$ , lo tendremos globalmente.

- En el caso de las corrugaciones de Kuiper:  
Definimos  $\tilde{\gamma}(p) = \gamma \circ \varphi(p) = \gamma(\varphi(p), \lambda \varphi(p) \cdot \xi)$ .

$$\text{Por tanto, } \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \tilde{\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} \tilde{\gamma} \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} \gamma \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} \gamma.$$

La nueva perturbación cumplirá

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p v^j &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p u^j + \frac{1}{\lambda} \sum_{l \in \{1,2\}} \left( \tilde{\zeta}^j(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \tilde{\gamma}_l + \tilde{\gamma}_l(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \tilde{\zeta}^j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p u^j + \underbrace{\tilde{\gamma}_1}_{(\tilde{\zeta}_1(p) \otimes \xi)_{ji}} \tilde{\zeta}_1^j(p) + \underbrace{\tilde{\gamma}_2}_{(\tilde{\zeta}_2(p) \otimes \xi)_{ji}} \tilde{\zeta}_2^j(p) + \frac{1}{\lambda} \tilde{K}(p, \lambda). \end{aligned}$$

Es decir, es igual que (2.25) poniendo  $\varphi(p)$  en vez de  $x$ , así que obtendremos las mismas expresiones y conclusiones.

Respecto a obtener un embedding  $\tilde{u}$  si la aplicación  $u$  de la que partimos es un embedding, lo que se hace es demostrar que la perturbación espiral 2.4 o la de Kuiper 2.24 no da lugar a autointersecciones, i.e. sigue siendo inyectiva, de modo que la aplicación definida por la Proposición 2.13 es inyectiva. Con eso se prueba que la aplicación obtenida en la Sección 2.2.4 también es inyectiva. Para más detalles, véase [23] ó [9].

## CAPÍTULO 3

# Introducción al h-principio y a la Integración convexa

---

### 3.1. Introducción

La teoría clásica de relaciones diferenciales, típicamente con origen en la física, se describe normalmente por sistemas de ecuaciones que suelen estar determinados (i.e. número de funciones incógnita es igual al de ecuaciones) y, con ciertas condiciones de frontera, suelen tener solución incluso única. En geometría diferencial y topología aparecen relaciones diferenciales típicamente indeterminadas, donde el espacio de soluciones es infinito independientemente de las condiciones de frontera.

La noción de *h-principio* o *Principio de homotopía* apareció por primera vez en [11] y [14], y el término fue introducido por Mijaíl Grómov en su libro [13]. El h-principio para soluciones de relaciones diferenciales parciales exhibían una dicotomía entre suave/duro (o flexible/rígido), para problemas formulados en términos de derivadas. El fenómeno de suavidad fue descubierto por Nash en los 50s para el problema de inmersiones isométricas  $\mathcal{C}^1$  y por Smale para inmersiones diferenciales. Más adelante aparecieron nuevos problemas de tipo suave. En su tesis, y más adelante en [13], Gromov transformó las ideas de Nash y Smale en dos herramientas generales y muy poderosas para probar existencia de h-principio: el método de *continuous sheaves* (con la versión de *aproximación holonómica*) y el de *integración convexa*. El tercer método, llamado *eliminación de singularidades*, fue introducido en [14].

El objetivo de este capítulo es hacer una introducción a la integración convexa y a los principales conceptos asociados a la teoría de las relaciones diferenciales, con una definición del h-principio y del Teorema de aproximación holonómica.

## 3.2. Integración convexa en una dimensión

El germen inicial de esta teoría está en las ideas presentadas por Nash para probar el teorema de embeddings  $\mathcal{C}^1$  isométricos que hemos expuesto con detalle. En este trabajo, presentaremos una idea de la integración convexa para casos particulares y con ejemplos<sup>1</sup>, basándonos en [4].

Veremos que los ejemplos expuestos son problemas de naturaleza diferencial, no necesariamente circunscritos a la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Algunos de los conceptos presentados, como la noción de relación diferencial  $\mathcal{R}$ , son claves para un desarrollo general de la teoría y serán definidos con rigor en la Sección 3.3, dentro de la teoría relativa al Principio de homotopía.

### 3.2.1. Un primer ejemplo

Empezamos con un caso sencillo. Sea la aplicación

$$\begin{aligned} f_0: [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (0, 0, t) \end{aligned}$$

Queremos hallar  $f: [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^3$  tal que

$$(i) \quad \forall t \in [0,1], \quad |\cos(\angle(f'(t), e_3))| < \epsilon$$

$$(ii) \quad \|f - f_0\|_{\mathcal{C}^0} < \delta$$

para  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  dados.

Vemos que vale con tomar una hélice que orbite alrededor del eje vertical generado por  $e_3$ , i.e.  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (\delta \cos(2\pi Nt), \delta \sin(2\pi Nt), t)$ , donde  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  es el número de espirales. Con esto, la condición (ii) queda satisfecha. Además, tenemos

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 N^2 \delta^2}}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Recordando la fórmula del coseno  $a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos(\angle(a, b))$ , vemos que (i) también se satisface.

Este problema se puede reformular en el lenguaje que aparecerá en la Sección 3.3. Aunque cobrará sentido después, estamos pidiendo que  $J_f^1(x) = (x, f(x), f'(x)) \in \mathcal{R} \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , para  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3$ , donde  $\mathcal{R}_1 = [0,1]$  y

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3: x_1^2 + x_2^2 < \delta, x_3 \in [0,1]\} \quad (\text{Condición (ii) es que } f \text{ caiga dentro del cilindro } \mathcal{R}_2),$$

$$\mathcal{R}_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}: \left| \frac{x}{\|x\|} \cdot e_3 \right| < \epsilon\} \cup \{0\} \quad (\text{Condición (i) es que } f' \text{ caiga dentro del cono } \mathcal{R}_3).$$

Llamaremos a  $\mathcal{R}$  la relación diferencial del problema.

<sup>1</sup>Ya hemos mencionado un ejemplo de Convex integration la Sección 2.3, al estudiar  $\dot{\gamma}$  como función con media 0 que debe satisfacer una inclusión diferencial.



### 3.2.2. Un ejemplo más general

Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$  un subconjunto conexo por caminos que tomamos como la relación diferencial del problema y sea  $f_0: [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ , una aplicación tal que

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'_0(t) \in \text{IntConv}(\mathcal{R})$$

donde  $\text{IntConv}(\mathcal{R})$  denota el interior del cierre convexo de  $\mathcal{R}$ . El problema consiste en encontrar una aplicación  $f: [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$  tal que:

$$(i) \quad \forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}$$

$$(ii) \quad \|f - f_0\|_{C^0} < \delta$$

con  $\delta > 0$  fija.

Por hipótesis, la imagen de  $f'_0$  está contenida en el cierre convexo de  $\mathcal{R}$ . La idea para resolver el problema es construir  $f'$  con imagen en  $\mathcal{R}$  y tal que, en media, se parezca a la derivada de  $f_0$ . Una forma de hacerlo es que la imagen de  $f'$  dibuje una especie de muelle en el que cada arco valga en media lo mismo que un pequeño segmento de la imagen de  $f'_0$ , por lo que  $f'$  debería ir enrollándose sobre  $f'_0$ . Así, al integrar, el mapa resultante  $f$  se debería aproximar al dato  $f_0$ , y la proximidad será mayor cuanto mayor sea el número de vueltas. Formalmente, para construir  $f$  elegimos una familia continua de loops (i.e. funciones periódicas) en  $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} h: [0, 1] &\rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{R}) \\ u &\mapsto h_u \end{aligned}$$

tal que la media del loop  $h_u$  es  $f'_0(u)$ , i.e.

$$\forall u \in [0, 1], \quad \int_{[0, 1]} h_u(s) ds = f'_0(u).$$

Observar que los loops  $h_u$  vuelven a la posición inicial al completar una vuelta. Para construir el muelle que se enrolle alrededor de  $f'([0, 1])$  tomamos

$$(3.1) \quad \forall t \in [0, 1], \quad f'(t) := h_t(\{Nt\})$$

donde  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  y  $\{Nt\}$  es la parte fraccional de  $Nt$ . Es una construcción muy intuitiva porque es ir moviéndose por un loop cuyo centro se va desplazando sobre  $f'([0, 1])$ . Finalmente integramos (3.1) para obtener la solución del problema

$$f(t) := f_0(0) + \int_0^t h_u(\{Nu\}) du.$$

Decimos que  $f$  se obtiene a partir de  $f_0$  por un **proceso de integración convexa**. En el problema asumimos la existencia de la familia de loops  $\{h_u\}_{u \in [0, 1]}$ . La demostración de esto usa fuertemente el Teorema de Caratheodory anteriormente enunciado (Véase [4] sección 2).

### 3.2.3. $C^0$ -densidad

Damos ahora una definición un poco más general. Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto arco-conexo y sea  $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  una aplicación tal que  $f'_0(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$ . La referencia mencionada en el párrafo anterior garantiza la existencia de una aplicación  $C^\infty$  que llamamos  $h: I \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$  tal que

$$\forall t \in I, \quad f'_0(t) = \int_0^1 h(t, u) du.$$

Definimos, para  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\forall t \in I, \quad F(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds.$$

**Definición 3.1.** Decimos que  $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  se obtiene a partir de  $f_0$  por un proceso de integración convexa.

Por supuesto,  $F'(t) = h(t, Nt) \in \mathcal{R}$  y, por tanto,  $F$  es solución de la relación diferencial  $\mathcal{R}$ . Una propiedad clave del proceso de integración convexa es que la solución  $F$  se puede aproximar arbitrariamente al dato  $f_0$ , en lo que se conoce como  $C^0$ -densidad<sup>2</sup>.

**Proposición 3.2.** *Se tiene*

$$\|F - f_0\|_{C^0} \leq \frac{1}{N} \left( 2\|h\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{C^0} \right).$$

*Demostración.* Sea  $t \in [0, 1]$ . Tomamos  $n := [Nt]$  (la parte entera de  $Nt$ ) y definimos  $I_j = [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$  para  $0 \leq j \leq n-1$  y  $I_n = [\frac{n}{N}, t]$ . Por otro lado, escribimos

$$F(t) - f_0(0) = \sum_{j=0}^n S_j \quad \text{y} \quad f_0(t) - f_0(0) = \sum_{j=0}^n s_j$$

con  $S_j := \int_{I_j} h(v, Nv) dv$  y  $s_j := \int_{I_j} \int_0^1 h(x, u) dudx$ . Por el teorema de cambio de variables, tomando  $u = Nv - j$ , tenemos para cada  $j \in [0, n-1]$

$$S_j = \frac{1}{N} \int_0^1 h\left(\frac{u+j}{N}, u+j\right) du = \int_{I_j} \int_0^1 h\left(\frac{u+j}{N}, u+j\right) dudx.$$

Por el Teorema del valor medio

$$\|S_j - s_j\|_{\mathbb{E}^3} \leq \int_{I_j} \int_0^1 \|h\left(\frac{u+j}{N}, u+j\right) - h(x, u)\|_{\mathbb{E}^3} \leq \frac{1}{N^2} \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{C^0}.$$

La proposición se sigue entonces de las desigualdades

$$\|S_n - s_n\|_{\mathbb{E}^3} \leq \frac{2}{N} \|h\|_{C^0} \quad \text{y} \quad \|F(t) - f_0(t)\|_{\mathbb{E}^3} \leq \sum_{j=0}^n \|S_j - s_j\|_{\mathbb{E}^3}. \quad \square$$

<sup>2</sup>La  $C^0$ -densidad es exactamente lo que tenemos en el Teorema de Nash-Kuiper, donde aproximamos uniformemente una inmersión suave estrictamente corta por una inmersión isométrica  $C^1$ , de manera arbitraria

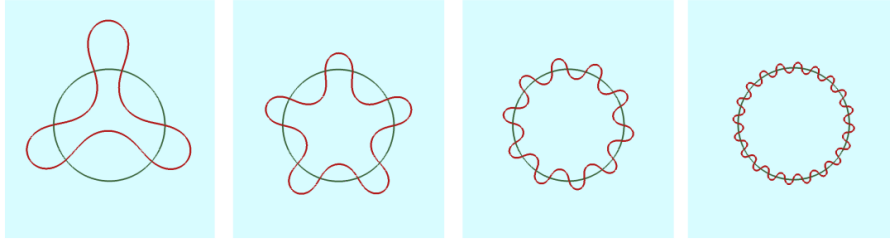


Figura 3.1: Aumento de la  $C^0$ -proximidad con  $N$ . Recuerda claramente al Teorema de Nash-Kuiper.

### 3.3. Conceptos fundamentales y definición del Principio de Homotopía

#### 3.3.1. Jets y holonomía

El primer paso para estudiar el h-principio es condensar la información sobre una función y sus derivadas de forma que se puedan analizar conjuntamente. Para eso se define el *jet* de una función.

**Definición 3.3** (r-jet). Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  una función suave, su r-jet es la función dada por

$$J_f^r(x) = (f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x))$$

donde  $f^{(k)}$  está formado por todas las derivadas parciales  $D^\alpha f$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ , escritas lexicográficamente.

**Ejemplo 1.** Dada  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , su 1-jet viene dado por

$$J_f^1(x, y) = (f^1(x, y), f^2(x, y), \partial_x f^1(x, y), \partial_x f^2(x, y), \partial_y f^1(x, y), \partial_y f^2(x, y)).$$

**Definición 3.4.** El espacio de r-jets  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$  se define como

$$J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{qd_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{qd_r}$$

donde  $d_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$  es el número de derivadas parciales de  $f$ .

Si identificamos  $f$  con su función grafo  $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$ , podemos considerar el jet de la función como la aplicación  $x \mapsto (x, J_f^r(x)) \in J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ . Aún más, si vemos  $\Gamma$  como una sección del fibrado trivial (la proyección)  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ , esto nos da la pista para generalizar la teoría: considerar secciones del fibrado trivial en vez de funciones de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^q$ , de modo que luego podamos considerar secciones de fibrados generales.

Por tanto, dada una sección  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , entendemos su jet como la aplicación

$$J_f: \mathbb{R}^n \rightarrow J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

#### Jets sobre variedades.

La construcción anterior no se puede aplicar directamente para problemas en variedades, hay que ir un poco más allá. Para ello, sean dos variedades  $V$  y  $X$  de dimensión  $n$  y  $n+q$ , respectivamente,

y sea  $f: V \rightarrow X$  una sección arbitraria de un fibrado suave  $p: X \rightarrow V$ . Dado un punto cualquiera  $v \in V$  y un entorno abierto de  $v$ , que denotamos  $Opv$  siguiendo la notación del libro de Gromov [13], podemos considerar una sección local de  $f_v: Opv \rightarrow X$  junto a una carta  $\phi: Opv \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tomamos, también, un subconjunto abierto  $U \subset X$  con  $f_v(v) \in U$ , y una trivialización local  $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ . Podemos asociar así a cada  $v \in V$  una función  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , definida como  $F = \tau \circ f_v \circ \phi^{-1}$ .

**Definición 3.5** (r-tangencia). . Dos secciones  $f, g: Opv \rightarrow X$  se dicen r-tangentes en el punto  $v$  si  $f(v) = g(v)$  y existe un entorno abierto  $U \ni f(v)$  tal que para una trivialización local  $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$

$$J_{\tau \circ f \circ \phi^{-1}}^r(v) = J_{\tau \circ g \circ \phi^{-1}}^r(v).$$

Esto define obviamente una relación de equivalencia en el espacio de secciones  $Opv \rightarrow X$ , pues la igualdad "=" lo es. Aunque no lo probaremos, se tiene por la regla de la cadena que la r-tangencia no depende de la trivialización elegida. Por tanto, podemos dar la siguiente definición.

**Definición 3.6** (Jets de variedades). Dada una sección  $f: Opv \rightarrow X$ , el r-jet de  $f$  en el punto  $v$ , denotado  $J_f^r(v)$ , es la clase de r-tangencia de  $f$  en el punto  $v$ . La sección

$$J_f^r: V \rightarrow X^{(r)}, \quad v \mapsto J_f^r(v).$$

se llama r-jet de la sección  $f$ , o r-jet extensión de  $f$ .

**Definición 3.7** (Espacio de r-jets de un fibrado). El espacio de jets,  $X^{(r)}$ , de un fibrado arbitrario  $p: X \rightarrow V$  es el espacio de r-jets de secciones  $V \rightarrow X$  i.e

$$X^{(r)} = V \times Sec(X) / \sim$$

donde  $\sim$  es la equivalencia de r-tangencia y  $Sec(X)$  el espacio de secciones del fibrado. Si  $X$  es un fibrado trivial  $V \times W \rightarrow V$  denotamos por  $J^r(V, W)$  el espacio de r-jets de las secciones.

### Holonomía.

**Definición 3.8.** Una sección  $F: V \rightarrow J^r(V, W)$  es holonómica si existe una sección  $f: V \rightarrow V \times W$  tal que  $J_f^r = F$ .

**Ejemplo 2.** Dada una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y un campo diferencial  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la aplicación  $(f, F)$  sería holonómica si existiese  $g$  tal que  $g = f$  y  $\text{grad}(g) = F$ , ya que, efectivamente,  $J_g^1 = (g, g_{x_1}, g_{x_2}, \dots) = (g, \text{grad}(g))$ .

**Definición 3.9.** Dados  $X, Y$  espacios topológicos e  $I = [0, 1]$ , una homotopía entre dos funciones  $f, g: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua  $h: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $h(x, 0) = f(x)$  y  $h(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Una difeotopía es una homotopía a nivel de difeomorfismos. Más concretamente, si  $V$  una variedad, la aplicación  $h: V \times I \rightarrow V$  se llama difeotopía en  $V$  si para todo  $t \in I$ ,  $h_t := h(\cdot, t): V \rightarrow V$  es un difeomorfismo.

Dos difeomorfismos  $f, g: V \rightarrow V$  se dicen difetópicos si existe una difeotopía  $h: V \times I \rightarrow V$  tal que  $h_0 = f$  y  $h_1 = g$ .

Una difeotopía tal que  $h_0 = id_V$  se dice  $\delta$ -pequeña si, para todo  $t \in I$

$$d(h_t(v), v) < \delta.$$

Aquí diremos que un difeomorfismo  $h$  es  $\delta$ -pequeño si existe una difeotopía  $\delta$ -pequeña tal que  $h_1 = h$ .

Equipados con la noción de  $\delta$ -pequeño, podemos enunciar uno de los resultados fundamentales del h-principio.

**Teorema 3.10** (Teorema de Aproximación Holonómica). *Sea  $A \subset V$  un poliedro de codimensión positiva y*

$$F: Op A \rightarrow X^{(r)}$$

*una sección arbitraria. Entonces, para  $\delta, \epsilon > 0$  arbitrariamente pequeños, existe un difeomorfismo  $\delta$ -pequeño (i.e. difeotópico a  $id_V$ )*

$$h: V \rightarrow V$$

*y una sección holonómica*

$$\tilde{F}: Op h(A) \rightarrow X^{(r)}$$

*tal que*

$$d(\tilde{F}(v), F(v)) < \epsilon$$

*para todo  $v \in Op h(A)$  (donde asumimos que  $Op h(A) \subset Op A$ ).*

Este teorema trata con una sección fija, pero típicamente estamos interesados en tratar familias (típicamente homotopías) de secciones, para lo cual necesitamos la siguiente versión del teorema.

**Teorema 3.11** (Teorema Paramétrico de Aproximación Holonómica). *Sea  $A \subset V$  un poliedro de codimensión positiva y*

$$F_z: Op A \rightarrow X^{(r)}$$

*una familia arbitraria de secciones parametrizada por  $z \in I^m$ , con  $m \in \mathbb{N}$ , tal que  $F_z$  es holonómica  $\forall z \in Op \partial I^m$ . Entonces, para  $\delta, \epsilon > 0$  arbitrariamente pequeños, existe una familia de difeomorfismos  $\delta$ -pequeños (i.e. difeotópicos a  $id_V$ )*

$$h_z: V \rightarrow V$$

*y una familia de secciones holonómicas*

$$\tilde{F}_z: Op h_z(A) \rightarrow X^{(r)}$$

*tal que para todo  $z \in Op \partial I^m$ , se tiene  $h_z = id_V$ ,  $\tilde{F}_z = F_z$ , y*

$$d(\tilde{F}_z(v), F_z(v)) < \epsilon$$

*para todo  $v \in Op h_z(A)$  y  $z \in I^m$  (donde asumimos que  $Op h_z(A) \subset Op A$ ).*

Estos dos teoremas son el pilar técnico del h-principio y los resultados en los que se apoyan la mayor parte de demostraciones de h-principios. Sin embargo, su demostración excede el propósito de este capítulo, en el que buscamos dar una idea de qué es el Principio de homotopía y algunos de sus resultados clave. Un ejemplo de aplicación directa de estos teoremas sería probar la existencia de h-principio en los problemas de eversión del cono y de la esfera. Véase [7].

Continuamos con los conceptos que nos permitirán dar una definición rigurosa del Principio de homotopía.

### 3.3.2. Relaciones Diferenciales

Ya hemos mencionado que las cuestiones de tipo diferencial están muy relacionadas con los jets. Estos conjuntos serán el vehículo para llevar el formalismo geométrico cartesiano de las ecuaciones algebraicas a las ecuaciones diferenciales.

**Definición 3.12.** Una relación diferencial, o condición de orden  $r$  impuesta en secciones  $f: V \rightarrow X$  de un fibrado  $X \rightarrow V$  es un subconjunto  $\mathcal{R}$  del espacio de jets  $X^{(r)}$ .

**Ejemplo 3.** Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ( $n = 1$ ) o en derivadas parciales ( $n > 1$ )

$$\psi(x, f, D^\alpha f) = 0$$

sobre las funciones desconocidas

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, q,$$

y sus derivadas

$$D^\alpha f_j = \frac{\partial^{|\alpha|} f_j}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r,$$

se puede considerar como una relación diferencial en el espacio de  $r$ -jets  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$  definida por un sistema de ecuaciones "algebraicas" (i.e. no diferenciales)

$$\psi(x, y, z_\alpha) = 0$$

donde las variables

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_q) \quad y \quad z_\alpha = (z_{1,\alpha}, \dots, z_{q,\alpha})$$

son puntos en  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ . De esta manera, cualquier sistema de ecuaciones diferenciales se puede entender como un subconjunto del espacio de jets  $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ .

**Ejemplo 4.** Sea la ecuación diferencial  $f'(x) = f(x) + x$  para una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (donde la sección que consideramos es la función grafo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). Comparando con el 1-jet de  $f$ ,  $J_f^1(x) = (x, f(x), f'(x))$ , vemos que la relación diferencial  $\mathcal{R}$  contenida en  $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$  asociada es la recta  $\{(x, y, x + y)\}$ . En el caso de la inecuación diferencial  $f'(x) \geq f(x) + x$ , la relación diferencial asociada es  $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \mid z \geq x + y\} \subset \mathbb{R}^3$ .

**Ejemplo 5.** Sean  $V$  y  $W$  variedades suaves con  $n = \dim V$  y  $q = \dim W$ . La relación de inmersión  $\mathcal{R}_{imm} \subset J^1(V, W)$  sobre cada punto  $x = (v, w) \in V \times W$  es el conjunto de monomorfismos  $T_v V \rightarrow T_w W$ .

De modo análogo se define  $\mathcal{R}_{sub}$ , relación de submersiones, tomando epimorfismos.

Un caso de especial relevancia para nosotros es  $\mathcal{R}_{iso} \subset J^1(V, \mathbb{R}^q)$ , que define las inmersiones isométricas  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

**Definición 3.13.** Una relación diferencial  $\mathcal{R}$  se dice abierta o cerrada si es abierta o cerrada como subconjunto del espacio de jets.

La distinción entre relaciones abiertas y cerradas es vital, pues influye en la capacidad de las secciones del espacio de jets de ser perturbadas y permanecer en el mismo subconjunto. Además la forma de atacar una y otra relación no es la misma, véase [5] y [6].

**Ejemplo 6.** La ecuación de Laplace  $\Delta f = 0$  define una relación diferencial cerrada y determinada en  $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . La ecuación diferencial  $\sum_{i=1}^q \dot{x}_i^2 = 1$  define una relación diferencial cerrada indeterminada en  $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ . Las relaciones  $\mathcal{R}_{imm}$  y  $\mathcal{R}_{sub}$  definen relaciones diferenciales abiertas en  $J^1(V, W)$ .

**Definición 3.14.** Cualquier sección  $F: V \rightarrow \mathcal{R} \subset X^{(r)}$  se llama *solución formal* de la relación diferencial  $\mathcal{R}$ , es decir, cualquier sección  $V \rightarrow X^{(r)}$  del espacio de jets tal que  $F(V) \subset \mathcal{R}$ .

Una *solución (genuina)* de la relación diferencial  $\mathcal{R}$  es una sección  $f: V \rightarrow X$  tal que  $J_f^r(V) \subset \mathcal{R}$ . También se define como soluciones de  $\mathcal{R}$  las secciones holonómicas  $F = J_f^r: V \rightarrow \mathcal{R}$ . A estas, las secciones holonómicas, las llamaremos *r-soluciones* o *soluciones r-extendidas* cuando no esté clara la distinción entre soluciones de  $\mathcal{R}$  como secciones de  $X$  (i.e.  $V \rightarrow X$ ) o de  $X^{(r)}$  (i.e.  $V \rightarrow X^{(r)}$ ).

Al espacio de soluciones de  $\mathcal{R}$  lo denotamos por  $Sol \mathcal{R}$ , al de r-soluciones de  $\mathcal{R}$  por  $Hol \mathcal{R}$ , y al de soluciones formales de  $\mathcal{R}$  por  $Sec \mathcal{R}$ . La r-jet extensión vista en la definición 3.6 da una correspondencia uno a uno  $J^r: Sol \mathcal{R} \rightarrow Hol \mathcal{R}$ .

### 3.3.3. El Principio de Homotopía

Cualquier relación diferencial admite una relación algebraica subyacente que consiste en sustituir las derivadas por variables independientes nuevas, y la solución de dicha relación algebraica es lo que hemos dado en llamar *solución formal*. La existencia de soluciones formales de una relación diferencial es condición necesaria para poder resolver de forma genuina  $\mathcal{R}$ , pero típicamente no es condición suficiente. Además, buscar soluciones formales simplifica demasiado la naturaleza del problema diferencial original. Por eso, fue una enorme sorpresa cuando en la segunda mitad del siglo XX se descubrió que había una gran cantidad de problemas y de relaciones diferenciales geoméricamente interesantes para los cuales la existencia de soluciones formales garantizaba como condición suficiente la existencia de soluciones genuinas del problema diferencial. A los problemas que exhiben esta propiedad, decimos que satisfacen un h-principio, y esto se formaliza de la siguiente manera:

**Definición 3.15** (Principio de Homotopía). Decimos que una relación diferencial  $\mathcal{R}$  satisface el h-principio, o que el h-principio se cumple para soluciones de  $\mathcal{R}$ , si toda solución formal de  $\mathcal{R}$  es homotópica en  $Sec \mathcal{R}$  a una solución genuina de  $\mathcal{R}$ . Es decir, toda solución formal es deformable homotópicamente a través de soluciones formales a una solución genuina.

De forma más intuitiva,  $\mathcal{R}$  satisface el h-principio si toda sección del espacio de jets cuya imagen está contenida en  $\mathcal{R}$  se puede perturbar a una sección holonómica cuya imagen sigue contenida en  $\mathcal{R}$ . Hay una versión paramétrica para familias de soluciones:

**Definición 3.16.** Decimos que  $\mathcal{R}$  satisface el h-principio uno-paramétrico si toda familia de soluciones formales  $\{f_t\}_{t \in I}$  de  $\mathcal{R}$  que une dos soluciones genuinas  $f_0$  y  $f_1$ , se puede deformar dentro de  $Sec \mathcal{R}$ , mateniendo  $f_0$  y  $f_1$  fijos, a una familia  $\{\tilde{f}\}$  de soluciones genuinas de  $\mathcal{R}$ .

La noción de h-principio es una herramienta muy poderosa para probar resultados en Matemáticas, especialmente en topología y en la teoría de ecuaciones diferenciales. La cuestión es cómo determinar si un determinado problema satisface el h-principio o no. Ocurre que para muchas relaciones

diferenciales que tienen su origen en la topología y la geometría el h-principio parece ser fundamental, aunque no se satisfaga. De hecho, la Geometría Simpléctica tiene parte importante de su origen en intentar establecer la frontera entre áreas donde se satisface el h-principio y donde no. Resulta que muchas veces se necesitan herramientas extremadamente sofisticadas para demostrar que no se satisface, cada una especialmente efectiva en determinados problemas diferenciales. Ya hemos mencionado en la introducción que como métodos generales destacan la *aproximación holonómica* y la *integración convexa*.

### 3.4. Algunos ejemplos nada triviales de aplicación de Integración convexa y del h-principio

Esta sección no pretende hacer una exposición rigurosa de los conceptos y por tanto se omitirán las demostraciones. El objetivo es dar una idea del alcance del h-principio y de la integración convexa.

Primero, es importante mencionar que existen diferentes "grados" o versiones de h-principio según nivel de proximidad que queramos establecer entre las soluciones formales y genuinas. Para una exposición detallada de los diferentes tipos de h-principio ver [10] Sección 6.2. Por coherencia con lo expuesto, destacamos el h-principio con  $\mathcal{C}^0$ -densidad y el paramétrico. Definimos este último:

**Definición 3.17.** El h-principio (multi)paramétrico se satisface en  $\mathcal{R}$  si la inclusión  $Hol(\mathcal{R}) \hookrightarrow Sec(\mathcal{R})$  es una equivalencia débil de homotopía.

Hacia mediados del siglo XX la comunidad matemática comenzó a ganar interés en los espacios de inmersiones y sus propiedades topológicas, destacando los trabajos de S. Smale, R. Thom y H. Whitney como parte clave para desarrollar la teoría de inmersiones. Más tarde, Gromov generalizó esta teoría en su libro [13]. Con la intención de asomarnos a este vasto océano, vamos a ver un par de resultados. En particular, la definición 3.17 permite resolver un problema muy interesante: la **Paradoja de Smale**. La hoja de ruta para llegar a probarla es la siguiente:

**Definición 3.18.** Un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es ample si para cada  $a \in A$ , el interior del cierre convexo de la componente conexa a la que pertenece  $a$  es  $\mathbb{R}^n$ .

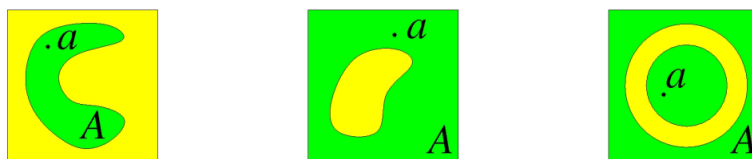


Figura 3.2: Solo el conjunto de la imagen central es ample.

Este concepto lleva a definir relaciones diferenciales ample. En particular, se prueba que  $\mathcal{R}_{imm}$  es ample y se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 3.19** (Gromov 69-73 [12]). *Sea  $\mathcal{R} \subset J^1(V, W)$  una relación diferencial abierta y ample. Entonces,  $\mathcal{R}$  satisface el h-principio paramétrico<sup>3</sup>.*

<sup>3</sup>Como se puede ver en [10] Teorema 18.4.1. una relación  $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$  abierta y ample satisface, de hecho, todas las formas de h-principio.

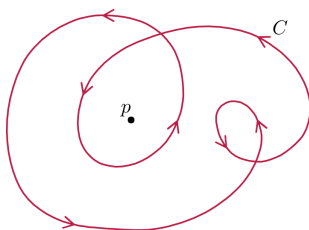


**Aplicación: Clasificación de Inmersiones de la 2-esfera.** Este teorema implica que la relación diferencial de inmersiones de una variedad  $M^n$  en  $Q^q$  satisface el h-principio paramétrico. Tomando  $M^n = \mathbb{S}^2$  y  $Q^q = \mathbb{R}^3$  se prueba que  $\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) = 0$ , donde  $I(A, B)$  denota el conjunto de inmersiones de  $A$  en  $B$ . Por tanto, hay una única clase de inmersiones de la esfera dentro de  $\mathbb{R}^3$  y, en particular, se puede lograr un eversión de la esfera por inmersiones. (Paradoja de Smale).

Otro resultado clásico es el **Teorema de Whitney-Graustein**.

**Definición 3.20.** Dos inmersiones se dicen homotópicamente regulares si existe una homotopía entre ellas de modo que  $h(\cdot, t)$  es una inmersión,  $\forall t \in [0, 1]$ .

**Definición 3.21.** Dada una inmersión  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\|f'\| = 1$ , el índice (o *winding number*)  $\gamma$  es el grado de  $f': \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , i.e. la clase de equivalencia de  $f'$  entendida como un elemento del grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ . Intuitivamente, es el número de vueltas que da la curva  $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}^2$  alrededor de un determinado punto.



**Teorema 3.22** (Teorema de Whitney-Graustein). *Existe una homotopía regular entre dos inmersiones  $f_0, f_1: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  si y solo si sus índices coinciden.*

En el lenguaje del h-principio, con  $\mathcal{R}_{imm} = \{(x, f, f') \in J^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \mid f' \neq 0\}$ , se enuncia:

**Teorema 3.23.** *Existe una homotopía formal entre soluciones genuinas de  $\mathcal{R}_{imm}$  si sus índices coinciden, y el h-principio uno-paramétrico visto en la definición 3.16 se cumple para  $\mathcal{R}_{imm} \subset J^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ .*

En [4] se estudia un **Teorema de Ghomi**:

**Teorema 3.24** (Ghomi, 2007). *Sea  $f_0 \in I(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$  una curva con función curvatura  $\kappa_0$  y sea  $c$  un número real tal que  $c > \max \kappa_0$ . Entonces, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $f_1 \in I(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$  de curvatura constante  $c$  tal que*

$$\|f_1 - f_0\|_{C^1} = \|f_1 - f_0\|_{C^0} + \|f'_1 - f'_0\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Por otro lado, en el campo de la **mecánica de fluidos** se han adaptado técnicas de integración convexa para casos de regularidad baja. En particular, se han adaptado las ideas analíticas de la demostración del Teorema de Nash-Kuiper presentada en este texto, y de este modo se han construido muchas soluciones débiles a este tipo de ecuaciones, especialmente a las **ecuaciones de Euler** incompresibles. Véase [23].

El **Teorema de Nash-Kuiper** que hemos visto con todo detalle en el Capítulo 2, actualmente también se enuncia y demuestra en el lenguaje del h-principio y la integración convexa y, de hecho,

se considera uno de los primeros ejemplos de esta teoría. Para una de demostración detallada se puede consultar [10] sección 4 o [6]. Es más, en 2012 se consiguió la primera visualización del embedding isométrico del toro plano en  $\mathbb{R}^3$  usando el h-principio y la integración convexa dentro del conocido como *Hévéa Project*, que integra a matemáticos teóricos, especialistas en numérico y expertos en computación. También han conseguido obtener una visualización de la esfera reducida. En la imagen que incluimos del toro plano se muestran diferentes niveles de corrugación que van reduciendo el error métrico.



Figura 3.3: Embedding isométrico del toro plano en  $\mathbb{R}^3$ .

# Bibliografía

---

- [1] M. F. ATIYAH AND I. G. MACDONALD. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969
- [2] D. BARDEN AND C. B. THOMAS. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press, 2003.
- [3] W. M. BOOTHBY. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, second edition, 1986.
- [4] V. BORRELLI. *One dimensional convex integration*.
- [5] V. BORRELLI. *The h-principle for ample relations*.
- [6] V. BORRELLI. *The h-principle for Isometric Embeddings*.
- [7] R. COHEN. *An introduction to Gromov's h-principle*.
- [8] S. COHN-VOSSEN. *Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen*. Nachrichten Göttingen, 1927:125–137, 1927.
- [9] C. DE LELLIS *The masterpieces of John Forbes Nash Jr.* The Abel Prize 2013-2017, Springer Verlag, Berlin, 2017.
- [10] Y. ELIASHBERG AND N. MISHACHEV. *Introduction to the h-principle*. vol. 48, A. M. S., Providence, 2002.
- [11] M. GROMOV. *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities*. ICM 1970, Nice, vol. 2, 221–225.
- [12] M. GROMOV *Convex integration of differential relations I*. Izv. Akad. Nauk SSSR 37 (1973), 329-343.
- [13] M. GROMOV. *Partial differential relations*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [14] M. GROMOV AND Y. ELIASHBERG *Removal of singularities of smooth maps*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 35(1971), 600–627.
- [15] S. GUDMUNDSSON. *An Introduction to Riemannian Geometry*.
- [16] G. HERGLOTZ. *Über die Starrheit der Eiflächen*. Abh. Math. Semin. Hansische Univ., 15:127-129, 1943.

- 
- [17] N. KUIPER. *On  $C^1$  isometric imbeddings*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58 = Indag. Math., 17:545–556, 683–689, 1955.
- [18] I. E. LEONARD AND J. E. LEWIS. *Geometry of Convex Sets*. Wiley, 2015.
- [19] J. NASH.  *$C^1$  isometric embeddings. I, II*. Ann. Math. 60, 1954.
- [20] J. NASH. *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Annals of Math. 63, 20-63, 1956.
- [21] P. PETERSEN. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 171, Springer, 1998.
- [22] D. SPRING. *Convex Integration Theory*. Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.
- [23] L. SZÉKELYHIDI. *From isometric embeddings to turbulence*.

## APÉNDICE A

# Embeddings isométricos suaves

---

Dos años después del sorprendente resultado del teorema  $\mathcal{C}^1$  (Teorema 2.2), Nash remató la cuestión resolviendo el problema de existencia de embeddings isométricos suaves en su famoso artículo [20]. Consideramos una variedad Riemanniana  $(M, g)$  de dimensión  $n$  y de clase  $\mathcal{C}^k$  con  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$ : aquí significa que la variedad diferencial es  $\mathcal{C}^\infty$  (i.e. existe un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  para  $M$ ) y que en cualquier carta los coeficientes  $g_{ij}$  del tensor métrico en coordenadas locales son funciones  $\mathcal{C}^k$ . El resultado dice lo siguiente:

**Teorema A.1** (Embedding isométrico suave de Nash). *Sea  $k \geq 3$ ,  $n \geq 1$  y  $m = \frac{n(3n+11)}{2}$ . Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana  $\mathcal{C}^k$  cerrada de dimensión  $n$ , entonces existe un embedding isométrico  $u: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  de tipo  $\mathcal{C}^k$ .*

*Observación A.1.1.* Es importante notar que que la regularidad del embedding solo depende de la regularidad de la métrica, mientras que la cota del espacio euclídeo solo depende de la dimensión de  $M$ . Es una cota superior, por supuesto hay casos particulares en los que el embedding se puede producir en dimensión menor. Lo interesante en cualquier caso es que si la métrica es suave, podemos embeber la variedad  $M$  con toda la regularidad que queramos en un espacio euclídeo a lo sumo  $\frac{n(3n+11)}{2}$ -dimensional, y esto es un punto de diferencia grande respecto al Teorema 2.2.

En [20] Nash abordó también el caso de variedades no cerradas como un corolario del Teorema A.1, pero con una cota para la codimensión más débil. En particular, afirmó la existencia de embeddings isométricos para dimensión  $m' = (n+1)m$ . Sin embargo, su demostración contiene un pequeño error: realmente probó la existencia de una inmersión isométrica, pero se puede corregir fácilmente usando las mismas ideas a costa de aumentar  $m'$ .

**Corolario A.1.1** (Embedding isométrico suave, caso no cerrado). *Sea  $k \geq 3$ ,  $n \geq 1$ ,*

$$m' = (n+1)m = (n+1)\frac{n(3n+11)}{2} \quad \text{y} \quad m'' = m' + 2n + 2.$$

*Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana  $\mathcal{C}^k$  de dimensión  $n$ , entonces existe una inmersión  $\mathcal{C}^k$   $v: M \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$  y un embedding isométrico  $\mathcal{C}^k$   $u: M \rightarrow \mathbb{R}^{m''}$ .*

La dimensión del espacio ambiente en estos teoremas se ha rebajado en posteriores trabajos de Gromov y Günther. Además, una cuestión importante es que estos teoremas hablan de existencia de embeddings isométricos, por lo que filosóficamente están más en la línea del Corolario 2.4.1,

mientras que el Teorema 2.2 nos habla de  $\mathcal{C}^0$ -densidad de embeddings isométricos en el espacio de embeddings cortos. En esta línea, Gromov y Rokhlin demostraron por primera vez que cualquier aplicación corta sobre una variedad Riemanniana compacta se puede aproximar por embeddings isométricos de clase  $\mathcal{C}^\infty$  si la dimensión del espacio euclídeo es no menor a  $\frac{n(n+1)}{2} + 4n + 5$ . Esta cota fue rebajada de nuevo por Gromov en [13] a  $\frac{n(n+1)}{2} + 4n + 3$ , y después por Günther a  $\frac{n(n+1)}{2} + \max\{2n, 5\}$ . Si  $g$  es analítica real y  $m \geq \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 3$ , entonces cualquier embedding corto a  $\mathbb{R}^m$  se puede aproximar uniformemente por embeddings isométricos analíticos. Estos teoremas se aplican también a variedades no compactas pero es más sutil.

Llevando más al extremo la cuestión de la regularidad, Jacobowitz extendió el Teorema de Nash a métricas  $\mathcal{C}^{k,\beta}$  probando la existencia de embeddings  $\mathcal{C}^{k,\beta}$ , para  $k + \beta > 2$ . Sin embargo, el caso de métricas  $\mathcal{C}^2$  es a día de hoy un problema abierto. Conviene observar que Källen mejoró los métodos de Nash para el Teorema 2.2 para demostrar la existencia de embeddings isométricos de clase  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  para  $\alpha < \frac{k+\beta}{2}$  cuando  $k + \beta \leq 2$ . Por tanto, la existencia de embeddings isométricos  $\mathcal{C}^2$  para métricas  $\mathcal{C}^2$  parece ser la última conquista.

La idea de Nash para demostrar el Teorema A.1 fue usar el método de Newton para probar la existencia de solución del sistema 2.2. Como el método estándar no converge en este sistema, porque se produce un fenómeno conocido como *pérdida de derivabilidad*, Nash usó unos operadores de suavizado definidos por convolución. Se llama método de Newton con poscondicionamiento.

## APÉNDICE B

# Producto tensorial en $\mathbb{R}^n$

---

**Definición B.1.** Sean  $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ , definimos  $a \otimes b = (a_i b_j)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Este producto tiene las siguientes propiedades:

- $(a \otimes b)^T = b \otimes a$ .
- $(a \otimes b)v = \langle b, v \rangle a$ . Razón:  
 $(a \otimes b)v = (\sum_{i=1}^m a_i b_i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_n b_i v_i)^T = (a_1 \langle b, v \rangle, \dots, a_n \langle b, v \rangle)^T = \langle b, v \rangle a$ .
- Dada  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  se tiene  $C(a \otimes b) = (Ca) \otimes b$ , ya que:  
 $C = (c_{ij}), a \otimes b = (a_i b_j), CD = (\sum_{j=1}^n c_{ij} d_{jk})_{i,k}$ , para  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , por tanto:  
 $C(a \otimes b) = (\sum_j c_{ij} a_j b_k)_{i,k} = ((Ca)_i b_k)_{i,k} = (Ca) \otimes b$ .  
 De modo similar:  $(a \otimes b)C = (C^T(b \otimes a))^T = ((C^T b) \otimes a)^T = a \otimes (C^T b)$ .
- $(a \otimes b)(c \otimes d) = \langle b, c \rangle a \otimes d$ . Se deduce de las dos anteriores.
- Si vemos a la matriz  $a \otimes b$  como aplicación lineal sobre  $\mathbb{R}^m$ , si tiene que  
 $\ker(a \otimes b) = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle b, v \rangle = 0\}$ , ya que:  
 Por definición,  $\ker(a \otimes b) = \{v \in \mathbb{R}^m : (a \otimes b)v = \langle b, v \rangle a = 0\}$ , y suponemos  $a \neq 0$ .
- $\text{tr}(a \otimes d) = \sum_{i=1}^n a_i d_i = \langle a, d \rangle$ . En particular,  $\text{tr}(a \otimes a) = \|a\|^2$ .

Sea  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathcal{E}' = \{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1,\dots,n}$  es una base trivial para el espacio de matrices  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . También se tiene que  $\{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\}_{i,j=1,\dots,n}$  es una base del espacio de matrices simétricas  $\mathbb{R}_{Sym}^{n \times n}$ .

A continuación, enunciamos un resultado muy interesante sobre la diagonalización de matrices.

**Proposición B.2.** Sea  $A \in \mathbb{R}_{Sym}^{n \times n}$  y sea  $\mathfrak{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  una base de autovectores de  $A$  con autovalores asociados  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Entonces se tiene que:

$$(B.1) \quad A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \otimes \xi_i.$$

*Demostración.* Definimos la aplicación lineal  $f : x \mapsto Ax$ . Entonces se tiene que la matriz asociada a  $f$  en la base  $\mathfrak{C}$  es  $M_{\mathfrak{C}}(f) = A$  ya que:

$$M_{\mathfrak{C}}(f) := \left( \underbrace{[f(e_1)]_{\mathfrak{C}}}_{=Ae_1}, \dots, \underbrace{[f(e_n)]_{\mathfrak{C}}}_{=Ae_n} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = A.$$

Por otro lado, es un resultado clásico de Álgebra lineal que la matriz de cambio de la base  $\mathfrak{C}$  a la base  $\mathfrak{B}$ ,  $M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} := M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}(id)$ , es una matriz ortogonal, luego  $M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}^{-1} = M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}^T$ . Además,  $M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}^{-1} = M_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$  y  $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = ([\xi_1]_{\mathfrak{C}}, \dots, [\xi_n]_{\mathfrak{C}}) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Puesto que  $\mathfrak{C}'$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , escribimos:

$$M_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

Con esto, tenemos que:

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{C}}(f) &= M_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} M_{\mathfrak{B}}(f) M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = M_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i \right) M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (M_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} e_i) \otimes (M_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}^T e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \otimes \xi_i. \end{aligned} \quad \square$$



## APÉNDICE C

# Algunos resultados más de geometría Riemanniana

---

**Definición C.1** (Cubrimiento localmente finito). Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, una colección  $\mathfrak{B}$  de subconjuntos de  $X$  se dice localmente finita en  $X$  si cada punto de  $X$  tiene un entorno que interseca con un número finito de elementos de  $\mathfrak{B}$ .

**Lema C.2.** Sea  $\{A_\alpha\}$  un cubrimiento de una variedad  $M$  de dimensión  $n$  por conjuntos abiertos. Entonces, existe un refinamiento numerable localmente finito  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  formado por entornos coordenados con  $\varphi_i(U_i) = B_3^n(0)$ , para todo  $i = 1, 2, \dots$  y tal que  $V_i = \varphi_i^{-1}(B_1^n(0)) \subset U_i$  también cubre  $M$ .

*Demostración.* Sea una base numerable de abiertos  $\{P_i\}$ ,  $\bar{P}_i$  compacto. Definimos una sucesión de conjuntos compactos  $K_1, K_2, \dots$  como sigue:  $K_1 = \bar{P}_1$  y, si suponemos  $K_1, \dots, K_i$  definidos, sea  $r$  el primer entero tal que  $K_i \subset \bigcup_{j=1}^r P_j$ . Definimos  $K_{i+1}$  como

$$K_{i+1} = \bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 \cup \dots \cup \bar{P}_r = \overline{P_1 \cup \dots \cup P_r}.$$

Se tiene que  $\overset{\circ}{K}_{i+1}$  contiene a  $K_i$ . Para cada  $i = 1, 2, \dots$ , tomamos el conjunto abierto  $(\overset{\circ}{K}_{i+2} \setminus K_{i-1}) \cup A_\alpha$ . En torno a cada  $p$  elegimos un entorno coordenado  $(U_{p,\alpha}, \varphi_{p,\alpha})$  contenido dentro del conjunto anterior y tal que  $\varphi_{p,\alpha}(p) = 0$  y  $\varphi_{p,\alpha}(U_{p,\alpha}) = B_3^n(0)$ . Sea  $V_{p,\alpha} = \varphi_{p,\alpha}^{-1}(B_1^n(0))$ , observamos que también están contenidos en  $(\overset{\circ}{K}_{i+2} \setminus K_{i-1}) \cap A_\alpha$ . Además, si dejamos variar a  $p, \alpha$ , un número finito de conjuntos de la colección  $\{V_{p,\alpha}\}$  cubre  $K_{i+1} \setminus \overset{\circ}{K}_i$ , pues este es un conjunto compacto cerrado. Denotamos a estos conjuntos  $V_{i,k}$ , con  $k$  marcando los conjuntos en esta colección finita. Para cada  $i = 1, 2, \dots$  el índice  $k$  toma un número finito de valores, por lo que la colección  $V_{i,k}$  es numerable. La reenumeramos como  $V_1, V_2, \dots$  y denotamos  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \dots$ , los entornos coordenados que los contienen. Estos últimos satisfacen las condiciones buscadas. De hecho, para cada  $p \in M$  hay un índice  $i$  tal que  $p \in \overset{\circ}{K}_{i-1}$  pero por la definición de  $U_j, V_j$  está claro que solo un número finito de estos entornos interseca con  $\overset{\circ}{K}_{i-1}$ . Por tanto,  $\{U_i\}$  y también  $\{V_i\}$  son cubrimientos localmente finitos que refinan el cubrimiento  $\{A_\alpha\}$ .  $\square$

**Definición C.3.** Llamamos al refinamiento  $(U_i, V_i, \varphi_i)$  obtenido en este lema cubrimiento regular de entornos coordenados subordinado al cubrimiento de abiertos  $\{A_\alpha\}$ .

**Definición C.4** (Partición de la unidad). Una partición de la unidad  $\mathcal{C}^\infty$  es una colección de funciones  $\{f_i\}$   $\mathcal{C}^\infty$  definidas sobre  $M$  con las propiedades siguientes:

- (i)  $f_i \geq 0$  en  $M$ .
- (ii)  $\{\text{sop}(f_i)\}$  forma un cubrimiento localmente finito.
- (iii)  $\sum_i f_i(p) = 1$  para todo  $p \in M$ .

La partición de la unidad se dice *subordinada* a un cubrimiento de abiertos  $\{A_\alpha\}$  de  $M$  si para cada  $i$ , hay un  $A_\alpha$  tal que  $\text{sop}(f_i) \subset A_\alpha$ .

**Teorema C.5.** *Asociada a cada cubrimiento regular  $\{(U_i, V_i, \varphi_i)\}$  de  $M$  hay una partición de la unidad  $\{f_i\}$  tal que  $f_i > 0$  en  $V_i = \varphi^{-1}(B_1(0))$  y  $\text{sop}(f_i) \subset \varphi_i^{-1}(\overline{B}_2(0))$ . En particular, cada cubrimiento por abiertos  $\{A_\alpha\}$  tiene una partición de la unidad subordinada.*

*Demostración.* Sea  $\tilde{g}$  una función bump en  $\mathbb{R}^n$  que vale 1 en  $\overline{B}_1(0)$  y 0 en  $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ . Definimos

$$g_i = \begin{cases} \tilde{g} \circ \varphi_i, & U_i \\ 0, & M \setminus U_i \end{cases}.$$

Es una función  $\mathcal{C}^\infty$  en  $M$ , tiene su soporte en  $\varphi^{-1}(B_2^n(0))$ , vale 1 en  $\overline{V}_i$  y no se anula nunca. De estas propiedades y del hecho de que  $\{V_i\}$  es un cubrimiento localmente finito de  $M$ , vemos que

$$f_i = \frac{g_i}{\sum_i g_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

son las funciones buscadas. □

Con estos resultados se puede demostrar el siguiente interesante teorema:

**Teorema C.6.** *Es posible definir una métrica Riemanniana  $\mathcal{C}^\infty$  en cualquier variedad Riemanniana  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Véase [3] Teorema (4.5) p. 193.