



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Las ecuaciones de Magnetohidrodinámica

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

*Autor:* Elena López

*Tutor:* Daniel Faraco

Curso 2019-2020



## Resumen

En este trabajo discutimos las ecuaciones de MHD que gobiernan los plasmas no viscosos. En particular, primero deducimos las ecuaciones de Euler y Maxwell a partir de principios físicos básicos, para luego ensamblarlas a través de la fuerza de Lorentz y la ley de Ohm, llegando a las ecuaciones de MHD para fluidos no viscosos. Después, discutimos los invariantes en los casos resistivo e ideal, interpretando topológicamente la helicidad magnética. Equipados con este conocimiento, abordamos también la famosa Teoría de Relajación de Taylor, que postula el comportamiento a largo plazo de estos sistemas, manifestando el principio físico de auto-organización. Finalmente, en los apéndices describimos dos situaciones físicas modeladas por estas ecuaciones: la fusión nuclear y las llamaradas solares.

## Abstract

In this paper we discuss the equations of MHD describing non-viscous plasmas. In particular, we first deduce Euler's and Maxwell's equations based on basic physical principles and then we put them together using Lorentz force and Ohm's law, reaching MHD equations. After that, we discuss the invariants in both resistive and ideal cases, studying the topology of magnetic helicity. With this understanding, we then address Taylor's famous theory of plasma relaxation, which postulates the long-term behavior of these systems, showing the physical principle of self-organization. Finally, in the appendices we present two physical situations modelled by these equations: nuclear fusion and coronal loops.





# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Deducción de las ecuaciones de MHD</b>	<b>3</b>
2.1	Ecuaciones de Euler, Maxwell y Ohm . . . . .	3
2.1.1	Ley de Ohm . . . . .	3
2.1.2	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	3
2.1.3	Ecuaciones de Euler . . . . .	7
2.2	Deducción de las ecuaciones de MHD . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Invariantes de MHD</b>	<b>13</b>
3.1	Leyes de conservación global en MHD resistivo . . . . .	13
3.2	Leyes de conservación global en MHD ideal . . . . .	17
3.2.1	Conservación de la masa, el momento y la energía . . . . .	17
3.2.2	Conservación de la helicidad cruzada . . . . .	18
3.2.3	Conservación de la helicidad magnética . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Relajación del plasma</b>	<b>25</b>
4.1	La teoría de la relajación del plasma de Taylor . . . . .	25
4.1.1	La teoría de Woltjer . . . . .	26
4.1.2	La teoría de Taylor . . . . .	29
4.2	Validez de la teoría de Taylor . . . . .	31
<b>A</b>	<b>Pinch de Campo Invertido</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Reconexión Magnética</b>	<b>39</b>



# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

La magnetohidrodinámica (ó MHD) es la disciplina que estudia el comportamiento de fluidos que son buenos conductores de la electricidad, en presencia de un campo magnético (a escalas macroscópicas). Algunos ejemplos de fluidos magnetizados son los metales líquidos y los plasmas; estos últimos constituyen el ejemplo canónico de fluido magnetizado. Dos regímenes de particular importancia son la física del sol (solar physics) y la fusión nuclear.

Históricamente, el estudio de la dinámica de fluidos (Euler y Navier-Stokes) y de las ondas electromagnéticas (Maxwell) siempre han sido ramas separadas. Sin embargo, la aparición de MHD cambia esto por completo. Esta disciplina surge ya entrado el siglo XX, de la mano del físico Alfvén, quien en 1942 hace una publicación en la que usa por primera vez la palabra *magnetohidrodinámica* [1]. En esta publicación, que más tarde le llevó a recibir el premio Nobel de Física en 1970, predecía la existencia de lo que llamaba *ondas de Alfvén* y sugería por primera vez que las ondas electromagnéticas podían estar sujetas a medios conductores, uniendo así la dinámica de fluidos y el electromagnetismo. No fue hasta 1958 cuando estas ondas de Alfvén se detectaron por primera vez en los laboratorios y, a partir de ese momento, la teoría de MHD comenzó a estudiarse exhaustivamente.

Matemáticamente, las ecuaciones de MHD combinan las ecuaciones de Navier-Stokes (Euler en el caso no viscoso) con las de Maxwell. El objetivo del trabajo es deducir las ecuaciones de MHD en el caso no viscoso, estudiar sus invariantes y su comportamiento a largo plazo (teoría de la relajación), y exponer algunas aplicaciones que aparecen en los apéndices.

Por tanto, en el capítulo 2, comenzamos explicando las ecuaciones de Maxwell y Euler a partir de principios físicos fundamentales (leyes de Faraday, Ohm y Ampere y conservación de la masa y el momento). Para poder ensamblar el movimiento del fluido y el campo magnético, estudiamos la fuerza de Lorentz. Por último, sobre esta base, deducimos las ecuaciones de MHD en el caso no viscoso (escogiendo viscosidad nula) con el objetivo de aligerar la notación. Lo hacemos para el caso resistivo y para el caso ideal. En este capítulo será importante el análisis dimensional.

Una vez tenemos las ecuaciones, en el capítulo 3 investigamos las invariantes de MHD, tanto para el caso resistivo como para el ideal. En este capítulo es interesan-

te observar que la complejidad de las ecuaciones proporciona nuevos invariantes. Un invariante de especial importancia es la *helicidad magnética*, que representa cómo de entrelazados están los tubos magnéticos. Este será el personaje principal de este capítulo y el siguiente, por lo que, al final de esta sección, presentamos su interpretación topológica, siguiendo la filosofía de K. Moffat.

El capítulo 4 está dedicado a la relajación del plasma. El objetivo es comprender el comportamiento de MHD a largo plazo. Para ello, el concepto clave que manejan los físicos es el de *auto-organización* de los plasmas turbulentos: estos plasmas evolucionan hacia estados de equilibrio y, en estos estados, hay ciertas propiedades que se mantienen invariantes, independientemente de cómo se haya preparado el sistema. En el contexto de MHD, se manifiesta como la *teoría de la relajación de Taylor*, teoría que no está rigurosamente verificada. En este capítulo discutimos su relación con los estados de equilibrio de MHD y los distintos argumentos que la sustentan. Este es un tema de investigación actual, y los éxitos son parciales. A día de hoy no se ha podido probar la existencia de límites de las ecuaciones resistivas que preservan la helicidad y disipan la energía [7].

Finalmente, en el primer apéndice A presentamos dos dispositivos de confinamiento magnético del plasma: el *tokamak* y el *pinch de campo invertido* (RFP). El último representa uno de los éxitos de la teoría de relajación de Taylor, por lo que nos basamos en ella para estudiar su comportamiento. Naturalmente, este apéndice es más descriptivo y no entramos en dar rigor a los argumentos físicos.

Para concluir, añadimos un apéndice B sobre el fenómeno de *reconexión magnética*, quizás el misterio más importante de la teoría de MHD, que todavía está muy lejos de ser comprendido. Sin embargo, es responsable de fenómenos bien conocidos como las llamaradas solares o las auroras boreales.

A lo largo de todo el trabajo se utilizarán una serie de identidades vectoriales que mencionamos a continuación. En ellas, se usará la siguiente notación. Siendo  $A, B, C$  campos vectoriales y  $\varphi$  un campo escalar, denotamos por  $\nabla \cdot A$  a la divergencia del campo  $A$ ,  $\nabla A$  a su matriz jacobiana y  $A \cdot \nabla$  a la derivada direccional en la dirección de  $A$ . Usamos  $\nabla\varphi$  para el gradiente de  $\varphi$  y  $A^2$  para referirnos a  $\|A\|^2$ . El producto tensorial de  $A, B$  lo denotamos por  $A \otimes B$ .

$$A \times B = -B \times A \quad (1.1)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (1.2)$$

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot (A\varphi) = \varphi(\nabla \cdot A) + A \cdot \nabla\varphi \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = (\nabla \times A) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B) \quad (1.5)$$

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B \quad (1.6)$$

$$A \times (\nabla \times B) = A \cdot \nabla B - (A \cdot \nabla)B \quad (1.7)$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A \quad (1.8)$$

$$(\nabla \times A) \times A = -\nabla(A^2/2) + (A \cdot \nabla)A \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot (A \otimes B) = A(\nabla \cdot B) + (B \cdot \nabla)A \quad (1.10)$$

## CAPÍTULO 2

# Deducción de las ecuaciones de MHD

---

En MHD, las ecuaciones que describen el comportamiento del fluido son las ecuaciones de dinámica de fluidos y las de Maxwell. Por ello, dedicaremos este capítulo a presentar estos grupos de ecuaciones y entender su significado. Una vez hecho esto, veremos algunas formas más simplificadas que pueden tomar debido a las suposiciones del régimen de MHD. Por último, una vez explicadas por completo todas las ecuaciones de las que partimos, las usaremos para deducir las ecuaciones de MHD, tanto para el caso resistivo como para el caso ideal.

### 2.1. Ecuaciones de Euler, Maxwell y Ohm

#### 2.1.1. Ley de Ohm

La ley de Ohm es una ley física que relaciona el campo eléctrico  $E$  con la densidad de corriente  $J$ . Esto se puede expresar como  $E + (u \times B)/c = R$ , donde  $R$  representa diferentes versiones de la ley de Ohm según las suposiciones que estemos haciendo.

A lo largo de este trabajo, sólo consideraremos los casos en los que  $R = \eta J$ , donde  $\eta$  es la resistividad. Esto corresponde al caso resistivo. Estudiaremos también el caso particular, y de gran importancia, en el que el fluido se considera un perfecto conductor (caso ideal), tomando su resistividad como nula, lo que hace que  $R = 0$ .

Para deducir las ecuaciones de MHD, consideraremos el caso resistivo en primer lugar, y más tarde estudiaremos el caso ideal.

#### 2.1.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son un grupo de ecuaciones diferenciales que describen el campo electromagnético  $(\vec{E}, \vec{B})$ , donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico y  $\vec{B}$  es el campo magnético. A continuación deduciremos una a una estas ecuaciones y, más adelante, daremos una versión más simplificada de ellas, que es la que nos interesará a la hora de deducir las ecuaciones de MHD.

### Deducción de las ecuaciones de Maxwell

Para deducir las ecuaciones de Maxwell, tomaremos como base varias leyes físicas bien conocidas. Sean  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica y  $\mu_0$  la permeabilidad magnética en el vacío (en otros medios cambian), relacionadas a través de la expresión  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz (en el vacío).

- **Paso 1:** Consideremos la ley de Coulomb  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ , donde  $q$  es una carga en el origen. Sea  $S_\delta = \partial B_\delta(\vec{0})$  la superficie de una esfera centrada en el origen de radio  $\delta$ . Podemos calcular

$$\int_{S_\delta} \vec{E} dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

- Si  $V$  es una región sólida compacta que no contiene al origen, entonces  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  para  $\vec{x} \neq \vec{0}$ . El teorema de Gauss (o de la divergencia) establece que  $\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ . Ahora, usando el teorema de Gauss, tenemos que  $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$ .
- Sea  $V$  es una región sólida compacta que contiene al origen. Entonces, si aplicamos lo anterior a  $V - B_\delta(\vec{0})$ , tenemos  $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_\delta} \vec{E} dS = q/\epsilon_0$ , usando 2.1.

En el caso de que haya varias cargas, sumamos los resultados correspondientes a las diferentes leyes de Coulomb, obteniendo  $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = Q/\epsilon_0$ , donde  $Q$  es la carga total dentro de  $V$ .

Supongamos que hay una densidad de carga  $\rho$ , de manera que en cada región sólida  $R$  la carga es  $\int_R \rho dR$ . Entonces, usando el teorema de Gauss, tenemos

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \implies \int_V (\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) dV = 0.$$

Imaginemos que el integrando no se anula en un punto y pongamos que, en este punto, es positivo. Como el integrando es continuo, hay un entorno positivo en el que no se anula. Entonces, la integral sobre este entorno no nulo será también no nula, lo cual es una contradicción. Por tanto, como  $V$  es arbitrario, concluimos que el integrando debe ser nulo y obtenemos así la llamada **ecuación de Poisson**:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0} \quad (2.2)$$

- **Paso 2:** Los experimentos nos sugieren que el campo magnético (en el caso estático) se comporta de forma parecida al campo eléctrico, por lo que podríamos repetir los argumentos anteriores, llegando a una especie de “ley de Coulomb para el campo magnético”:  $\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m$ , donde  $\rho_m$  es la densidad de carga magnética. Sin embargo, lo que ocurre en la realidad con el campo magnético es que las cargas parecen venir en parejas (son dipolos), lo que hace que las cargas totales sean nulas. Por tanto, con  $\rho_m = 0$  en la “ley” anterior, se obtiene la llamada **ecuación de Gauss** para el magnetismo:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad (2.3)$$

- **Paso 3:** Si movemos un imán dentro de una espira conductora ( a la que llamamos  $C$ ), las cargas circularán dando lugar a una corriente eléctrica. Cuanto más rápido movamos nuestro imán, mayor será el efecto. Entonces (para un sentido de giro negativo) vemos que se cumple que

$$\int_C \vec{E} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} dS, \quad \text{donde } C = \partial S.$$

Usando el teorema de Stokes en el término de la izquierda e introduciendo la derivada dentro de la integral en el término de la derecha,

$$\int_S \nabla \times \vec{E} dS = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} dS \implies \int_S (\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}) dS = 0.$$

De nuevo, para que esta integral sea nula, es necesario que el integrando sea nulo y, por tanto, obtenemos la ecuación conocida como la **ley de Faraday**:

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}} \quad (2.4)$$

- **Paso 4:** La ley de Ampere nos dice que “una corriente eléctrica crea un campo magnético con circulación proporcional a su intensidad”. Como la corriente eléctrica es  $\rho \vec{u}$ , donde  $\rho$  es la densidad de corriente y  $\vec{u}$  la velocidad, esto podríamos interpretarlo como

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}, \quad \text{donde } C = \partial S.$$

Usando el teorema de Stokes, obtendríamos que  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{u}$ . Sin embargo, esto contradice el principio de conservación de la carga: las cargas en una región sólida  $V$  sólo pueden perderse por la superficie frontera  $\partial V$ . Por ello, la variación de la carga en  $V$  debe estar compensada con el flujo de cargas a través de  $\partial V$ , cumpliéndose que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dS = - \int_{\partial V} \rho \vec{u} dS$$

y, por el teorema de Gauss, tenemos que  $\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \vec{u})$ .

Esto contradice a  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{u}$  (porque la divergencia del rotacional es siempre nula pero  $\rho$  puede variar con el tiempo). Para escapar de esta paradoja, lo que hizo Maxwell fue suponer que a  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{u}$  le faltaba un término  $\mathcal{M}$  (imperceptible en los experimentos), esto es,  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{u} + \mathcal{M}$ . Para que esto sea coherente con  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{0}$ , debe cumplirse que  $\nabla \cdot \mathcal{M} = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Elijiendo  $\mathcal{M} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E} / \partial t$ , obtenemos la **ley de Ampere-Maxwell**:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \rho \vec{u} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E} / \partial t} \quad (2.5)$$

Así, tenemos que las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \rho \vec{u} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones no están escritas en su forma más común, por lo que vamos a reescribirlas en términos de la velocidad de la luz. Para ello, recordemos que, en el vacío,  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$ ,  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ . Además, nos interesa sustituir  $J = \rho \vec{u}$ . Así, llegamos a:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c^2} J + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Si reescalamos el campo magnético con  $B' = B/c$ , obtenemos las ecuaciones de Maxwell (en su forma más común):

$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	(Poisson)
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	(Gauss)
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(Faraday)
$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(Ampere-Maxwell)

### Simplificación de la ecuación de Ampere-Maxwell

Ahora que ya conocemos las ecuaciones de Maxwell, vamos a dar una versión más simplificada de ellas basada en las suposiciones del régimen de MHD: consideramos velocidades no relativistas. Esto es, siendo  $c$  la velocidad de la luz y  $u$  la velocidad del plasma, en una situación normal, tenemos que  $u$  es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, luego  $u^2 \ll c^2$ . Basándonos en esta suposición, vamos a simplificar la ecuación de Ampere-Maxwell, donde al último término lo llamaremos “*corriente de desplazamiento*”. Usaremos lo siguiente:

1. Sean  $l_0$  la escala de longitud y  $t_0$  la escala de tiempo. Tenemos que  $u \sim l_0/t_0$ , luego  $1/t_0 \sim u/l_0$ .
2. Además, se tiene que  $|\nabla \times B| \sim |B|/l_0$ .



3. Recordemos que  $E = u \times B$ .

En primer lugar, consideremos la corriente de desplazamiento:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \approx \frac{1}{c^2} \frac{E}{t_0} \stackrel{1}{\approx} \frac{1}{c^2} \frac{u}{l_0} E \stackrel{3}{\approx} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{u}{l_0} \cdot |u| \cdot |B| = \frac{|u|^2}{c^2} \cdot \frac{|B|}{l_0} \stackrel{2}{\approx} \frac{|u|^2}{c^2} |\nabla \times B|. \quad (2.6)$$

Ahora, considerando la ecuación de Ampere-Maxwell 2.5 y usando lo anterior,

$$\mu_0 J = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \times B \stackrel{2,6}{\approx} -\frac{|u|^2}{c^2} |\nabla \times B| + \nabla \times B.$$

Como  $u^2 \ll c^2$ , el cociente  $|u|^2/c^2$  se hace muy pequeño y, por tanto, el término  $-\frac{|u|^2}{c^2} |\nabla \times B|$  puede ser despreciado con respecto a  $\nabla \times B$ , recuperando así la **ley de Ampere original** (que usaremos en la deducción de MHD):

$$\boxed{\mu_0 J = \nabla \times B} \quad (2.7)$$

### 2.1.3. Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler son un grupo de ecuaciones que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso. Supongamos que en tiempo  $t = 0$ , el fluido se identifica con un abierto  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$  y consideremos una partícula  $a \in \Omega_0$ . Pasado un tiempo  $t$ , el fluido se mueve hasta  $\Omega_t$ . Esto lo expresamos a través de la aplicación  $\mathcal{M}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ . A medida que el fluido se mueve, las partículas toman nuevas posiciones, de forma que en tiempo  $t$ , la partícula  $a$  tiene posición  $x = \mathfrak{X}(a, t)$ . Así es como se describe la *coordenada lagrangiana* de  $a$ . Pero el comportamiento del fluido también lo podemos estudiar en un punto  $x$  como función de tiempo  $t$ ; esta es la *coordenada euleriana*.

- **Ecuación de continuidad de masa:**  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0$

Consideremos un fluido con masa  $M(\Omega, t) = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx$ . Sabemos que la masa ni se crea ni se destruye, luego se conserva, esto es, la masa en tiempo  $t = 0$  debe ser igual a la masa en cualquier  $t$ . Esto lo podemos escribir de la siguiente forma:  $\int_{\Omega_0} \rho(a, 0) da = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx$ .

Otra manera de expresar la conservación de la masa es decir que la masa no varía con el tiempo, lo cual podemos escribir como  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = 0 \forall \Omega_t$ .

Considerando la expresión anterior, podemos hacer un cambio de coordenadas eulerianas a lagrangianas. Esto requiere introducir el jacobiano de  $\mathcal{M}_t$  como  $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}(t)$ . Así, se tiene

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho(\mathfrak{X}(a, t), t) \cdot |J| da.$$

Introduciendo la derivada dentro de la integral y usando la regla de la cadena,

$$\int_{\Omega_0} \frac{D}{Dt} (\rho(\mathfrak{X}(a, t), t) \cdot |J|) da = \int_{\Omega_0} \left( \frac{D\rho}{Dt} |J| + \rho \frac{D|J|}{Dt} \right) da.$$

Aquí, la derivada  $\frac{D}{Dt}$  denota la derivada material, definida como  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ . Se puede hallar la derivada material del determinante del jacobiano, obteniendo como resultado  $\frac{D}{Dt} |J| = (\nabla \cdot u) |J|$ . Por tanto, se tiene que

$$\int_{\Omega_0} \left( \frac{D\rho}{Dt} |J| + \rho \frac{D|J|}{Dt} \right) da = \int_{\Omega_0} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u \right) |J| da = \int_{\Omega_t} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u \right) dx.$$

Como hemos comenzado diciendo que la derivada era cero, esta última integral debe ser cero. Entonces, el integrando debe ser nulo (ya que si no lo fuera, la integral no podría ser nula, como ya se ha visto). Por tanto, llegamos a que  $D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot u = 0$ , que es la ecuación de continuidad de masa.

■ **Ecuación del momento:**  $\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{J \times B}{c} + \rho g$

Esta ecuación describe el momento de un fluido, que se define como  $\rho u$ . La ecuación del momento se deriva de la segunda ley de Newton de movimiento, la cual establece que el momento es conservado por un sistema de masas si no hay ninguna fuerza actuando en el sistema. Esto lo podemos expresar como  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho u dx = \text{fuerza}$ . Haciendo algunas transformaciones, obtenemos que  $\rho Du/Dt = \text{fuerza}$ . El segundo término corresponde a todas las fuerzas actuando en el cuerpo, tanto sobre su superficie como en el volumen. Algunos ejemplos de las fuerzas que se suelen considerar son las siguientes:

- La **presión**, actuando sobre la superficie. Obtenemos así el término  $-\nabla p$ .
- La **gravedad**,  $\rho g$ .
- La **viscosidad**,  $\nabla \cdot \sigma$ , donde  $\sigma$  es el tensor de tensión viscosa. Para nuestra deducción de las ecuaciones de MHD, vamos a ignorar la viscosidad, con el objetivo de aligerar la notación (por ello nos basamos en las ecuaciones de Euler, en vez de partir de las más generales ecuaciones de Navier-Stokes).
- La **fuerza de Lorentz**. Esta fuerza aparece cuando un fluido está cargado y viene dada por  $F = q(E + u \times B) = qE + J \times B$ , donde  $J$  es la densidad de corriente dada por  $J = qu$ ,  $u$  es la velocidad de la carga y  $q$  es la densidad de carga eléctrica del fluido.

Sin embargo, en MHD vamos a despreciar el término  $qE$ . Veamos por qué podemos hacer esto. Consideremos las ecuaciones de Ampere y Poisson y la ley de Ohm, donde ahora tendremos la densidad de carga  $q$ . Vamos a realizar un análisis dimensional.

Por un lado, de la ecuación de Poisson 2.2 tenemos

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \nabla \cdot E \sim \frac{E}{l_0} \implies E \sim \frac{l_0 q}{\epsilon_0} = l_0 \mu_0 c^2 q, \quad (2.8)$$

donde hemos usado que  $\epsilon_0 = 1/c^2 \mu_0$ .

Por otro lado, consideramos la ley de Ohm  $E + (u \times B)/c = \eta J$ . Ahora, tenemos que la resistividad  $\eta$  es inversamente proporcional a la conductividad, luego cuando la conductividad tiende a infinito, la resistividad tiende a 0 y así  $\eta \rightarrow 0$ , por lo que

$$E \approx |u| \cdot |B|. \quad (2.9)$$

Además, considerando la ley de Ampere original 2.7, tenemos que

$$J \times B = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B \approx \frac{|B|^2}{\mu_0 l_0}. \quad (2.10)$$

Usando los anteriores argumentos 2.8, 2.9, se tiene que

$$qE = q \frac{E^2}{E} \stackrel{2.8}{\approx} \frac{qE^2}{l_0 \mu_0 c^2 q} \stackrel{2.9}{\approx} \frac{q|u|^2 |B|^2}{l_0 \mu_0 c^2 q} = \frac{|u|^2 |B|^2}{l_0 \mu_0 c^2}.$$

Considerando velocidades no relativistas, esto es  $u \ll c$  (por lo que  $\frac{|u|^2}{c^2}$  se hace muy pequeño), obtenemos lo siguiente:

$$qE \approx \frac{|u|^2}{c^2} \cdot \frac{|B|^2}{\mu_0 l_0} \ll \frac{|B|^2}{\mu_0 l_0} \stackrel{2.10}{\approx} |J \times B|.$$

Por tanto, podemos despreciar el término  $qE$  respecto al término  $J \times B$ , como queríamos ver.

- **Ecuación de la energía:**  $\frac{D}{Dt} \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \nabla \cdot u = \eta J^2$ , donde  $\gamma$  es la proporción de calores específicos.

## 2.2. Deducción de las ecuaciones de MHD

Una vez conocidas las ecuaciones de Euler y Maxwell y la ley de Ohm en las versiones que queremos utilizar, vamos a ensamblarlas para deducir las ecuaciones de MHD. Así, consideremos el siguiente grupo de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{J \times B}{c} + \rho g \\ \frac{D}{Dt} \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \nabla \cdot u = \eta J^2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuaciones de Euler}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E + \frac{u \times B}{c} = \eta J \\ \partial_t B + c \nabla \times E = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ley de Ohm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times B = \frac{4\pi}{c} J \\ \nabla \cdot B = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuaciones de Maxwell}$$

- **Paso 1:** La densidad de corriente  $J$  y el campo eléctrico  $E$  están dados en términos del campo magnético y la velocidad, por lo que podemos eliminarlos del sistema. Consideremos

$$\frac{J \times B}{c} = \frac{1}{4\pi}(\nabla \times B) \times B = -\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(B \cdot \nabla)B. \quad (2.11)$$

Aquí hemos usado la ecuación de Ampere 2.7 y la identidad vectorial 1.9. Podemos ver que la fuerza generada por campo magnético  $B$  en el fluido tiene dos componentes:

- La primera componente es el gradiente de la densidad de un campo magnético.
  - La segunda componente es la fuerza de flexión de las líneas de campo. Si  $B$  es constante a lo largo de líneas del campo magnético, entonces  $B \cdot \nabla B = 0$ . Esto ocurre cuando las líneas son rectas; cualquier curvatura en el campo magnético activa esta fuerza.
- **Paso 2 (caso resistivo):** Ahora consideremos la ecuación de inducción de Faraday, la ley de Ampere y la ley de Ohm.

- Faraday:  $\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \partial_t B + c \nabla \times E = 0$
- Ohm:  $E + \frac{u \times B}{c} = \eta J \Rightarrow E = \eta J - \frac{u \times B}{c}$
- Ampere:  $\nabla \times B = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow J = \frac{c}{4\pi} \nabla \times B$

En primer lugar, introducimos la ecuación de Ohm en la ley de Faraday:

$$\partial_t B + c \nabla \times \left( \eta J - \frac{u \times B}{c} \right) = 0.$$

Ahora, reorganizando los términos, obtenemos que

$$\partial_t B - \nabla \times (u \times B) = -c\eta \nabla \times J.$$

Por último, usamos la ley de Ampere para reemplazar la corriente, obteniendo:

$$\partial_t B - \nabla \times (u \times B) = -c\eta \nabla \times \left( \frac{c}{4\pi} \nabla \times B \right) = -\nabla \times \left( \frac{c^2 \eta}{4\pi} \nabla \times B \right).$$

En consecuencia, tenemos que las ecuaciones de MHD resistiva son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u &= 0 \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times B) \times B + \rho g \\ \frac{D}{Dt} \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \nabla \cdot u &= \frac{k_\eta}{4\pi} |\nabla \times B|^2 \\ \partial_t B - \nabla \times (u \times B) &= -\nabla \times (k_\eta \nabla \times B), \text{ con } k_\eta = \frac{c^2 \eta}{4\pi} \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

- **Paso 3 (hacia el caso ideal):** La penúltima ecuación se llama ecuación de Inducción para MHD.

- Por una parte, usando la identidad 1.6 el término de la izquierda se puede escribir como

$$\nabla \times (u \times B) = -(u \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)u - (\nabla \cdot u)B + (\nabla \cdot B)u,$$

donde para el último término tenemos  $(\nabla \cdot B)u = 0$ , por la ley de Gauss.

- Por otra parte, usando 1.8, podemos escribir el término de la derecha como

$$-\nabla \times (k_\eta \nabla \times B) = -k_\eta \nabla (\nabla \cdot B) + k_\eta \nabla^2 B = k_\eta \Delta B$$

donde  $k_\eta = \frac{c^2 \eta}{4\pi}$  es el coeficiente de difusión.

Por tanto, podemos escribir la ecuación de inducción de MHD (para el caso de MHD resistiva) como

$$\partial_t B + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u + (\nabla \cdot u)B = k_\eta \Delta B. \quad (2.13)$$

- **Paso 4 (caso ideal):** Podemos estimar  $k_\eta$  usando un parámetro adimensional: el número de Reynolds magnético,  $R_m = \frac{VL}{k_\eta} = \frac{4\pi VL}{c^2 \eta}$ . El caso de números de Reynolds magnéticos grandes ( $R_m \gg 1$ ) es especialmente interesante ya que la resistividad  $\eta$  es inversamente proporcional al número de colisiones. En estos casos, la resistividad puede ignorarse, lo que da lugar a las ecuaciones ideales de MHD, en las cuales “el plasma es ideal como un fluido (cumpliendo las ecuaciones de Euler) y como un conductor (con resistividad eléctrica nula)”.

En consecuencia, tomando  $\eta = 0$ , las ecuaciones de MHD ideal nos quedan como:

$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0$	(masa)
$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times B) \times B + \rho g$	(momento)
$\frac{Dp}{Dt} + \gamma p \nabla \cdot u = 0$	(energía)
$\partial_t B - \nabla \times (u \times B) = 0$	(inducción)
$\nabla \cdot B = 0$	(Gauss) (2.14)

En este caso ideal, la ecuación de la energía (o de la presión) puede eliminarse del sistema. Esto es así debido a que se puede probar que  $p\rho^{-\gamma}$  es constante a lo largo de trayectorias lagrangianas y, entonces, se puede elegir  $p\rho^{-\gamma} = C$  como solución de la ecuación de la presión. En palabras técnicas, podemos suponer que el plasma es isentrópico (ver 3.2.2). Por ello, se podrá reemplazar la ecuación de la presión por la relación  $p = C\rho^\gamma$ .

Ahora podemos considerar dos casos distintos: cuando el fluido es compresible y cuando no lo es. Un fluido se dice compresible cuando su densidad puede variar, e incompresible si las variaciones de su densidad son despreciables.

- **Caso ideal compresible**

$$\begin{aligned}
 \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u &= 0 \\
 \rho \frac{Du}{Dt} &= -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times B) \times B + \rho g, \text{ donde } p = C\rho^\gamma \\
 \partial_t B - \nabla \times (u \times B) &= 0 \\
 \nabla \cdot B &= 0
 \end{aligned}$$

- **Caso ideal incompresible**

Por una parte, para un fluido incompresible tenemos que la densidad no varía, luego es constante (a lo largo de trayectorias lagrangianas), por lo que su derivada será cero. Entonces, usando la ecuación de masa, tenemos que  $\nabla \cdot u = 0$  (que será nuestra primera ecuación). Al ser constante, asumiremos  $\rho = 1$ .

Por otra parte, nos conviene usar dos ecuaciones que ya hemos visto: la ecuación 2.11 y la ecuación de inducción 2.13.

- Usando 2.11, la derivada material  $\frac{Du}{Dt} = \partial_t u + (u \cdot \nabla)u$ , la identidad 1.9 y dividiendo entre  $\rho$ , nos queda la segunda ecuación de la forma  $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} B \cdot \nabla B + g$ , donde hemos definido  $P = \rho^{-1}(p + B^2/8\pi)$ .
- Considerando 2.13, donde tomaremos  $k_\eta = 0$  (ya que en MHD ideal  $\eta = 0$ ),  $\nabla \cdot u = 0$  (ya que estamos en el caso incompresible), obtenemos la tercera ecuación  $\partial_t B + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u = 0$ .

Por tanto, para el caso ideal incompresible de MHD, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot u &= 0 \\
 \partial_t u + u \cdot \nabla u &= -\nabla P + \frac{1}{4\pi} B \cdot \nabla B + g \\
 \partial_t B + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u &= 0 \\
 \nabla \cdot B &= 0
 \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 3

# Invariantes de MHD

---

El régimen de MHD es especialmente interesante debido a que presenta una serie de invariantes. En este capítulo se estudiará la conservación de estas cantidades en el caso resistivo, así como las más especiales del caso ideal.

### 3.1. Leyes de conservación global en MHD resistivo

Consideremos las ecuaciones de MHD resistivo 2.12. El objetivo en esta sección es ver que este sistema conserva la masa, el momento y la energía. Consideramos una solución  $(\rho, u, p, B)$  en un dominio  $\Omega$  que satisfaga las condiciones de contorno

$$\vec{n} \cdot u|_{\delta\Omega} = 0 \text{ y } \vec{n} \cdot B|_{\delta\Omega} = 0. \quad (3.1)$$

Esto impone que el campo de velocidad y el campo magnético sean ambos tangentes a la superficie de contorno, o sea, que no haya flujo: no entra fluido ni campo magnético. En particular, la condición  $\vec{n} \cdot B|_{\delta\Omega} = 0$  impone que el dominio sea magnéticamente cerrado (la cantidad de flujo magnético atravesando la superficie es 0).

**Proposición 3.1.** Las ecuaciones de MHD resistivo 2.12, con las condiciones de contorno 3.1, cumplen las siguientes leyes de conservación global:

1. Conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx = 0.$$

2. Conservación del momento, suponiendo que el campo gravitacional es  $g = 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u dx = - \int_{\delta\Omega} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \vec{n} dS.$$

3. Conservación de la energía, suponiendo  $g = -\nabla\Phi_g$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega dx = - \frac{c}{4\pi} \int_{\delta\Omega} B \cdot (\vec{n} \times (\eta J)) dS,$$

donde  $\omega$  es la densidad de energía  $\omega = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \rho\Phi_g + \frac{|B|^2}{8\pi}$ .

*Demostración.* Consideremos las ecuaciones 2.12, con las condiciones de contorno 3.1.

1. *Conservación de la masa:* Consideremos la ecuación de continuidad de masa desarrollando la derivada material  $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$ . Integrando sobre el dominio  $\Omega$  y usando el teorema de Gauss tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho u) dx = - \int_{\delta\Omega} \rho (\vec{n} \cdot u) dS.$$

Con las condiciones de contorno, la integral es 0, luego la masa se conserva.

2. *Conservación del momento:* Consideremos la ecuación del momento con 2.7:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times B) \times B + \rho g = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} B \times (\nabla \times B) + \rho g. \quad (3.2)$$

Asumiendo conservación de masa 2.14, la derivada material de  $\rho u$  es

$$\frac{D\rho u}{Dt} = \rho \frac{Du}{dt} + u \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{Du}{dt} - u\rho(\nabla \cdot u).$$

Reorganizando los términos y desarrollando la derivada material de  $\rho u$ , se sigue:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = u\rho(\nabla \cdot u) + \frac{D\rho u}{Dt} = u\rho(\nabla \cdot u) + \partial_t(\rho u) + (u \cdot \nabla)\rho u.$$

Usando la identidad 1.10 en la expresión anterior, podemos escribir 3.2 como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u + pI) = -\frac{1}{4\pi} B \times (\nabla \times B) + \rho g,$$

Aquí, hemos usado que la divergencia de una función con valores matriciales se toma por columnas, es decir,  $\nabla \cdot M_{ij} = \left( \sum_i \partial_i M_{ij} \right)_{j=1}^n$ . Considerando las identidades 1.9, 1.10, y usando que  $\nabla \cdot B = 0$ , se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u + pI) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} B^2 \right) - \nabla \cdot (B \otimes B) \right] + \rho g.$$

Escribiendo juntas todas las divergencias y usando la suposición  $g = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = -\nabla \cdot \left[ \rho u \otimes u - \frac{B \otimes B}{4\pi} + \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) I \right].$$

Integrando sobre  $\Omega$  y usando el teorema de Gauss, tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u dx = - \int_{\delta\Omega} \vec{n} \cdot \left( \rho u \otimes u - \frac{B \otimes B}{4\pi} \right) dS - \int_{\delta\Omega} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \vec{n} dS.$$

Ahora, usando las condiciones de contorno, el primer término de la derecha se anula, obteniendo así

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u dx = - \int_{\delta\Omega} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \vec{n} dS.}$$

El término de la derecha no desaparece. Sin embargo, esta ecuación sigue expresando una conservación, ya que cualquier variación en el momento total sólo puede venir de flujos a través de la frontera. Es importante tener en cuenta que esto se cumple bajo la suposición de que  $g = 0$ ; la presencia de un campo gravitacional romperá la ley de conservación.



### 3. Conservación de la energía

Para comenzar, vamos a trabajar con las ecuaciones de continuidad de masa, momento y energía.

- En primer lugar, consideremos la ecuación de continuidad de masa y la del momento por separado:

- Por una parte, multiplicamos la ecuación de masa por  $u^2/2$ , obteniendo

$$\frac{1}{2}u^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{1}{2}u^2 (u \cdot \nabla) \rho + \frac{1}{2} \rho u^2 (\nabla \cdot u) = 0. \quad (3.3)$$

- Por otra parte, multiplicamos la ecuación del momento por  $u$  y usamos que  $g = -\nabla \Phi_g$ , con lo que obtenemos

$$\rho u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot u \cdot \nabla u = -u \cdot \nabla p + u \cdot \frac{J \times B}{c} - \rho u \cdot \nabla \Phi_g. \quad (3.4)$$

Sumando las ecuaciones 3.3 y 3.4 obtenemos:

$$\frac{1}{2}u^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 u \cdot \nabla \rho + \frac{1}{2} \rho u^2 \nabla \cdot u + \rho u \cdot \nabla u \cdot u = -u \cdot \nabla p + u \cdot \frac{J \times B}{c} - \rho u \cdot \nabla \Phi_g.$$

Usando la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\frac{1}{2} \rho u^2 u) = \frac{1}{2} \rho u^2 \nabla \cdot u + \rho u \cdot \nabla u \cdot u + \frac{1}{2} u^2 u \cdot \nabla \rho$  y sabiendo que  $\frac{1}{2} u^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho u^2)$ , se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \rho u^2) + \nabla \cdot (\frac{1}{2} \rho u^2 u) = -u \cdot \nabla p + u \cdot \frac{J \times B}{c} - \rho u \cdot \nabla \Phi_g. \quad (3.5)$$

- En segundo lugar, consideremos la ecuación de la energía desarrollando la derivada material:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{p}{\gamma - 1} u \right) + p \nabla \cdot u = \eta J^2. \quad (3.6)$$

- Por último, consideremos la ecuación de continuidad de masa de nuevo para introducirla en la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi_g) = \Phi_g \frac{\partial}{\partial t} \rho = -\Phi_g \nabla \cdot (\rho u). \quad (3.7)$$

Ahora, sumando las expresiones 3.5, 3.6 y 3.7, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \Phi_g \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \Phi_g \right) u + p u \right] = \eta J^2 + u \cdot \frac{J \times B}{c}. \quad (3.8)$$

Consideremos ahora la ecuación de inducción  $\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$ . La combinamos con la ecuación de Ohm  $E + \frac{u \times B}{c} = \eta J$ , para obtener lo siguiente:

$$c \nabla \times (\eta J) - \nabla \times (u \times B) = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Recolocando los términos y multiplicando por  $B$ , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) - B \cdot \nabla \times (u \times B) = -cB \cdot \nabla \times (\eta J).$$

Con la identidad 1.5, por una parte, tenemos que  $B \cdot \nabla \times (u \times B) = (u \times B) \cdot (\nabla \times B) + \nabla \cdot [(u \times B) \times B]$ . Por otra parte,  $B \cdot \nabla \times (\eta J) = \eta J \times (\nabla \times B) + \nabla \cdot (\eta J \times B)$ . Por tanto, podemos escribir la expresión de arriba como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) - (u \times B) \cdot (\nabla \times B) - \nabla \cdot [(u \times B) \times B] = -c\eta J \times (\nabla \times B) - c\nabla \cdot (\eta J \times B).$$

Por último, introducimos la ley de Ampere, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \left[ \left( \eta J - \frac{u \times B}{c} \right) \times B \right] = -\eta J^2 + J \cdot \frac{u \times B}{c}. \quad (3.9)$$

A continuación sumemos las dos ecuaciones que hemos obtenido 3.8 y 3.9. Usando las identidades 1.1 y 1.3, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \rho \Phi_g \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \rho \Phi_g \right) u + pu \right] \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2} \right) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \left[ \left( \eta J - \frac{u \times B}{c} \right) \times B \right] \right\} = \\ & = \left\{ \eta J^2 + u \cdot \frac{J \times B}{c} \right\} + \left\{ -\eta J^2 + J \cdot \frac{u \times B}{c} \right\}. \end{aligned}$$

Esto lo podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \nabla \cdot (\omega u + pu + P) = 0. \quad (3.10)$$

En esta ecuación,  $P = \frac{c}{4\pi} \left( \eta J - \frac{u \times B}{c} \right) \times B = \frac{c}{4\pi} E \times B$  es el “flujo de Poynting”, con el campo eléctrico expresado a través de la ley de Ohm, y  $\omega$  es la densidad de energía  $\omega = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \rho \Phi_g + \frac{|B|^2}{8\pi}$ , que incluye la energía cinética, interna, gravitacional y magnética.

Por último, tomaremos la ecuación anterior 3.10 y la integraremos sobre el dominio  $\Omega$ , usando el teorema de Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega u + pu + P) dx = - \int_{\delta\Omega} (\omega + p)(u \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\delta\Omega} P \cdot \vec{n} dS.$$

- Por una parte, la primera integral se anula usando las condiciones de contorno, ya que  $\vec{n} \cdot u|_{\delta\Omega} = 0$ .
- Por otra parte, para trabajar con la segunda integral, usaremos  $P = \frac{c}{4\pi} E \times B$ . Con esto, nos damos cuenta de que el “vector de Poynting”  $P$ , en la superficie de contorno, es proporcional a  $E \times B = \eta J \times B - B \times (B \times u) = \eta J \times B - (B \cdot u)B + B^2 u$ , usando la identidad vectorial 1.2.

Por tanto, su componente normal es proporcional a  $\vec{n} \cdot (E \times B) = \vec{n} \cdot (\eta J \times B) - (B \cdot u) \cdot (\vec{n} \cdot B) + B^2(\vec{n} \cdot u)$ . Ahora, usando la identidad vectorial 1.3, llegamos a que  $\vec{n} \cdot (E \times B) = B \cdot (\vec{n} \times (\eta J)) - (B \cdot u)(\vec{n} \cdot B) + B^2(\vec{n} \cdot u)$ . Con las condiciones de contorno  $\vec{n} \cdot u|_{\delta\Omega} = 0$  y  $\vec{n} \cdot B|_{\delta\Omega} = 0$ , los dos últimos términos se anulan, obteniendo  $\vec{n} \cdot (E \times B) = B \cdot (\vec{n} \times (\eta J))$ . Nos interesa utilizar esta última expresión poder simplificar  $\eta$  más tarde en el caso ideal.

Por tanto, usando estos dos argumentos, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega dx = -\frac{c}{4\pi} \int_{\delta\Omega} B \cdot (\vec{n} \times (\eta J)) dS}$$

El término no nulo de la derecha significa que sin añadir ninguna condición de contorno más, puede haber un flujo de energía no nulo a través de la frontera del dominio considerado. De hecho, la variación de esta energía será una disipación, ya que la derivada es negativa. Sin embargo, esta ecuación sí que muestra una ley de conservación, ya que cualquier variación en la energía total sólo puede producirse por flujos a través de la frontera.

Debemos tener en cuenta que hemos llegado a este resultado asumiendo que el campo gravitacional, si está presente, es potencial, es decir,  $g = -\nabla\Phi_g$ .  $\square$

## 3.2. Leyes de conservación global en MHD ideal

Consideremos ahora las ecuaciones de MHD ideal 2.14. En este caso, vamos a ver que se mantienen las cantidades conservadas en el caso resistivo, puesto que el caso ideal es en realidad un caso particular del caso resistivo en el cual la resistividad  $\eta = 0$ . Además, va a haber propiedades adicionales que sólo ocurren en este caso: la conservación de la helicidad cruzada y la helicidad magnética. De nuevo, consideramos un dominio  $\Omega$  que satisfaga las condiciones de contorno  $\vec{n} \cdot u|_{\delta\Omega} = 0$  y  $\vec{n} \cdot B|_{\delta\Omega} = 0$  (dominio magnéticamente cerrado).

### 3.2.1. Conservación de la masa, el momento y la energía

Como ya hemos probado en la sección anterior, en MHD resistivo aparecen la masa, el momento y la energía como invariantes. En esta sección estudiamos lo que ocurre en el régimen ideal.

**Proposición 3.2.** Las ecuaciones de MHD ideal 2.14, con las condiciones de contorno 3.1, satisfacen las siguientes leyes de conservación:

- **Conservación de la masa:**  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx = 0$
- **Conservación del momento:**  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u dx = - \int_{\delta\Omega} \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \cdot \right) \vec{n}$ , con  $g = 0$ .

- **Conservación de la energía:**  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega dx = 0$ , con  $\omega = \text{energía}$  y  $g = -\nabla\Phi_g$ .

*Demostración.* Consideremos las ecuaciones de MHD ideal 2.14. Como estas ecuaciones se obtienen imponiendo  $\eta = 0$  en las ecuaciones resistivas 2.12 y en la proposición 3.1 se ha visto la conservación de masa, momento y energía, imponiendo esta condición en esa proposición se obtienen directamente estos resultados.  $\square$

### 3.2.2. Conservación de la helicidad cruzada

La helicidad cruzada describe cómo se entrecruzan las líneas magnéticas y las líneas del campo de velocidades; viene dada por

$$H_c = \int_{\Omega} u \cdot B dx.$$

**Observación 1.** Un plasma isentrópico es aquel que satisface  $\rho^{-1}\nabla p = \nabla h$ , para una función  $h$  a la que se llama “entalpía por unidad de masa”. Para conseguir que esto sea así, tomamos  $p = C\rho^\gamma$  como solución de la ecuación de la presión. Tenemos entonces:

$$\rho^{-1}\nabla p = C\gamma\rho^{\gamma-2}\nabla\rho = \nabla h(\rho), \quad (3.11)$$

donde  $h(\rho) = \int^{\rho} C\gamma r^{\gamma-2} dr = \frac{C\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}$ . Es decir, tomamos  $\nabla h(\rho) = \nabla p/\rho$ . En el caso de un fluido compresible, esto será no nulo; sin embargo, si el fluido es incompresible, las ecuaciones de Euler implican que tanto la densidad  $\rho$  como la presión  $p$  son constantes, y en este caso simplemente tendremos  $\nabla h = 0$ .

**Proposición 3.3.** Consideremos las ecuaciones de MHD ideal 2.14, con las condiciones de contorno 3.1. Supongamos que el campo gravitacional es potencial, esto es,  $g = -\nabla\Phi_g$ , y el plasma isentrópico. Las ecuaciones conservan la helicidad cruzada.

*Demostración.* Consideremos la ecuación del momento  $\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{J \times B}{c} + \rho g$  y supongamos que  $g = -\nabla\Phi_g$  y que el plasma es isentrópico. Primero, usando que  $g = -\nabla\Phi_g$ , multiplicando por  $1/\rho$  y desarrollando la derivada material, tenemos

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\rho^{-1}\nabla p + \frac{J \times B}{\rho c} - \nabla\Phi_g.$$

Ahora usamos la identidad vectorial 1.9, con lo que

$$\partial_t u - u \times \nabla \times u = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(u^2/2 + \Phi_g) + \frac{J \times B}{\rho c}.$$

Ahora, si el fluido es incompresible,  $\nabla p = 0$ ; si es compresible, usamos 3.11:

$$\partial_t u - u \times \nabla \times u = -\nabla h(\rho) - \nabla(u^2/2 + \Phi_g) + \frac{J \times B}{\rho c}.$$

Podemos definir  $\chi := h(\rho) + u^2/2 + \Phi_g$  (y, en el caso de que el fluido sea incompresible, tomamos  $\chi := u^2/2 + \Phi_g$ ) con lo que la ecuación queda de la forma:

$$\boxed{\partial_t u = u \times \nabla \times u - \nabla \chi + \frac{J \times B}{\rho c}} \quad (3.12)$$

El objetivo que tenemos es ver que la helicidad cruzada se conserva, esto es, que su derivada se anula. Por ello, consideramos la derivada de la helicidad y, usando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot B dx = \int_{\Omega} (B \cdot \partial_t u + u \cdot \partial_t B) dx.$$

Podemos reescribir el integrando usando la ecuación 3.12 para el primer término y la ecuación de inducción para el segundo término:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot B dx = \int_{\Omega} \left[ B \cdot (u \times \nabla \times u) - B \cdot \nabla \chi + B \cdot \frac{J \times B}{\rho c} + u \cdot \nabla \times (u \times B) \right] dx.$$

Por una parte, el tercer término de este integrando se anula, por ortogonalidad entre  $B$  y  $J \times B$ . Por otra parte, usamos la identidad vectorial 1.5. Con esto, escribimos el término de la derecha como:

$$\int_{\Omega} \left[ B \cdot (u \times \nabla \times u) - B \cdot \nabla \chi + (\nabla \times u) \cdot (u \times B) - \nabla \cdot (u \times (u \times B)) \right] dx.$$

Ahora, como  $\nabla \cdot B = 0$ , usando 1.4 se tiene que  $\nabla \cdot (B\chi) = B \cdot \nabla \chi$ , luego:

$$\int_{\Omega} \left[ B \cdot (u \times \nabla \times u) - \nabla \cdot (B\chi) + (\nabla \times u) \cdot (u \times B) - \nabla \cdot (u \times (u \times B)) \right] dx.$$

Usando la identidad vectorial 1.3 tenemos que  $B \cdot (u \times \nabla \times u) = (u \times \nabla) \cdot (u \times B)$ , lo que nos permite transformar la expresión anterior a:

$$\int_{\Omega} \left[ (u \times \nabla) \cdot (u \times B) - \nabla \cdot (B\chi) + (\nabla \times u) \cdot (u \times B) - \nabla \cdot (u \times (u \times B)) \right] dx.$$

Como por 1.1 se tiene que  $(\nabla \times u) \cdot (u \times B) = -(u \times \nabla) \cdot (u \times B)$ , vemos que el primer y tercer término del integrando se cancelan, quedando la expresión como:

$$\int_{\Omega} \left[ -\nabla \cdot (B\chi) - \nabla \cdot (u \times (u \times B)) \right] dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[ B\chi + u \times (u \times B) \right] dx.$$

Ahora, usando el teorema de Gauss, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot B dx = - \int_{\delta\Omega} \left[ B\chi + u \times (u \times B) \right] \cdot \vec{n} dS.$$

Para poder usar las condiciones de contorno, transformamos esta ecuación con la identidad 1.2, llegando a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot B dx = - \int_{\delta\Omega} \left\{ B\chi \cdot \vec{n} + \left[ (u \cdot B)u - u^2 B \right] \cdot \vec{n} \right\} dS.$$

Por último, aplicando las condiciones de contorno, vemos que todos los términos se anulan, por lo que, bajo las condiciones establecidas, la helicidad cruzada se conserva,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \cdot B dx = 0} \quad \square$$

### 3.2.3. Conservación de la helicidad magnética

#### Interpretación topológica de la helicidad magnética

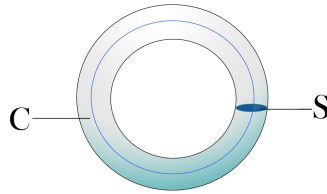
La helicidad magnética describe el comportamiento topológico de las líneas magnéticas. Si consideramos el campo magnético  $B$ , que tiene divergencia cero, entonces existe un potencial vector  $A$  tal que  $B = \nabla \times A$ . Esto nos permite definir la helicidad magnética como

$$H_m = \int_{\Omega} A \cdot B dx.$$

En principio, la helicidad depende explícitamente de la elección del potencial  $A$ . Este no es único, ya que se pueden hacer transformaciones de Gauge  $A + \nabla\varphi$ . Sin embargo, debido a que el dominio es magnéticamente cerrado,  $H_m$  es invariante a transformaciones de Gauge (ver observación 2).

El significado de la helicidad está íntimamente ligado a la topología de las líneas de campo magnético. Para estudiarla, se puede hacer una aproximación de la integral que define la helicidad magnética dividiendo el campo magnético en tubos de flujo.

**Definición 3.4.** Un *tubo de flujo* es un volumen cilíndrico, cuyos bordes están determinados por las líneas magnéticas, que tiene un flujo constante  $\phi$ . Podemos describirlo como  $S \times C$ , donde  $S$  es una superficie y  $C$  es una curva, como se muestra en el dibujo.



Al aproximar la helicidad magnética por tubos de flujo, cada uno de ellos tendrá un flujo magnético  $\phi_i$  dado por  $\phi_i = \int_{S_i} B \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S_i} A \cdot dl$ . Esto es así porque, usando el teorema de Stokes, se tiene que

$$\phi_i = \int_{S_i} B \cdot \vec{n} dS = \int_{S_i} B d\vec{S} = \int_{S_i} \nabla \times A d\vec{S} = \oint_{\partial S} A \cdot dl.$$

Una propiedad fundamental que presentan los tubos de flujo es que mantienen su integridad en MHD ideal (no se rompen ni hay reconexión entre ellos).

**Proposición 3.5. (Frozen-in law).** En MHD ideal, el flujo magnético a través de cualquier elemento que se mueva con el plasma es una cantidad conservada (se mantiene constante).

*Demostración.* Consideremos un flujo magnético  $\phi$ , a través de una superficie  $S$ , con frontera  $\delta S = L$ , que se mueve con el plasma:

$$\phi = \int_S B \cdot d\vec{S}.$$

La variación de  $\phi$  con el tiempo tiene dos partes: una que se debe a la variación de  $B$  sobre la superficie  $S$  y otra que se debe al movimiento de  $L$ .

- La primera se puede escribir como:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = - \int_S \nabla \times E \cdot dS,$$

donde hemos usado que para MHD ideal, la ley de Faraday se puede expresar como  $\nabla \times E = -\partial_t B$ .

- Si  $dl$  es un elemento de  $L$ , entonces  $u \times dl$  es el area arrastrado por  $dl$  por unidad de tiempo. De esta forma, el flujo que atraviesa este area es  $B \cdot u \times dl$ , por lo que la segunda parte se puede describir como:

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \oint_L B \cdot u \times dl = \oint_L B \times u \cdot dl = \int_S \nabla \times (B \times u) \cdot dS,$$

donde en la última integral se ha usado el teorema de Stokes.

Por tanto, la variación de  $\phi$  con el tiempo viene dada por:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} = - \int_S \nabla \times (E + u \times B) \cdot dS = - \oint_L (E + u \times B) \cdot dl,$$

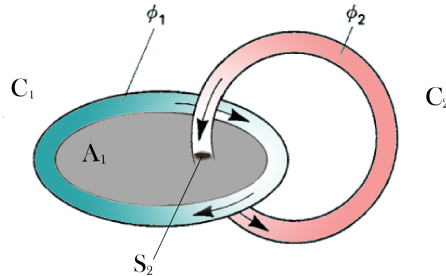
donde hemos usado el teorema de Stokes en la última integral. Ahora, en MHD ideal, se tiene que  $E + u \times B = 0$ , por lo que obtenemos que  $d\phi/dt = 0$ .  $\square$

**Corolario 3.6.** Supongamos que en un momento inicial, en un plasma en las condiciones de MHD ideal hay un tubo de flujo. Entonces, el campo magnético es tal que se mantiene la integridad del tubo de flujo en todo momento.

Este resultado se sigue de la proposición anterior. Será útil en el capítulo 4.

En general, la helicidad tiene dos contribuciones: la helicidad interna asociada a los giros y torsiones de tubos individuales y la helicidad externa asociada a los enlaces entre tubos. Para entenderlo mejor, estudiemos dos casos particulares.

**-Caso particular 1:** Consideremos dos tubos de flujo que siguen dos curvas cerradas  $C_1, C_2$  (que encierran superficies  $A_1, A_2$ ) con flujos magnéticos  $\phi_1, \phi_2$  (atravesando las superficies  $S_1$  y  $S_2$ ), volúmenes  $V_1, V_2$ , y que están entrelazados una vez.



- Para el primer tubo,  $V_1 = S_1 \times C_1$ , tenemos  $BdV = B \cdot \vec{n} dS dl = \phi_1 dl$ . Entonces,

$$K_1 = \int_{V_1} A \cdot BdV = \phi_1 \oint_{C_1} A \cdot dl.$$

Esta última integral es la integral de línea sobre la curva  $C_1$ . Usando el teorema de Stokes, esta es equivalente a integrar  $\nabla \times A$  sobre la superficie encerrada por la curva  $C_1$ , que hemos llamado  $A_1$ . Al estar enlazados los tubos, el segundo tubo corta esta superficie: el corte es precisamente la superficie  $S_2$ . Entonces, la integral sobre la superficie  $A_1$  se reduce a la integral sobre la superficie  $S_2$ . Luego se tiene que

$$\oint_{C_1} A \cdot dl = \int_{A_1} \nabla \times A dS = \int_{S_2} \nabla \times A dS = \int_{S_2} BdS = \phi_2.$$

Por tanto, para el primer tubo, tenemos que

$$K_1 = \phi_1 \oint_{C_1} A \cdot dl = \phi_1 \phi_2.$$

- De forma similar, para el segundo tubo se tiene que

$$K_2 = \int_{V_2} A \cdot BdV = \phi_2 \int_{C_2} A \cdot dl = \phi_1 \phi_2.$$

Si los tubos no hubiesen estado entrelazados, entonces las integrales de línea serían nulas y, por tanto,  $K_1$  y  $K_2$  también. Si los tubos hubiesen estado entrelazados más de una vez, digamos,  $N$  veces, entonces tendríamos  $K_1 = K_2 = \pm N \phi_1 \phi_2$ , donde el signo corresponde al sentido del enlace.

**-Caso particular 2:** También podemos considerar un tubo que no esté enlazado con ningún otro tubo, que puede estar o no retorcido, que sigue una curva  $C$  y cuyo flujo es  $\phi$ . Entonces, en este caso tendremos que

$$K = \int_V A \cdot BdV = \phi \oint_C A \cdot dl.$$

Si el tubo no presenta nudos ni está retorcido, entonces la integral de línea será nula. Pero si el tubo presenta nudos (cruces), entonces esta integral de línea será  $T\phi$ , donde  $T$  es el número de cruces del tubo, con signo positivo o negativo dependiendo de cómo sea el cruce. Por ejemplo, para un nudo de trébol (que no esté retorcido), se tiene que  $K = 3\phi^2$ , ya que hay tres cruces positivos.





**Observación 2.** *A lo largo de esta sección hemos trabajado bajo la suposición de que el dominio es magnéticamente cerrado. Esto nos permite hacer una transformación de Gauge  $\hat{A} = A + \nabla\varphi$  sin que afecte a la helicidad magnética. Veamos por qué esto es así.*

*Si hacemos esta transformación de Gauge, la helicidad magnética es*

$$H_m = \int_{\Omega} (A + \nabla\varphi)B dx = \int_{\Omega} AB dx + \int_{\Omega} (\nabla\varphi)B dx.$$

*Por 1.4, sabemos que  $\nabla \cdot (\varphi B) = (\nabla\varphi) \cdot B + (\nabla \cdot B)\varphi$ , luego integrando sobre  $\Omega$*

$$\int_{\Omega} (\nabla\varphi) \cdot B dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi B) dx - \int_{\Omega} (\nabla \cdot B)\varphi dx = 0.$$

*Por una parte, en la segunda integral del término de la derecha hemos usado que  $\nabla \cdot B = 0$ , por lo que se anula. Por otra parte, en la primera integral del término de la derecha, hemos utilizado el teorema de Gauss y que el dominio es cerrado magnéticamente, por lo que se anula también.*

*Así, vemos que, si el dominio es magnéticamente cerrado, para cualquier transformación que hagamos, la helicidad magnética no cambia. Sin embargo, físicamente esto no siempre es cierto. Por ejemplo, en tokamaks es cierto (es cierto para dominios cerrados toroidales) pero en la corona solar no. Entonces, ¿qué pasa si el campo no es magnéticamente cerrado? En este caso, la helicidad magnética depende de la transformación de Gauge elegida, lo cual plantea un problema en la definición que hemos dado de helicidad magnética. Es un tema de investigación actual ver cuál es la definición correcta de helicidad magnética. Un intento de resolver este problema es lo que se llama helicidad magnética relativa. Sin embargo, esta presenta peores propiedades de conservación, y no nos centraremos en ella en este trabajo.*

### Prueba de la conservación de la helicidad magnética

**Proposición 3.7.** Las ecuaciones de MHD ideal 2.14, con las condiciones de contorno 3.1, conservan la helicidad magnética en regímenes no turbulentos (soluciones regulares).

*Demostración.* Comencemos considerando la ecuación de inducción

$$\partial_t B - \nabla \times (u \times B) = 0. \quad (3.13)$$

Podemos considerar la ecuación de inducción para MHD resistiva 2.12, o sea, incluyendo la resistividad  $\eta$  y, más tarde, hacer que esta sea nula:

$$\partial_t B - \nabla \times (u \times B) = -\nabla \times (k_\eta \nabla \times B).$$

Esto lo podemos escribir en términos del vector potencial  $A$ , donde  $B = \nabla \times A$ :

$$\partial_t (\nabla \times A) - \nabla \times (u \times (\nabla \times A)) = -\nabla \times (k_\eta \nabla \times (\nabla \times A)).$$

Juntando todos los rotacionales, la expresión queda de la forma

$$\nabla \times (\partial_t A - u \times \nabla \times A + k_\eta \nabla \times \nabla \times A) = 0.$$

Esto implica que, al menos localmente, existe una función escalar  $\chi$  tal que  $\partial_t A - u \times \nabla \times A + k_\eta \nabla \times \nabla \times A = \nabla \chi$ . Ahora, como estamos estudiando el caso ideal, usando que  $\eta = 0$ , tenemos

$$\partial_t A - u \times \nabla \times A = \nabla \chi. \quad (3.14)$$

Para demostrar que la helicidad magnética se conserva, nuestro objetivo es ver que su derivada es nula. Introduciendo la derivada en la integral y usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A \cdot B dx = \int_{\Omega} (A \cdot \partial_t B + B \cdot \partial_t A) dx.$$

El primer término del integrando lo podemos escribir de otra forma usando la ecuación de inducción 3.13; lo mismo ocurre con el segundo término usando la ecuación 3.14. Así, la integral queda de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} [A \cdot \nabla \times (u \times B) + B \cdot (u \times \nabla \times A) + B \cdot \nabla \chi] dx.$$

Usando 1.5, tenemos que  $A \cdot \nabla \times (u \times B) = (u \times B) \cdot (\nabla \times A) - \nabla \cdot (A \times (u \times B))$ . La integral queda entonces como:

$$\int_{\Omega} \left\{ [(\nabla \times A) \cdot (u \times B) - \nabla \cdot (A \times (u \times B))] + B \cdot (u \times \nabla \times A) + B \cdot \nabla \chi \right\} dx.$$

Escribiéndolo en términos de  $B$  con  $\nabla \times A = B$ , se tiene:

$$\int_{\Omega} \left\{ [B \cdot (u \times B) - \nabla \cdot (A \times (u \times B))] + B \cdot (u \times B) + B \cdot \nabla \chi \right\} dx.$$

El primer y tercer términos del integrando se anulan. Además, para el cuarto término se tiene que  $B \cdot \nabla \chi = \nabla \cdot B \chi$ , ya que  $\nabla \cdot B = 0$ . Así, la derivada de la helicidad magnética queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A \cdot B dx = - \int_{\Omega} \left\{ \nabla \cdot [A \times (u \times B) - B \chi] \right\} dx.$$

Ahora, usando el teorema de Gauss y utilizando la identidad vectorial 1.2, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A \cdot B dx = - \int_{\partial \Omega} [(A \cdot B)u - (A \cdot u)B - B \chi] \cdot \vec{n} dS.$$

Por último, aplicando las condiciones de contorno, se anulan todos los términos, obteniéndose que la derivada de la helicidad magnética es nula y, en consecuencia, que la helicidad magnética se conserva:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A \cdot B dx = 0} \quad \square$$

## CAPÍTULO 4

# Relajación del plasma

---

En las últimas décadas se han realizado numerosos experimentos en los que se observa que, bajo determinadas condiciones, un plasma ligeramente turbulento evoluciona de forma natural hacia un estado preferencial de equilibrio, que presenta una especie de orden. En muchos casos, la estructura de estos estados se mantiene casi invariante en experimentos distintos: sus propiedades son independientes de la forma en que se haya preparado el sistema. Este fenómeno se conoce como *auto-organización*.

Esta auto-organización ha sido muy estudiada en experimentos con plasmas, en particular en el intento de construir un reactor de fusión nuclear. Así, se ha observado en distintos dispositivos que el campo magnético tiende a evolucionar hacia unos pocos estados preferenciales que son independientes de las condiciones iniciales. Algunos de estos dispositivos son el *Reversed Field Pinch (RFP)* (ver Apéndice A) y el tokamak. La aparición de la auto-organización en estos dispositivos es conocida como *relajación del plasma* [Taylor, 1974]. En esta teoría, Taylor defiende que el campo magnético estacionario tiende a minimizar la energía a largo plazo, manteniendo la helicidad magnética constante. La principal justificación para la teoría de Taylor la dio él mismo en 1974, cuando conjeturó que la helicidad magnética se conserva “aproximadamente” para resistividades muy bajas (en el límite ideal  $\mu, \nu \rightarrow 0$ ).

En el capítulo anterior hemos demostrado matemáticamente que en el régimen de MHD ideal, las soluciones suaves conservan la energía total y la helicidad magnética. Sin embargo, hay evidencia experimental que muestra que en regímenes turbulentos (resistividades pequeñas) la energía se disipa pero la helicidad magnética no, siendo esta más robusta. Matemáticamente, se ha probado recientemente que existen soluciones ideales que preservan la helicidad magnética y disipan energía [7] y se ha verificado que la helicidad magnética se preserva en el límite de resistividad tendiendo a cero [6].

### 4.1. La teoría de la relajación del plasma de Taylor

Antes de que Taylor propusiera su teoría de la relajación, se enunciaron otras teorías que consideraban otros invariantes. Una de ellas es la teoría de Woltjer. Este descubrió muchos más invariantes, los llamados *Woltjer constraints*. Sin embargo, estos pierden sentido en el régimen turbulento. El problema del punto de vista de Woltjer

es que conduce a un problema variacional, cuya solución depende de las condiciones iniciales, lo que se contradice con la auto-organización.

En esta sección discutimos los invariantes de Woltjer y la correspondiente solución al problema. Después, probamos que, si la teoría de relajación de Taylor es cierta (algo que no está demostrado), el campo magnético de equilibrio es un campo de Beltrami.

#### 4.1.1. La teoría de Woltjer

Woltjer creía que la helicidad magnética de cada línea magnética era un invariante para soluciones regulares en un perfecto conductor. Así, en el año 1958 publicó su demostración al respecto, en la que definía los llamados *Woltjer constraints* (restricciones de Woltjer).

**Definición 4.1.** Sea  $A$  un vector potencial del campo magnético  $B$  (i.e.  $B = \nabla \times A$ ). Consideremos un tubo de flujo con volumen  $V_l$  y superficie  $S_l$  para cualquier  $0 < l < \infty$  (como en la descripción de 3.2.3), y tal que en el borde del tubo se tiene que  $B \cdot \vec{n} = 0$ . Los *Woltjer constraints* se definen como las integrales

$$K_l = \int_{V_l} A \cdot B dV, \quad l=1,2,\dots,\infty.$$

**Proposición 4.2.** Consideremos el conjunto de Woltjer constraints  $K_l$  para  $l=1,\dots,\infty$ , con  $A$  el vector potencial del campo magnético y  $V_l$  el volumen de cada tubo de flujo, magnéticamente cerrado. Entonces, en un fluido que sea un perfecto conductor, cada  $K_l$  es un invariante de MHD ideal.

*Demostración.* Consideremos un fluido que sea un perfecto conductor (régimen de MHD ideal). Tomemos la derivada respecto al tiempo de  $K_l$  para cualquiera de los  $l$ ; queremos ver que la derivada se anula. Por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{dK_l}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_l} A \cdot B dV = \int_{V_l} [\partial_t A \cdot B + A \cdot \partial_t B] dV. \quad (4.1)$$

Por una parte, considerando la última ecuación de MHD ideal 2.14, tenemos que  $\partial_t B = \nabla \times (v \times B) = -\nabla \times E$ . Escribiendo esto en términos del vector potencial  $A$ , tenemos  $\nabla \times (\partial_t A + E) = 0$ . Entonces, existe  $g(x, t)$  tal que  $\partial_t A + E = \nabla_x g(x, t)$ .

Definamos ahora la transformación de Gauge  $A' = A - \int_0^t \nabla_x g(x, s) ds$ . Esto implica que  $\nabla \times A' = \nabla \times A = B$  y que  $\partial_t A' = \partial_t A - \nabla_x g(x, t)$ . Por tanto, tenemos que

$$\partial_t A' + E = \partial_t A + E - \nabla_x g(x, t) = \nabla_x g(x, t) - \nabla_x g(x, t) = 0$$

Así, vemos que  $\partial_t A' = -E$ . Como esto vale para cualquier transformación de Gauge, se tiene que  $\partial_t A = -E$ .

Por otra parte, permitimos que la superficie del tubo de flujo se mueva con una velocidad  $v$ . Cuando tenemos una integral sobre un volumen al que le permitimos moverse, supongamos  $V(t)$ , la derivada de esta integral nos queda de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} dS.$$

Usando esto, podemos reescribir la integral de 4.1 como

$$\frac{dK_l}{dt} = - \int_{V_i} E \cdot B dV - \int_{V_i} A \cdot \nabla \times E dV + \oint_{S_i} (A \cdot B) v \cdot n dS.$$

Por la identidad vectorial 1.4 se tiene que

$$\frac{dK_l}{dt} = - \int_{V_i} E \cdot B + \int_{V_i} \left[ - E \cdot \nabla \times A + \nabla \cdot (A \times E) \right] dV + \oint_{S_i} (A \cdot B) v \cdot n dS.$$

Ahora usamos  $B = \nabla \times A$  en el primer término de la segunda integral. Para el segundo término de esa misma integral, aplicamos el teorema de Gauss, obteniendo una integral de línea:

$$\frac{dK_l}{dt} = -2 \int_{V_i} E \cdot B + \oint_{S_i} \left[ (A \times E) \cdot n + (A \cdot B)(v \cdot n) \right] dS. \quad (4.2)$$

Como estamos suponiendo que el plasma es un perfecto conductor, esto es, con resistividad  $\eta = 0$ , tenemos la ecuación  $E = -v \times B + \nabla\phi$ . Además, habíamos dicho que  $B \cdot n = 0$  en la frontera. Usando esto, llegamos a:

$$\frac{dK_l}{dt} = -2 \int_{V_i} B \cdot \nabla\phi dV - \oint_{S_i} (\nabla\phi \times A) \cdot n dS.$$

Por una parte, el primer término de la derecha se puede escribir como:

$$\int_{V_i} B \cdot \nabla\phi dV = \int_{V_i} \left[ \nabla \cdot (\phi B) - \phi \nabla \cdot B \right] dV = \oint_{S_i} \phi B \cdot n dS = 0.$$

Por otra parte, el segundo término se puede escribir como:

$$\oint_{S_i} (\nabla\phi \times A) \cdot n dS = \int_{V_i} \nabla \cdot (\nabla\phi \times A) dV = \int_{V_i} B \cdot \nabla\phi dV = 0.$$

Así, obtenemos que  $\frac{dK_l}{dt} = 0$  y, por tanto, queda demostrado que los  $K_l$  son invariantes en un plasma perfectamente conductor. Este resultado depende sólo de las suposiciones  $n \cdot B = 0$  y  $E = -v \times B + \nabla\phi$ .  $\square$

La teoría de Woltjer presentaba un problema. Debido a un principio físico, es sabido que un sistema que esté aislado tiende a un estado de mínima energía potencial. Un ejemplo de un sistema que cumple esta condición es un plasma con un campo magnético no nulo, cuyo borde es un perfecto conductor eléctrico. El problema es que, si se estudia la evolución de este sistema de MHD ideal, tratando de minimizar la energía potencial

$$W = \int_{V_0} \left( \frac{B^2}{8\pi} + \frac{p}{\gamma - 1} \right) dV$$

con respecto a los  $K_l$ , las soluciones dependerán de las condiciones iniciales, lo que contradice la auto-organización.

Se puede demostrar [Freidberg, 1987] que el procedimiento de minimización con respecto a los infinitos invariantes de Woltjer es equivalente a minimizar  $W$  sin restricciones bajo la asunción de MHD ideal (por lo que decir que la energía potencial se minimiza mientras los  $K_l$  se mantienen constantes es equivalente a la suposición de MHD ideal, y viceversa).

**Proposición 4.3.** Consideremos un sistema de MHD ideal en el que la energía interna es mucho menor que la energía magnética  $\beta = p/B^2 \ll 1$ . La minimización de la energía potencial en el régimen de MHD ideal lleva a campos de Beltrami

$$\nabla \times B = \mu(r)B.$$

*Demostración.* En primer lugar, como asumimos que  $\beta = p/B^2 \ll 1$ , esto nos permite reducir la minimización de  $W$  a la minimización de sólo la energía magnética.

Imaginemos un desplazamiento infinitesimal del plasma, al que llamamos  $\xi$ . Este desplazamiento debe ser arbitrario y el campo magnético debe cumplir las condiciones de MHD ideal (es decir, debe satisfacer  $\nabla \cdot B = 0$  y  $E = -v \times B + \nabla\phi$ ). Vamos a estudiar el efecto que tiene este desplazamiento sobre el campo magnético  $B$ .

El desplazamiento da lugar a una velocidad  $v = \partial\xi/\partial t$ . Entonces, usando que  $\partial B/\partial t = -\nabla \times E$  y que  $E = -v \times B + \nabla\phi$ , tenemos que  $\delta B/\delta t = \nabla \times ((\delta\xi/\delta t) \times B)$ . Argumentando “a lo físico”, podemos cancelar las  $\delta t$ , obteniendo

$$\delta B = \nabla \times (\delta\xi \times B).$$

Tomando la divergencia, esto implica que  $\nabla \cdot \delta B = 0$ .

Usando lo anterior, podemos minimizar la energía magnética (igualando a cero la variación de energía)

$$\delta W = \int_{V_0} B \cdot \nabla \times (\delta\xi \times B) dV = \int_{V_0} \delta\xi \cdot (B \times \nabla \times B) dV.$$

Aquí hemos usado que las identidades 1.1 y 1.3 para ver que  $B \cdot \nabla \times (\delta\xi \times B) = -B \cdot \delta\xi \times (\nabla \times B) = -\delta\xi \cdot \nabla \times B \times B = \delta\xi \cdot (B \times \nabla \times B)$ . Como el desplazamiento es arbitrario, tenemos que

$$\delta W = 0 \iff B \times \nabla \times B = 0 \iff \nabla \times B = \mu(r)B.$$

Así, el resultado de la minimización de la energía magnética es que, para un plasma con energía interna despreciable, el estado relajado presenta campos magnéticos dados por campos de Beltrami

$$\nabla \times B = \mu(r)B. \quad \square$$

Los campos de la proposición anterior nos indican que  $\mu$  es constante a lo largo de los tubos de flujo, pero puede ser distinto para distintos tubos de flujo o líneas magnéticas. (Aquí, hemos tomado la divergencia y usado que  $\nabla \cdot B = 0$ ).

Pero recordemos que en un fluido sin resistividad, los tubos de flujo mantienen su integridad en todo momento (*frozen-in law*). Podemos darnos cuenta de que cuando

se prepara el sistema, hay un valor  $\mu$  asociado a cada tubo de flujo en el estado inicial. Como los tubos de flujo deben mantener su integridad (no pueden romperse ni haber reconexión) en un fluido perfectamente conductor y  $\mu$  debe permanecer constante a lo largo de cada tubo de flujo, entonces la función  $\mu(r)$  depende de la forma en que fue preparado el sistema y, por ello, de las condiciones iniciales. Pero esto es una contradicción, ya que, como hemos explicado al principio de este capítulo, en el estado relajado hay independencia respecto a las condiciones iniciales (al menos en soluciones suaves). Por ello, de alguna manera, el régimen de MHD ideal pone demasiadas restricciones al sistema, limitando su evolución. Necesitamos un nuevo conjunto de invariantes más pequeño.

El problema anterior surge de la suposición de MHD ideal, ya que en este caso estamos haciendo una idealización en la cual no hay resistividad eléctrica y los plasmas son muy buenos conductores. Esta resistividad no es suficientemente grande como para afectar a algunos fenómenos y, en ellos, MHD es una buena aproximación. Sin embargo, en MHD ideal, el campo magnético se mueve con el fluido y, como los elementos del fluido mantienen su integridad, también se deben mantener las líneas del campo magnético y los tubos de flujo (esto es lo que expresan los  $k_l$ ).

Una solución será considerar una resistividad  $\eta$ . Esta se introduce en la teoría a través de la ley de Ohm, donde  $S$  es el número de Lundquist:

$$E = -v \times B + \frac{\eta}{S} J + \nabla \phi$$

Pero al ser considerada, por muy pequeña que sea, la falta de la condición  $\eta = 0$  hace que la derivada de los  $k_l$  no se anule y por tanto estos no sean invariantes. Luego el principal efecto de considerar la más mínima resistividad es la relajación de las restricciones topológicas de MHD ideal, permitiendo la rotura y reconexión de los tubos de flujo (ya que la *frozen-in law* de los tubos de flujo sólo se cumple cuando la resistividad es nula).

#### 4.1.2. La teoría de Taylor

Una forma de solucionar este problema fue propuesta por Taylor en 1974 y es la llamada conjetura de Taylor, en la que defendía que la helicidad magnética se conserva “aproximadamente” para resistividades muy bajas (en el límite ideal  $\mu, \nu \rightarrow 0$ ). En estas condiciones, la rotura de los tubos de flujo haría que los  $K_l$  no fueran invariantes pero, si el plasma está encerrado por una frontera sin resistividad, entonces el único tubo de flujo que retendría su integridad sería el tangente a la frontera.

Así, visualizó un plasma con resistividad, aunque pequeña, cuyo contorno era rígido y sin resistividad. Esta vez, en vez de estudiar los  $K_l$  por separado, se centró en la suma de todos los invariantes. La ventaja que presentaba esto es que se mantendría como un invariante, pero no tendría que identificar las líneas de campo. Esta suma corresponde a

$$K_0 = \int_{V_0} A \cdot B dV.$$

Esta cantidad es la, ya vista, helicidad magnética del sistema.

Basándose en esta conjetura, defendía que sólo la helicidad magnética global lleva a campos de Beltrami en los que  $\mu$  es constante.

**Proposición 4.4.** Sea  $A$  el vector potencial del campo magnético  $B$ . Supongamos que la densidad de energía interna es mucho menor que la de la energía magnética ( $\beta = p/B^2 \ll 1$ ). Entonces, la minimización de la energía potencial con respecto a  $K_0$  lleva a campos de Beltrami con  $\mu$  constante.

*Demostración.* Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, minimizamos la integral  $I = W - \lambda K_0$ , donde  $\lambda$  es una constante.

- Por un lado, como podemos reducir la minimización de la energía a la de la energía magnética, y usando que  $B = \nabla \times A$  (luego  $\delta B = \nabla \times \delta A$ ), se tiene

$$\delta W = \int_{V_0} (\nabla \times \delta A) \cdot B dV.$$

Usando la identidad vectorial 1.5, lo último se puede expresar como

$$\delta W = \int_{V_0} \delta A \cdot \nabla \times B dV + \int_{V_0} \nabla \cdot (\delta A \times B) dV.$$

Y usando el teorema de Gauss, obtenemos:

$$\delta W = \int_{V_0} \delta A \cdot \nabla \times B dV + \oint_{S_0} \delta A \times B \cdot n dS. \quad (4.3)$$

- Por otro lado, utilizando la regla de la cadena y  $\delta B = \nabla \times \delta A$ , tenemos

$$\delta K_0 = \int_{V_0} (\delta A \cdot B + A \cdot \nabla \times \delta A) dV.$$

Para el segundo término se tiene que  $\nabla \cdot (\delta A \times A) = -\delta A \cdot (\nabla \times A) + A \cdot (\nabla \times \delta A)$ , usando la identidad 1.5, por lo que

$$\delta K_0 = 2 \int_{V_0} \delta A \cdot B dV + \int_{V_0} \nabla \cdot (\delta A \times A) dV.$$

Y, otra vez, por el teorema de Gauss, se tiene

$$\delta K_0 = 2 \int_{V_0} \delta A \cdot B dV + \oint_{S_0} \delta A \times A \cdot n dS. \quad (4.4)$$

Entonces, usando 4.3 y 4.4, se obtiene que la variación de  $I$  es

$$\delta I = \int_{V_0} \delta A \cdot (\nabla \times B - 2\lambda B) dV + \oint_{S_0} \delta A \times (B - \lambda A) \cdot n dS.$$

Fijémonos de nuevo en las integrales  $\delta W = \int_{V_0} (\nabla \times \delta A) \cdot B dV$  y  $\delta K_0 = \int_{V_0} (\delta A \cdot B + A \cdot \nabla \times \delta A) dV$ , y hagamos  $\delta I = \delta W - \lambda \delta K_0$ . Haciendo la transformación  $A^* = A + \nabla \chi$ , podemos ver que  $\delta I$ , por lo que es invariante de Gauge.



Si la superficie es un conductor perfecto, entonces la componente tangencial de  $E$  será nula y, por la ley de Faraday, entonces la componente normal de  $B$  también será nula. Como  $\delta B = \nabla \times \delta A$ , entonces tendremos que la componente normal de  $\nabla \times \delta A$  será nula también. Esto implica que la componente normal de  $\delta A$  debe ser el gradiente de un escalar.

Bien, como  $A$  es invariante de Gauge y, para que se cumpla lo anterior, podemos introducir la transformación  $\delta A = \delta A^* + \nabla \chi$  y elegir  $n \times \delta A^* = 0$  en la superficie  $S_0$ . Fijándonos ahora en el término de la superficie de la ecuación que hemos obtenido para  $\delta I$ , vemos que con esto las contribuciones de  $\nabla \chi$  se anulan y las contribuciones de  $\delta A^*$  también. Por tanto, se anula todo el término de la superficie y nos queda

$$\delta I = \int_{V_0} \delta A \cdot (\nabla \times B - 2\lambda B) dV = 0 \iff \nabla \times B - 2\lambda B = 0.$$

El resultado de esta minimización es, por tanto, la condición

$$\nabla \times B = \mu B, \quad \text{donde } \mu = 2\lambda \text{ es una constante. } \quad \square$$

Así, los estados relajados que satisfacen esta condición dependen sólo en la constante  $\mu$ , y no en las condiciones iniciales.

## 4.2. Validez de la teoría de Taylor

Toda esta última minimización que hemos realizado está basada en el hecho de que la helicidad magnética sea constante. Sin embargo, para ecuaciones resistivas, podemos ver que no es así, sino que decrece (derivada negativa). Si nos volvemos a fijar en las ecuaciones 4.2, y ahora usamos que  $E = -v \times B + \eta/SJ + \nabla\phi$ , tenemos

$$\frac{dK_0}{dt} = -2 \int_{V_0} [(-v \times B) \cdot B + \frac{\eta}{S} J \cdot B + \nabla\phi \cdot B] dV + \oint_{S_0} [A \times (-v \times B) + A \times \left(\frac{\eta}{S} J\right) + A \times \nabla\phi] \cdot ndS.$$

Al primer término de la primera integral se cancela por ortogonalidad. Además, como  $B$  tiene divergencia 0, podemos usar que  $(\nabla\phi)B = \nabla(\phi B)$ , por lo que tenemos

$$\frac{dK_0}{dt} = -2 \int_{V_0} \left[ \frac{\eta}{S} J \cdot B + \nabla\phi \cdot B \right] dV + \oint_{S_0} [A \times (-v \times B) + A \times \left(\frac{\eta}{S} J\right)] \cdot ndS + \oint_{S_0} A \times \nabla\phi \cdot ndS.$$

Por una parte, en el segundo término de la primera integral podemos aplicar el teorema de Gauss, transformando la integral sobre el volumen en una integral de superficie y aquí aplicar la condición de contorno, de forma que este término se cancela. Por otra parte, en la última, aplicamos también el teorema de Gauss, pero esta vez al revés, de forma que en el integrando queda  $\nabla(\nabla\phi \times A)$ , que se puede escribir como  $B \cdot \nabla\phi$  y a su vez, esto como  $\nabla(\phi B)$ . Por tanto, usando otra vez el teorema de Gauss, nos queda una integral de superficie de  $\nabla(\phi B)$  y, usando la condición de contorno, este término se cancela. De esta manera, tenemos que

$$\frac{dK_0}{dt} = -2 \int_{V_0} \frac{\eta}{S} J \cdot B dV + \oint_{S_0} [A \times (-v \times B) + A \times \left(\frac{\eta}{S} J\right)] \cdot ndS.$$

Ahora, usando la identidad vectorial 1.2, podemos transformar el primer término de la segunda integral como  $(v \times A) \times B = -v(A \cdot B) + A(v \cdot B)$  y, usando la condición de contorno, el término se anula. Por otra parte, en el segundo término de esta misma integral podemos usar la ley de Ampere  $J = c/4\pi \nabla \times B$  para transformarlo como  $A \times (\eta/SJ) = c\eta/4\pi SA \times (\nabla \times B) = c\eta/4\pi S[(A \cdot B)\nabla - (A \cdot \nabla)B]$  y, de nuevo, con la condición de contorno, la integral se anula. Se tiene, por tanto que

$$\frac{dK_0}{dt} = -2 \int_{V_0} \frac{\eta}{S} J \cdot B dV,$$

por lo que  $K_0$  no es un invariante. Esto hace que la energía se disipe, con una tasa de disipación del orden de  $\eta$  :

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{V_0} \frac{\eta}{S} J^2 dV .$$

Podemos preguntarnos entonces cómo es posible que funcione la teoría. La clave para entender por qué sí funciona la conjetura de Taylor está en las escalas de tiempo asociadas al proceso de relajación.

El estado de relajación definido por  $\nabla \times B = \mu B$  solo ocurre como resultado final. Para tener uso práctico, la teoría no requiere que la helicidad magnética sea absolutamente invariante, sólo que los procesos dinámicos responsables de la relajación disipen la energía más rápido de lo que disipan la helicidad. Por ello, lo importante es la invarianza relativa de la helicidad con respecto a la energía (la teoría actual no especifica estos procesos). Taylor visualizó el proceso de relajación como resultado de una turbulencia de pequeña escala, con  $S \gg 1$ . En esta situación, podemos suponer heurísticamente que  $B$  se puede descomponer como

$$B \approx \sum_k b_k \exp(ik \cdot r).$$

La ley de Ampere nos dice que  $J$  es del orden de la derivada de  $B$  y, usando esta expresión, obtenemos

$$\frac{dK_0}{dt} \approx -\frac{2\eta}{S} \sum_k k b_k^2 \quad \text{y} \quad \frac{dW}{dt} \approx -\frac{\eta}{S} \sum_k k^2 b_k^2.$$

Aquí, podemos ver que la disipación de energía,  $dW/dt$  es de orden  $O(1)$  para escalas de longitud en las que  $k \approx S^{1/2}$ . Con esta longitud de de escala, tenemos que la disipación de helicidad es del orden de  $O(S^{-1/2}) \ll 1$ . Por esta razón, podemos esperar que una turbulencia de pequeña escala disipe energía más rápido que helicidad.

Desafortunadamente, no hay evidencia experimental de que la relajación sea producida por una turbulencia de pequeña escala. Los procesos que tienen que ver con la relajación parecen tener una estructura global, de longitud de onda larga, como se ha visto en numerosas simulaciones. Sin embargo, estas simulaciones siguen mostrando que la helicidad es invariante con respecto a la energía, como había conjeturado Taylor.

En la actualidad, los resultados teóricos disponibles nos dicen que existen soluciones turbulentas de MHD ideal que disipan la energía y preservan helicidad magnética

---

[7]. Además la helicidad magnética se preserva para soluciones resistivas [6]. Todos estos argumentos son consistentes con la teoría de relajación de Taylor, pero tampoco la validan. Por un lado no sabemos si existen mas invariantes en regímenes turbulentos. Por otro lado, es un reto central en la investigación actual entender qué soluciones en el régimen ideal son límites de soluciones de las ecuaciones viscosas o resistivas cuando los parámetros tienden a cero. Finalmente, estos procesos heurísticos no prueban que las soluciones tiendan al mínimo.



## APÉNDICE A

# Pinch de Campo Invertido

---

La fusión termonuclear es una forma de conseguir fusión nuclear sometiendo al plasma a elevadas temperaturas. Puede ocurrir de forma descontrolada (como ocurre en la mayoría de estrellas o en las bombas nucleares) o de forma controlada (con el objetivo de aprovechar la energía generada). Para controlar la fusión, lo que se necesita es confinar de alguna manera el plasma. Una de estas maneras es el confinamiento magnético. Existen distintas máquinas para confinar el plasma caliente a través de un campo magnético, hechas de diferentes materiales y con diferentes estructuras, de forma que el plasma se ve afectado de distintas maneras. La mayoría de estos dispositivos tienen forma toroidal, lo que permite confinar el plasma por los lados mediante el campo magnético y que no se escapen las partículas al tratarse de un “cilindro cerrado por los lados”. Dos ejemplos famosos son los *tokamaks* y *Reversed Field Pinch* (RFP), que hemos traducido como “pinch de campo invertido”.

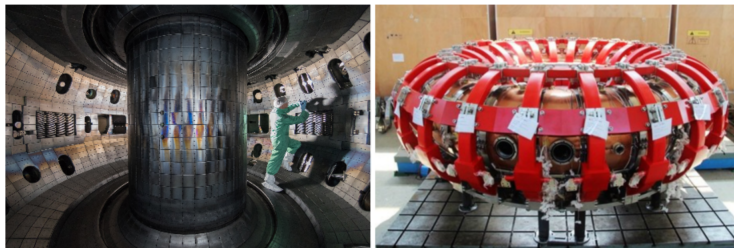


Figura A.1: Tokamak y RFP

En los tokamaks, se usa una combinación de imanes para dar lugar a un campo magnético toroidal (con forma de toro,  $B_T$  en A) y un campo magnético poloidal (que se mueve en círculos alrededor del plasma,  $B_p$  en A). El resultado es un campo magnético que tiene forma muy similar a la del plasma toroidal que intenta confinar, y que lo rodea por todas partes, de forma que el plasma queda atrapado.

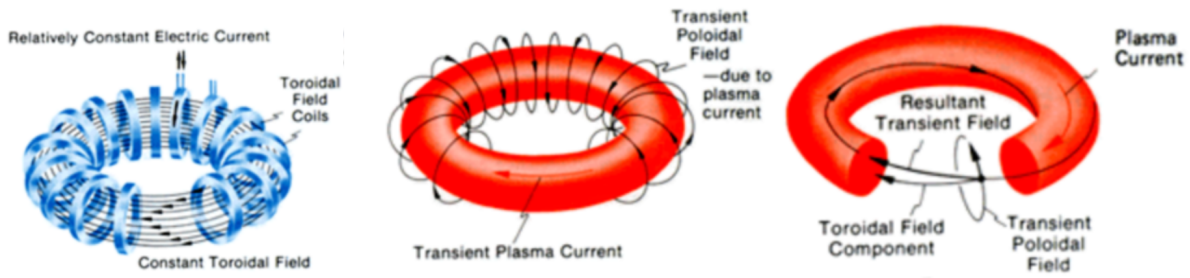


Figura A.2: Estructura de un Tokamak

En RFP, la estructura es un poco distinta. En este caso, hay también un campo magnético toroidal (generado por imanes externos) y un campo magnético poloidal (generado por la corriente del plasma). Pero, en este dispositivo, debido a la forma en la que está construido, si nos movemos radialmente hacia fuera del toro, lo que ocurre es que el campo magnético toroidal va cambiando gradualmente hasta que en un punto (cerca de la frontera) invierte su sentido. Esto le da el nombre de campo invertido. Este dispositivo requiere campos magnéticos mucho más bajos que el tokamak; el campo toroidal es 10 veces más pequeño que en un tokamak con una corriente similar. Sin embargo, una desventaja es que es muy susceptible a la turbulencia. Es esta razón la que hace que la teoría de Taylor, vista en el capítulo 4, prediga muy bien el comportamiento de RFP, y no del tokamak. Lo estudiamos a continuación.

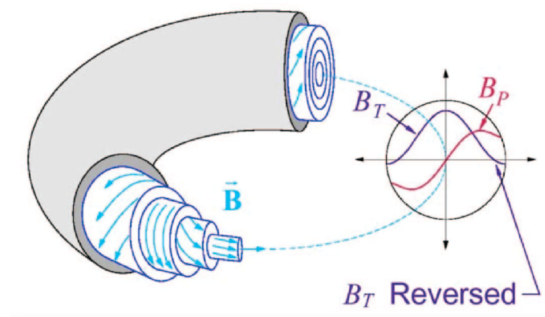


Figura A.3: Estructura de RFP

Para simplificar el proceso, aproximaremos la geometría del toro mediante un cilindro periódico ( $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq 2\pi R$ , donde  $a$  será el menor radio del toro y  $R$  el mayor). Los estados de equilibrio de plasmas toroidales que son independientes del ángulo toroidal  $\phi$  se llaman axisimétricos. Cuando esto ocurre, las líneas de campo magnético forma una especie de superficies anidadas, que normalmente no tienen el mismo centro geométrico y no corresponden al eje menor  $r = 0$ . Las superficies son desplazadas hacia el borde exterior del toro. Sin embargo, si la proporción entre el radio mayor  $R$  y el menor  $r$  es muy grande, ese desplazamiento es muy pequeño. En este caso, se puede hacer una aproximación del toro mediante un cilindro que sea periódico. Es por esto que en este caso podemos hacer la aproximación mencionada.

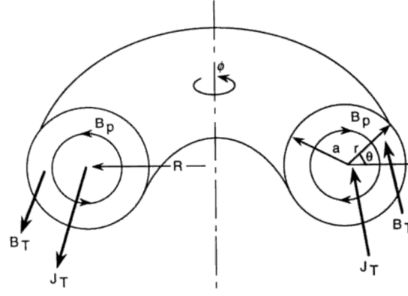


Figura A.4: Descripción de un toro

Además, consideraremos las soluciones de la ecuación  $\nabla \times B = \mu B$  que cumplan  $B_r(a) = 0$ , para que sean consistentes con la condición de contorno  $n \cdot B = 0$  en  $S_0$ .

Ahora tomamos el rotacional de la ecuación  $\nabla \times B = \mu B$ , y luego tomamos su componente z. Usando la identidad 1.2 y que  $\nabla \cdot B = 0$ , llegamos a que

$$\nabla^2 B_z + \mu B_z = 0.$$

Esta ecuación tiene como solución la parte real de

$$B_z = \sum_{m,k} a_{m,k} J_m(\alpha r) \exp[i(m\theta + kz)],$$

donde  $\alpha^2 = \mu^2 - k^2$  y  $J_m$  es una función de Bessel. Se puede demostrar [Taylor, 1975; Reiman, 1980] que sólo dos de las soluciones dadas por la expresión anterior pueden tener mínima energía absoluta. Definiendo  $B_0$  como el campo toroidal en el eje magnético  $r = 0$ , tenemos las dos soluciones siguientes.

- Una solución con simetría cilíndrica, con  $m = 0$  (estados BFM)

$$\begin{aligned} B_z/B_0 &= J_0(\mu r) \\ B_\theta/B_0 &= J_1(\mu r) \\ B_r/B_0 &= 0 \end{aligned}$$

- Una solución con simetría helicoidal, con  $m = 0$  y  $m = 1$

$$\begin{aligned} B_z/B_0 &= J_0(\mu r) + a_{1,k} J_1(\alpha r) \cos(\theta + kz) \\ B_\theta/B_0 &= J_1(\mu r) + \frac{a_{1,k}}{\alpha} \left[ \mu J_1'(\alpha r) + \frac{k}{\alpha r} \right] \cos(\theta + kz) \\ B_r/B_0 &= -\frac{a_{1,k}}{\alpha} \left[ k J_1'(\alpha r) + \frac{\mu}{\alpha r} \right] \sin(\theta + kz) \end{aligned}$$

Estos resultados se pueden interpretar en función del parámetro de inversión del campo (field reversal parameter)  $F = B_z(a) / \langle B_z \rangle = \pi a^2 B_z(a) / \Phi_z$  y el parámetro de estricción (pinch parameter)  $\Theta = B_\theta(a) / \langle B_z \rangle = 2\pi a I_z / c \Phi_z$ . Aquí,  $\Phi_z$  es el flujo del toro,  $I_z$  la corriente total del toro,  $c$  la velocidad de la luz y  $\langle \dots \rangle$  denota el promedio de volumen. Llamaremos además  $\mu a$  a la densidad de corriente normalizada.

- Para la solución con simetría cilíndrica, se tiene que  $F = \frac{\mu_a J_0(\mu a)}{2J_1(\mu a)}$  y  $\Theta = \frac{\mu a}{2}$ . La teoría predice que  $F < 0 \iff \mu a > 2.4 \iff \Theta = \mu a/2 > 1.2$ . Esto es, si el parámetro de estricción  $\Theta$  es mayor que 1.2, entonces el parámetro de inversión del campo se hace negativo, y esto significa que el campo toroidal en la superficie cambiará de signo, es decir, se invertirá.
- Para la solución con simetría helicoidal, este estado existe sólo para valores discretos de  $\mu$ , que se determinan con la condición  $B_r(a) = 0$ . El valor mínimo que puede tomar  $\mu$  para que existan estas soluciones corresponde a  $\mu a \approx 3.11$  (luego  $\Theta \approx 1.56$ ). Entonces, tenemos que para  $\Theta > 1.56$ , este es el estado de menor energía.

Por tanto, lo que predice la teoría de Taylor aplicada a RFP es que, para un flujo toroidal, si se incrementa el valor del flujo magnético (volt-seconds) desde 0, aumenta también el valor de  $\Theta$ . Al aumentar el valor de  $\Theta$ , el campo toroidal de la superficie disminuye (con respecto a su valor en el eje).

- Cuando  $\Theta$  excede el valor 1.2, el campo toroidal cambia de signo (se invierte).
- $\Theta$  puede seguir creciendo (y  $F$  decreciendo) hasta alcanzar el valor 1.56.
- Si el valor del flujo magnético sigue aumentando, como  $\Theta$  no puede aumentar más, lo que ocurre es que el estado relajado que teníamos se distorsiona helicoidalmente (los volt-seconds son absorbidos a medida que la corriente del canal se deforma helicoidalmente).

Cuando  $F \approx 1$ ,  $\ll 1$ ; este es el caso del tokamak.



## APÉNDICE B

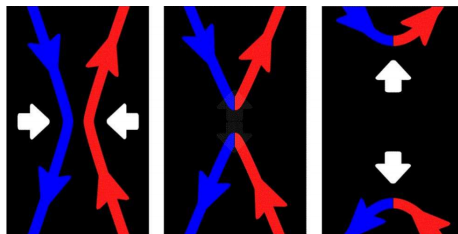
# Reconexión Magnética

---

A lo largo de las secciones anteriores se ha mencionado varias veces la *frozen-in law*, por la cual en el régimen ideal, los tubos de flujo mantienen su integridad en todo momento. Esto quiere decir que los tubos de flujo y, por tanto, las líneas magnéticas, no pueden romperse ni conectarse unos con otros. Sin embargo, la presencia de incluso la más pequeña resistividad hace que esto no se cumpla en el régimen de MHD resistivo. Así, este régimen permite que dos líneas magnéticas sean arrastradas por el flujo hasta estar muy juntas, momento en el que se cortan y se reconectan en una dirección distinta. Esto es lo que se conoce como *reconexión magnética*.

La presencia de esta resistividad hace, como ya se ha visto, que se produzca una difusión de energía (ya que la derivada de la energía es negativa). Esta difusión se produce en todo el plasma de forma “lenta”, en un tiempo  $\tau_\eta$ . Sin embargo, cuando se produce la reconexión magnética, el proceso va acompañado de una liberación de grandes cantidades de energía de forma mucho más rápida que la difusión.

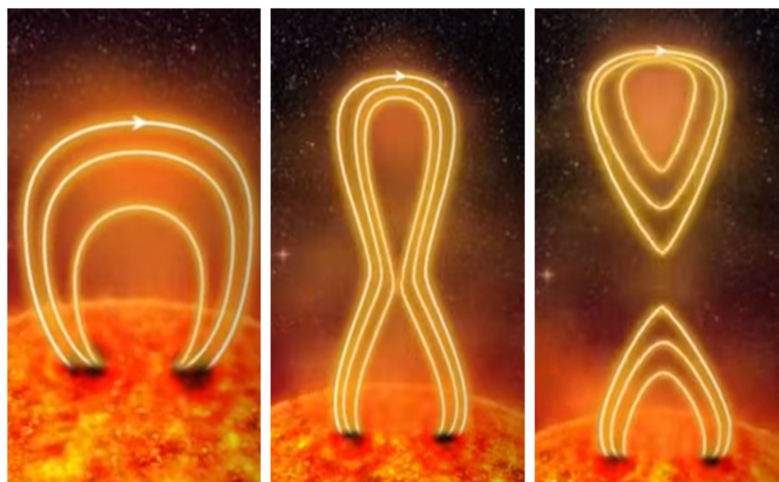
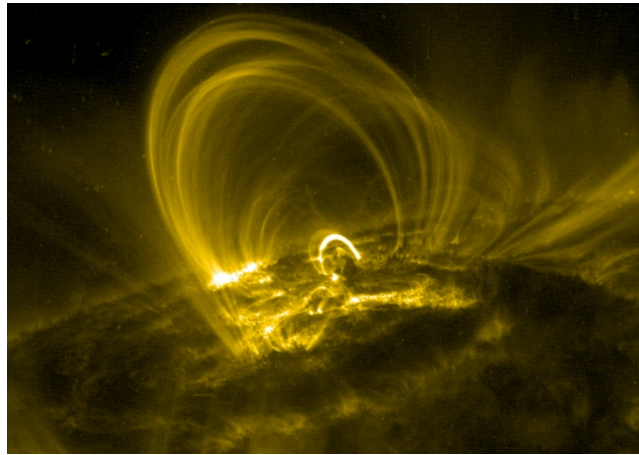
En comparación con esa difusión de energía, que aparece de forma global en todo el plasma debido a la presencia de resistividad, y que presenta un paso temporal de  $\tau_\eta/\tau_A = S \equiv \eta^{-1}$ , estos procesos rápidos ocurren con un paso de tiempo del orden de  $O(\eta^\nu)$ ,  $0 \leq \nu < 1$ . Además, ocurren localmente (no en todo el plasma). Si hay dos campos magnéticos con direcciones opuestas, estos empujan y comprimen al fluido por los dos lados, de forma que los campos se aproximan mucho. El resultado es una *current sheet*, que es la estructura fundamental en la que se producen estos procesos.



La teoría de reconexión tradicional se ha centrado en el estudio 2-dimensional de estos fenómenos, dando lugar a dos modelos básicos: el modelo de Sweet-Parker y el de Petschek. Sin embargo, hoy en día se sabe que estos dos modelos son incorrectos, ya

que no consiguen predecir los sucesos observados. Las observaciones muestran que en ciertos procesos en los que hay presente una resistividad muy pequeña, la liberación de energía se produce de forma mucho más rápida de lo esperado. Estos fenómenos son los que trata de explicar la teoría de reconexión rápida y es un problema de investigación actual.

Un ejemplo de este tipo de procesos ocurre en la corona solar. Las altas temperaturas que hay en esta superficie hacen que el plasma sea muy buen conductor, presentando una resistividad muy baja, pero no nula. En este marco, se dan las *llamaradas solares*, que son precisamente liberaciones repentinas de energía magnética. Además, si la llamarada se produce en dirección a la Tierra, originan las famosas auroras boreales. El problema es que en estos fenómenos, la liberación de energía se produce mucho más rápido de lo que predice el modelo de MHD.



# Bibliografía

---

- [1] ALFVÉN, H. (1942). *Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves*, Nature, v. 150, p. 405
- [2] MEYER, R.E. (1982). *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*. New York: Dover Publications.
- [3] ORTOLANI, S. Y SCHNACK, D.D. (1993) *Magnetohydrodynamics of Plasma Relaxation* Singapore: World Scientific.
- [4] BISKAMP, D.(1993) Introduction en *Nonlinear Magnetohydrodynamics* (Cambridge Monographs on Plasma Physics, pp. 1-7). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511599965.002
- [5] DALTON D. SCHNACK *Lectures in Magnetohydrodynamics: With an Appendix on Extended MHD*. Lect. Notes Phys. 780 (Springer, Berlin Heidelberg 2009), DOI 10.1007/978-3-642-00688-3
- [6] FARACO, D. Y LINDBERG, S. (2018). *Proof of Taylor's Conjecture on Magnetic Helicity Conservation*. Communications in Mathematical Physics, 373(2): 707-738. doi: 10.1007/s00220-019-03422-7
- [7] FARACO, D., LINDBERG, S. Y SZÉKELYHIDI, JR. (2019). *Bounded solutions of ideal MHD with compact support in space-time*
- [8] OMAR MAJ (2017). *A mathematical introduction to magnetohydrodynamics*. Max Planck Institute for Plasma Physics, D-85748 Garching, Germany.
- [9] BERGER, M.A. Y FIELD, G.B. (1984). *The topological properties of magnetic helicity*. Journal of Fluid Mechanics, 147(1): 133-148. doi: 10.1017/S0022112084002019.
- [10] FINN, J. Y ANTONSEN, JR (1984). *Magnetic Helicity: What Is It and What Is It Good For?*. Laboratory for Plasma and Fusion Energy Studies. University of Maryland, Maryland.
- [11] DEMOULIN, P., PARIAT, E. Y BERGER, MA. (2005). *Basic properties of mutual magnetic helicity*. Department of Mathematics, University College London, London.

- 
- [12] BRIANE, M. Y MILTON, G. (2015). *Isotropic realizability of current fields in  $R^3$* . SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 14(2): 1165-1188. doi: 10.1137/140989121.
- [13] CHAMIZO, F. *Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil*. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.
- [14] CHAMIZO, F. *Las Ecuaciones de Maxwell I*. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. .
- [15] TRUEBA SANTANDER, J.L. (2003). *Nudos electromagnéticos* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.
- [16] CASTRO, A. *Existencia global en las ecuaciones de Euler y de la Magnetohidrodinámica* (Tesis doctoral). Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.
- [17] MURPHY, N. (2016). *Conservation Laws in Ideal MHD* de Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics Sitio web: <https://www.cfa.harvard.edu/namurphy/>
- [18] LEHNERT, B. (1997.) *Plasma Boundary Conditions in an External Magnetic Field* The Alfvén Laboratory Division of Fusion Plasma Physics, Royal Institute of Technology ,SE-100 44 Estocolmo, Suecia.
- [19] BITTENCOURT, J.A. (2004). *Fundamentals of Plasma Physics*, Springer, New York, ISBN 978-1-4419-1930-4.
- [20] CLARKE, D. (2015). *A Primer on Magnetohydrodynamics*, Saint Mary's University, Halifax NS, Canada.
- [21] YEATES, A.R. *Magnetohydrodynamic Relaxation Theory*, Durham University, Durham, UK.
- [22] WIKIPEDIA. *Vector Calculus Identities*, recuperado el 20 de mayo de 2020 de [https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_calculus\\_identities](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities)