



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

**"FUNCIONES
CUASICONFORMES Y
CUASIDISCOS"**

Lidia Herrero Huertas

Supervisado por:
Daniel Faraco Hurtado

Índice

1	Sección multiusos	3
1.1	Funciones cuasiconformes	3
1.2	Módulo y Extremal Length de una familia de curvas	4
1.3	Cuasidiscos	8
1.4	Teoremas importantes	11
2	Tabla de implicaciones	13
2.1	Cuasidisco \Rightarrow Propiedad del segmento hiperbólico.	13
2.2	Propiedad Segmento Hiperbólico \Rightarrow Dominio Uniforme.	20
2.3	Dominio Uniforme \Rightarrow Lineal Localmente conexo.	20
2.4	Lineal Localmente conexo \Rightarrow Propiedad de los tres puntos.	21
2.5	Propiedad de los tres puntos \Rightarrow Cuasidisco.	23
3	¿Qué conjunto es (o no es) un cuasidisco?	33
A	Diferencial de una aplicación cuasiconforme	37

Abstract

This study talks about quasiconformal mappings and quasidisks. It is based on the notes "Characteristic properties of quasidisks", written by F.V. GEHRING that, also, unifies the concepts contributed by L.V. ALHFORS in "Lectures on Quasiconformal Mappings" and by LETHO-VIRTANEN in "Quasiconformal Mapping in the Plane".

Firstly, the reader will find the definition of quasiconformal mappings, considered the generalization of conformal mappings studied in Complex Variable I. Then, it is followed by certain properties that will be frequently used in this study.

Secondly, we will focus on the images of an opens disks or half planes under a quasiconformals mappings, generally known as quasidisk. Next, we will be defined the following four properties: reflexion property, hyperbolic segment property, uniform domain, local connectivity property and three points property.

Once it is described in detail, we will prove that any domain with any of these characteristics will be a quasidisk. For that, we will show thanks to diagram in page 13.

Finally, as curiosity, we can see some examples and counter-examples of quasidisks, such as, the known domain "Snowflake Koch" .

Capítulo 1

Sección multiusos

Este capítulo está destinado a recopilar toda aquella notación, definición, observación o, incluso, teorema necesario para la fluidez del siguiente epígrafe.

Empezamos con un poco de ...

NOTACIÓN:

- $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
- $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} =$ plano complejo extendido.
- $\Omega \in \mathbb{C}$ es un conjunto simplemente conexo.
- $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
- Ω^* es el exterior de Ω
- $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z_0 - z| < r\}$
- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\{z\} > 0\}$

1.1 Funciones cuasiconformes

Definición 1.1.1. *Función K -cuasiconforme*

Se dice que $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una función K -cuasiconforme si es un difeomorfismo¹

que preserva la orientación tal que $D = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \leq K \quad \forall z \in \Omega$.

Dicha D recibe el nombre de dilatación de f .

¹En realidad la definición es válida para homeomorfismos con derivadas débiles integrables

Equivalentemente, se dice que $f(z)$ es k -cuasiconforme si $d = \left| \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)} \right| \leq k$
 $\forall z \in \Omega$.

A dicha constante d se denomina *distorsión* de f .

Ambas cantidades se relacionan de la siguiente manera:

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f} \quad , \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1} < 1$$

Obs.

- Una función 1-cuasiconforme es conforme.
- Una función K -cuasiconforme manda infinitesimalmente círculos a elipses cuya excentricidad viene controlada por el factor K . *Comprobación: Véase en Apéndice.*

Propiedades de funciones cuasiconformes

Prop 1. Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es K_1 -cuasiconforme y $g : \Omega' \rightarrow \Omega''$ es K_2 -cuasiconforme. Entonces $g \circ f : \Omega \rightarrow \Omega''$ es $K_1 K_2$ -cuasiconforme.

Prop 2. La inversa de una función K -cuasiconforme es K -cuasiconforme.

Prop 3. Si Ω y Ω' son dominios de Jordan y $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es K -cuasiconforme, entonces, f puede extenderse a un homeomorfismo $f : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}'$.

1.2 Módulo y Extremal Length de una familia de curvas

Sea Γ una familia de curvas $\gamma \in \mathbb{C}$.

El módulo de Γ es, a grandes rasgos, una medida del tamaño de Γ . Lo interesante de esta magnitud es que es invariante conforme, es decir, si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una función conforme donde Ω y Ω' son dominios y Γ es una familia de curvas en Ω , entonces

$$\text{mod}(\Gamma) = \text{mod}(f(\Gamma)). \quad (1.1)$$

Definición 1.2.1. *Función admisible.*

Se dice que una función ρ es admisible en Γ , es decir, $\rho \in \text{adm}\Gamma$, si cumple:

1. $\rho \geq 0$.

$$2. \int_{\gamma} \rho(z)|dz| \geq 1 \text{ para cada } \gamma \in \Gamma.$$

Definición 1.2.2. *Módulo de una familia de curvas.*
Se define el módulo de Γ como:

$$\text{mod}(\Gamma) = \inf_{\rho} \int_{\mathbb{C}} \rho^2(z) dx dy$$

donde el ínfimo es $\forall \rho \in \text{adm}\Gamma$.

En algunos textos es más común utilizar el siguiente concepto:

Definición 1.2.3. *“Extremal Length”.*

$$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{\text{mod}(\Gamma)}$$

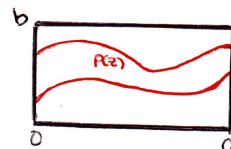
Ejemplos

Ejemplo 1 - Rectángulo

Sea $R = [0, a] \times [0, b]$ y sea Γ la familia formada por los segmentos $\gamma_i = \{z = x + iy \mid 0 < x < a\}$ para cada $0 < y < b$.

Entonces

$$\text{mod} \Gamma = \frac{a}{b} \tag{1.2}$$



Veámoslo:

Para cada $\rho \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{\gamma} \rho(z)|dz| = \int_0^a \rho(x + iy) dx \leq \leftarrow \text{Hölder} \\ &\leq \left(\int_0^a \rho^2(x + iy) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^a \rho^2(x + iy) dx \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \rho^2(x + iy) dx \geq \frac{1}{a}$$

De esta manera,

$$A = \int \int_{\mathbb{C}} \rho(z)^2 dx dy = \int_0^b \int_0^a \rho^2(x + iy) dx dy \geq \int_0^b \frac{1}{a} dy = \frac{b}{a}$$

Por tanto,

$$\text{mod}(\Gamma) = \inf_{\rho} A \geq \frac{b}{a}$$

Si consideramos $\rho(z) = \begin{cases} \frac{1}{a} & z \in R \\ 0 & z \in \mathbb{C} \setminus R \end{cases}$ vemos que :

- Es admisible en Γ

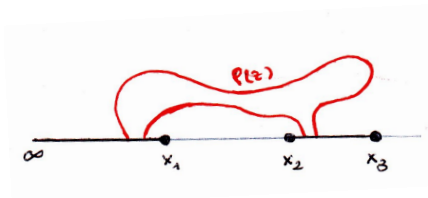
- $A = \int_0^b \int_0^a \rho(x + iy)^2 dx dy = \frac{b}{a}$

Por tanto,

$$\text{mod}(\Gamma) = \frac{b}{a} \Rightarrow \lambda(\Gamma) = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 2: Intervalos

Sea Γ es una familia de curvas que unen los intervalos (∞, x_1) y (x_2, x_3) en el hiperplano superior \mathbb{H} .

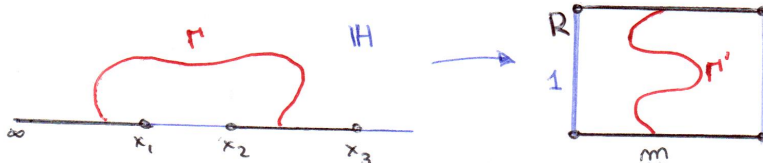


Entonces, existe $m(t)$ estrictamente creciente de 0 a ∞ cuando t aumenta de 0 a ∞ y con $m(1) = 1$ tal que

$$\text{mod}(\Gamma) = m\left(\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}\right) \tag{1.3}$$

Veámoslo:

Se puede encontrar, utilizando funciones elípticas, una función que lleve \mathbb{H} en el rectángulo R de manera que x_1, x_2, x_3, ∞ se corresponden con los vértices de R , como se ilustra en el siguiente dibujo:



Y sabemos que $\text{mod}(\Gamma)$ es invariante conforme, entonces

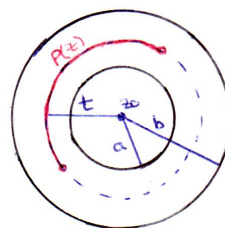
$$\text{mod}(\Gamma) = \text{mod}(\Gamma') = m \left(\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \right)$$

Ejemplo 3: Anillo

Sea $S = B(z_0, b) \setminus B(z_0, a)$ y sea Γ la familia de curvas $\gamma(t)$ tal que para cada $t \in (a, b)$ el círculo $|z - z_0| = t$ contiene $\gamma(t) \in \Gamma$.

Entonces

$$\text{mod}(\Gamma) \geq \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right) \quad (1.4)$$



Veámoslo:

Sea $\rho \in \text{adm}(\Gamma)$, entonces

$$1 \leq \int_{\gamma} \rho(z) |dz| \leq \int_0^{2\pi} \rho(te^{i\theta}) t d\theta$$

De modo que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_0^{2\pi} \rho(te^{i\theta}) t d\theta \leq \leftarrow \text{Schwarz} \\ &\leq 2\pi t \int_0^{2\pi} \rho^2(te^{i\theta}) t d\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \rho^2(te^{i\theta}) t d\theta \geq \frac{1}{2\pi t}$$

Así pues,

$$A = \int \int_{\mathbb{C}} \rho(z)^2 dx dy \geq \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} \rho^2(te^{i\theta}) t d\theta \right) dt \geq \int_a^b \frac{dt}{2\pi t} = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right)$$

Por tanto,

$$\text{mod}(\Gamma) = \inf_{\rho} A \geq \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right)$$

Recordemos que las funciones conformes preservan el módulo de familias de curvas. Por tanto, las funciones cuasiconformes también se pueden definir alternativamente como las que distorsionan el módulo de manera controlada.

Definición 1.2.4. *Función K-cuasiconforme.*

Un homeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ que preserva la orientación es K-cuasiconforme si y solo si satisface la desigualdad:

$$\frac{1}{K} \text{mod}(\Gamma) \leq \text{mod}(f(\Gamma)) \leq K \text{mod}(\Gamma)$$

1.3 Cuasidiscos

Definición 1.3.1. *Cuasidisco.*

Ω es un cuasidisco si es imagen de un disco abierto ó un semiplano bajo una función K-cuasiconforme $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

Aviso importante para el lector: La función K-cuasiconforme debe estar definida en todo el plano complejo.

Propiedades de cuasidiscos

1. Propiedad de reflexión

Definición 1.3.2. *Cuasiisometría en $\bar{\mathbb{C}}$.*

Se dice que una función $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ es una K-cuasiisometría de $\bar{\mathbb{C}}$ si $f(\infty) = \infty$ y si $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{K} |z_1 - z_2| \leq |f(z_1) - f(z_2)| \leq K |z_1 - z_2|$$

Propiedad de reflexión

Se dice que Ω tiene la propiedad de reflexión si Ω es un dominio de Jordan con $\infty \in \partial\Omega$ y si existe una L-cuasiisometría de $\bar{\mathbb{C}}$ que manda Ω a Ω^* y $\partial\Omega$ se mantiene fija.

2. Propiedad del segmento hiperbólico

Definición 1.3.3. *Distancia hiperbólica en \mathbb{D} .*

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, la distancia hiperbólica entre ambos puntos viene dada por

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \inf_{\alpha} \int_{\alpha} \frac{2dz}{1 - |z|^2}$$

donde se toma el infimo de todos los caminos α que unen z_1 y z_2 en \mathbb{D} .

Podemos evitar tomar el infimo de α si consideramos el arco contenido en un segmento hiperbólico que une z_1 y z_2 .

Definición 1.3.4. *Segmento hiperbólico en \mathbb{D} .*

Se denomina segmento hiperbólico al arco de circunferencia β que corta ortogonalmente $\partial\mathbb{D}$.

Por tanto, siempre que α esté contenido en un segmento hiperbólico de \mathbb{D} , la distancia hiperbólica es

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \int_{\alpha} \frac{2dz}{1 - |z|^2}$$

De manera más general, se define la distancia hiperbólica en un dominio simplemente conexo Ω mediante una función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme de la siguiente manera:

$$\rho_{\Omega}(z_1, z_2) = \int_{\alpha} \frac{2}{1 - |z|^2} dz = \int_{g(\alpha)} \frac{2}{1 - |g(z)|^2} |g'(z)| dz = \rho_{\mathbb{D}}(g(z_1), g(z_2))$$

Y, de nuevo existe un único arco α tal que

$$\rho_{\Omega}(z_1, z_2) = \int_{\alpha} \frac{2}{1 - |z|^2} dz \quad (1.5)$$

Definición 1.3.5. *Segmento hiperbólico en Ω .*

Se denomina α es segmento hiperbólico en un dominio Ω simplemente conexo a aquella curva que verifica (1.5).

Propiedad del segmento hiperbólico

Se dice que Ω tiene la propiedad del segmento hiperbólico si existe a,b constantes tal que cada segmento hiperbólico $\alpha \in \Omega$ cumple

$$\ell(\alpha) \leq a|z_1 - z_2|$$

y cada $z \in \alpha$

$$\min_{j=1,2} \ell(\alpha_j) \leq b d(z, \partial\Omega)$$

donde α_j es la componente $\alpha \setminus \{z\}$.

3. Dominio Uniforme

Definición 1.3.6. *Dominio Uniforme.*

Se dice que Ω es uniforme si existe a y b tal que cada par $z_1, z_2 \in \Omega$ se pueden unir por un segmento $\alpha \in \Omega$ que cumpla la propiedad del segmento hiperbólico.

4. Propiedad de linealidad de un localmente conexo

Definición 1.3.7. *Dominio localmente conexo.*

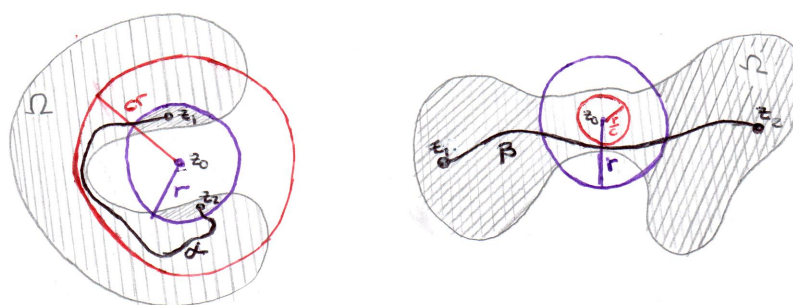
Se dice que Ω es localmente conexo en z_0 si para cada entorno U de z_0 existe otro entorno V de z_0 tal que $\Omega \cap V$ es una componente conexa de $\Omega \cap U$.

Propiedad de linealidad de un localmente conexo

Se dice que un conjunto $\Omega \in \overline{\mathbb{C}}$ es linealmente local conexo si existe una constante c tal que $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ y para $0 < r < \infty$,

- (a) existe un arco $\alpha \in \Omega \cap \overline{B}(z_0, cr)$ que une cada par de puntos de $\Omega \cap \overline{B}(z_0, r)$.
- (b) existe un arco $\beta \in \Omega \setminus B(z_0, r/c)$ que une cada par de puntos de $\Omega \setminus B(z_0, r)$.

Para ilustrar este concepto, presentamos dos figuras representativas.



5. Propiedad de los tres puntos

Se dice que Ω satisface la propiedad de los tres puntos si Ω es un dominio de Jordan y si existe una constante d tal que para cada par de puntos finitos $z_1, z_2 \in \partial\Omega$,

$$\min_{j=1,2} \text{dia}(\gamma_j) \leq d|z_1 - z_2|$$

donde γ_1, γ_2 son las componentes de $\partial\Omega \setminus \{z_1, z_2\}$.

1.4 Teoremas importantes

A continuación se presentan una serie de teoremas que utilizaremos a lo largo del siguiente capítulo y cuya demostración se omitirá para no extendernos demasiado.

Teorema 1.4.1. *(Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann)* Dado un dominio del plano complejo simplemente conexo cuya frontera contenga al menos un punto, existe una aplicación conforme de dicho dominio sobre el disco unidad.

Teorema 1.4.2. *(Teorema de Distorsión de Kőbe).* [5, p.45] Supongamos que f es conforme en un dominio Ω tal que $f(\Omega) = \Omega' \in \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in \Omega$. Entonces,

$$\frac{1}{4}|f'(z_0)|\text{dist}(z_0, \partial\Omega) \leq \text{dist}(f(z_0), \partial\Omega') \leq |f'(z_0)|\text{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Teorema 1.4.3. *(Teorema de Carátheodory).* Dado un dominio del plano complejo simplemente conexo cuya frontera es una curva de Jordan, entonces la aplicación de Riemann puede extenderse continuamente a las fronteras.

Como consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.4. [3, p.281] Sea $f(z)$ una función univalente en $\mathbb{D}^* = \{z : |z| > 1\}$ con $f(\infty) = \infty$ y $\Omega = f(\mathbb{D}^*)$. Son equivalentes:

1. $f(z)$ puede extenderse a un homeomorfismo entre $\overline{\mathbb{D}^*}$ y $\overline{\Omega}$.
2. $\partial\Omega$ es una curva de Jordan cerrada.
3. $\partial\Omega$ es localmente conexo y no tiene puntos de corte.

En este trabajo necesitaremos que las funciones cuasiconformes satisfagan las siguientes propiedades de cuasisimetría:

Teorema 1.4.5. [1, p.21] Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ función K -cuasiconforme con $f(\infty) = \infty$ y sean $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z_2 - z_0| \leq |z_1 - z_0|$$

entonces:

$$|f(z_2) - f(z_0)| \leq c|f(z_1) - f(z_0)|$$

donde $c = e^{8K}$.

Corolario 1.4.5.1. [1, p.23] Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ función K -cuasiconforme con $f(\infty)=\infty$ y sean $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z_2 - z_0| \leq 2^t |z_1 - z_0| \quad , \quad t \geq 0$$

entonces:

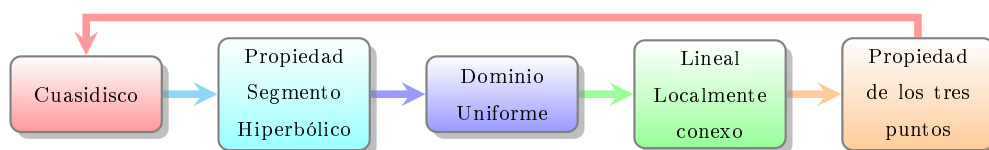
$$|f(z_2) - f(z_0)| \leq (2c)^{t+1} |f(z_1) - f(z_0)|$$

donde $c = e^{8K}$.

Capítulo 2

Tabla de implicaciones

Pasamos ahora al capítulo clave de este trabajo. En él, se prueba la equivalencia de todas las propiedades sobre cuasidiscos enunciadas anteriormente. Para ello, seguiremos el siguiente diagrama:



2.1 Cuasidisco \Rightarrow Propiedad del segmento hiperbólico.

Antes de probarlo, hace falta nombrar un par de lemas.

Lema 2.1.1. *Sea Ω un disco o un semiplano, Ω' un K -cuasidisco y sea $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ conforme. Entonces f tiene una extensión K^2 -cuasiconforme en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Por ser Ω' un K -cuasidisco, existe una $g: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $g(\Omega') = \mathbb{D}$.

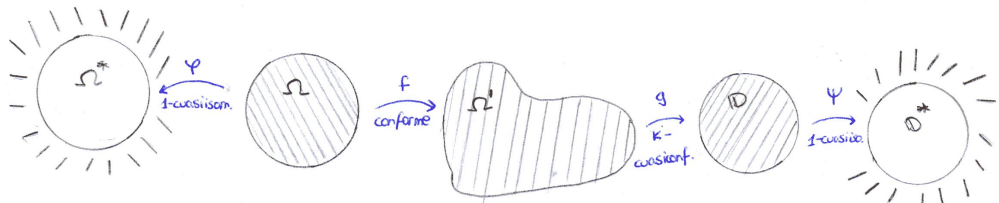
Definimos la composición $h = g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$.

Por **Prop 1**, h es K -cuasiconforme en Ω y, por **Prop 2**, puede extenderse a un homeomorfismo de $\overline{\Omega}$ en $\overline{\mathbb{D}}$.

Pero, buscamos una extensión de $\overline{\mathbb{C}}$ a $\overline{\mathbb{C}}$.

Para ello, consideramos φ como la reflexión respecto a $\partial\Omega$ y ψ la reflexión respecto a $\partial\mathbb{D}$. (Nota: ambas reflexiones son 1-cuasiisometrías de \mathbb{C} que fijan las fronteras y lleva Ω a Ω^* y \mathbb{D} a \mathbb{D}^* , respectivamente).

Redefinimos $h(z) = (\psi \circ g \circ f \circ \varphi)(z)$ para $z \in \Omega^*$.



De modo que h es también K -cuasiconforme en Ω^* y, por tanto, en $\Omega \cup \Omega^* = \overline{\mathbb{C}}$.

Si tomamos $f(z) = (g^{-1} \circ h)(z)$ para $z \in \Omega^*$, de nuevo por **Prop 1** conseguimos una función K^2 -cuasiconforme en Ω^* , en Ω y por tanto en $\overline{\mathbb{C}}$. De esta manera, ya hemos encontrado la extensión de $f(z)$ K^2 -cuasiconforme. ■

Lema 2.1.2. Sea Ω un K -cuasidisco con $\infty \in \partial\Omega$ y sea $f: \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\Omega}$ un homeomorfismo que es conforme en \mathbb{H} con $f(\infty) = \infty$. Entonces,

$$\int_0^y |f'(it)| dt \leq A \text{dist}(f(iy), \Omega)$$

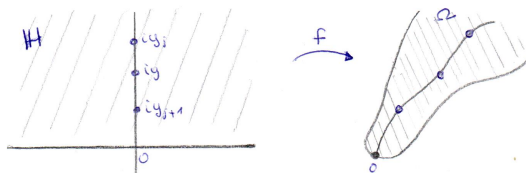
para $0 < y < \infty$ donde $A = A(K)$

Demostración. El lema anterior nos asegura que f tiene una extensión K^2 -cuasiconforme en \mathbb{C} . Con un cambio de variables podemos asumir que $f(0)=0$.

Fijado $y_0 \in (0, \infty)$, se elige una sucesión $\{y_j\}$ tal que $0 < y_{j+1} < y_j < \infty$ tal que

$$|f(iy_j)| = c^{-j} |f(iy_0)| \tag{2.1}$$

para $j = 1, 2, \dots$, donde $c = e^{8K^2}$.



Fijado un subíndice j :

Para $y_{j+1} \leq y \leq y_j$,

$$\text{dist}(f(iy), \partial\Omega) \leq |f(iy) - f(0)| \leq c |f(iy_j) - f(0)| = c^{-j+1} |f(iy_0)| \tag{2.2}$$

Donde la segunda desigualdad se sigue del **teorema 1.4.5** tomando $z_2 = iy, z_0 = 0, z_1 = iy_j$ junto con (2.1) y $f(0) = 0$.

Además por el **teorema 1.4.2** de Kőebe:

$$|f'(iy)| \leq 4 \cdot \frac{\text{dist}(f(iy), \partial\Omega)}{\text{dist}(iy, \partial H)} \leq_{\star} 4 \cdot c^{-j+1} \frac{|f(iy_0)|}{y}$$

★ Usando (2.2).

Entonces

$$\int_{y_{j+1}}^{y_j} |f'(iy)| dy \leq 4 \cdot c^{-j+1} |f(iy_0)| \int_{y_{j+1}}^{y_j} \frac{dy}{y} = 4 \cdot c^{-j+1} |f(iy_0)| \log \left(\frac{y_j}{y_{j+1}} \right)$$

Ahora buscamos una cota para $\log \left(\frac{y_j}{y_{j+1}} \right)$:

Tomaremos $k > 0$ el entero más pequeño para el que $c \leq 2^k$. Entonces:

$$|f(iy_j) - f(0)| \leq 2^k |f(iy_{j+1}) - f(0)|$$

Y aplicando el **Corolario 1.4.5.1** con $z_2 = iy_j, z_0 = 0, z_1 = iy_{j+1}$ y $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ K-cuasiconforme (por **Prop.2**):

$$\begin{aligned} y_j = |iy_j - 0| &\leq (2c)^{k+1} |iy_{j+1} - 0| = (2c)^{k+1} y_{j+1} \\ \Rightarrow \log \left(\frac{y_j}{y_{j+1}} \right) &\leq \log \left(\frac{(2c)^{k+1} y_{j+1}}{y_{j+1}} \right) = (k+1) \log(2c) = c_1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^{y_0} |f'(iy)| dy = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{y_{j+1}}^{y_j} |f'(iy)| dy \leq 4c_1 |f(iy_0)| \sum_{j=0}^{\infty} c^{-j+1} = c_2 |f(iy_0)|$$

Finalmente, fijamos un $x \in \partial\mathbb{H}$, usando de nuevo **Teorema 1.4.5** esta vez con $z_2 = 0, z_0 = iy_0, z_1 = x$:

$$|f(iy_0)| \leq c |f(x) - f(iy_0)| \Rightarrow |f(iy_0)| \leq c \text{dist}(f(iy_0), \partial\Omega)$$

Así que,

$$\int_0^{y_0} |f'(iy)| \leq c_2 \cdot c \cdot \text{dist}(f(iy_0), \partial\Omega)$$

☑ $A = c \cdot c_2 = 4c_1 \sum_{j=0}^{\infty} c^{-j+1} = 4(K+1) \log(2c) \sum_{j=0}^{\infty} c^{-j+2}$ donde $c = e^{8K}$ y, por tanto, A sólo depende de K. ■

Teorema 2.1.3. Si Ω es un K -cuasidisco, entonces, Ω tiene la propiedad del segmento hiperbólico.

Demostración. Fijado un segmento hiperbólico $\alpha \in \Omega$ que une z_1 y z_2 en Ω , queremos encontrar a, b constantes tal que α cumple

$$\ell(\alpha) \leq a|z_1 - z_2| \tag{2.3}$$

y para cada $z \in \alpha$

$$\min_{i=1,2} \ell(\alpha_i) \leq b d(z, \partial\Omega) \tag{2.4}$$

donde α_1, α_2 son las componentes $\alpha \setminus \{z\}$.

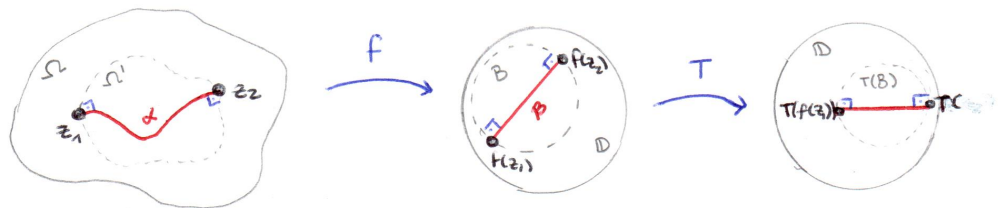
Vamos a realizarlo en varios pasos:

PASO I: ¿Existe dicho segmento hiperbólico en un cuasidisco?

Sea Ω un K -cuasidisco y sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ conforme (existe por **teorema 1.4.1**: Aplicación Conforme de Riemann). Gracias al **Lema 2.1.1** existe una función K^2 -cuasiconforme que extiende f a \mathbb{C} que lleva Ω a \mathbb{D} de manera conforme.

Entonces, para cualquier par de puntos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1), f(z_2) \in \mathbb{D}$. Además tomando $B = B(z_0, r)$ donde $z_0 = \frac{f(z_1) + f(z_2)}{2}$ y $r = \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{2}$, tenemos que $\Omega' = f^{-1}(B) \in \Omega$ es un K^2 -cuasidisco acotado.

Si utilizamos una transformación de Möbius, por ejemplo, $T(z) = \frac{z - f(z_1)}{f(z_2) - f(z_1)}$, conseguimos que $f(z_1)$ y $f(z_2)$ sean valores reales.



Sea β el segmento que une $f(z_1)$ y $f(z_2)$ en \mathbb{D} .

Entonces $T(\beta)$ es segmento hiperbólico en $t(B)$ por ser $f(z_1)$ y $f(z_2)$ puntos diametrales y, además, tanto T como f conservan ángulos, por tanto, β y $\alpha = f^{-1}(\beta)$ son segmentos hiperbólicos en \mathbb{D} y en Ω' respectivamente.

☑ Existencia de segmento hiperbólico.

Para continuar la prueba nos centraremos en el caso en el que Ω es acotado y α es línea hiperbólica en Ω . (Si Ω no fuese acotado, consideraríamos un subconjunto acotado de él).

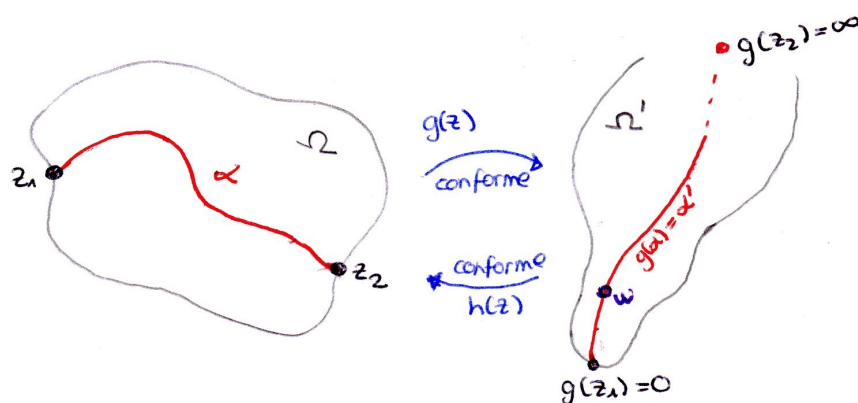
PASO II: ¿Para qué valor de a se verifica la primera condición?

Fijamos $z_1, z_2 \in \partial\Omega$.

Para calcular la longitud de α utilizamos la función auxiliar conforme tal que $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida de la siguiente manera:

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Puesto que la imagen de un K -cuasidisco bajo una aplicación conforme es un K -cuasidisco (por **Prop 1**), definimos $\Omega' = g(\Omega)$.



Y sea $h(z)$ la inversa de g :

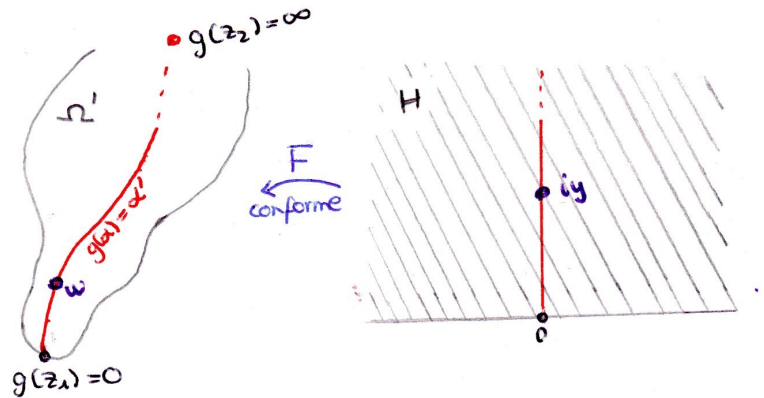
$$h(w) = \frac{z_1 - wz_2}{1 - w} \Rightarrow h'(w) = \frac{z_1 - z_2}{(1 - w)^2}$$

De modo que

$$\ell(\alpha) = \int_{\alpha'} |h'(w)| |dw| = |z_1 - z_2| \int_{\alpha'} \frac{|dw|}{|1 - w|^2}$$

Vamos por buen camino. Basta con encontrar una cota para $\int_{\alpha'} \frac{|dw|}{|1 - w|^2}$.

Para ello, gracias al **teorema 1.4.1** (App.Riemann) podemos definir otra función conforme $F : \mathbb{H} \rightarrow \Omega'$ pidiendo que $F(0) = g(z_1) = 0$ y $F(\infty) = g(z_2) = \infty$. De esta manera, el eje imaginario corresponde a $F^{-1}(\alpha')$ pues es el único segmento hiperbólico que une 0 y ∞ en \mathbb{H} .



Justamente nos encontramos bajo las hipótesis de **Lema 2.1.1** y, por tanto, F extiende un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{H}}$ a $\overline{\Omega'}$.

De modo que si $w \in \alpha'$, entonces $w = F(iy)$ para algún $0 < y < \infty$. Si parametrizamos por longitud de arco se tiene:

$$s = \int_0^y |F'(it)| dt \leq \star c_1 d(F(iy), \partial\Omega') = c_1 d(w, \partial\Omega') \quad (2.5)$$

\star por **Lema 2.1.2**.

Entonces,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{|1-w(s)|^2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{|1-w(s)|^2} + \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{|1-w(s)|^2}$$

Para los s tales que $0 < s < s_0$ usamos que

$$|1-w| \geq 1-|w| \geq 1-s$$

pues s es parámetro de longitud de arco.

Para los s tales que $s_0 < s < \infty$ usamos que

$$|1-w| \geq d(w, \partial\Omega) \geq \frac{s}{c_1}$$

donde la primera desigualdad se debe a que $\infty \notin \Omega$ y entonces $1 = g(\infty) \notin \Omega'$ y la segunda desigualdad se sigue de (2.5).

De esta manera,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{|1-w(s)|^2} \leq \int_0^{s_0} \frac{ds}{(1-s)^2} + \int_{s_0}^\infty \left(\frac{c_1}{s}\right)^2 ds$$

Optimizando esta expresión:

$$\frac{1}{1-s_0} - \frac{c_1}{s_0} = 0 \Leftrightarrow s_0 - c_1 + c_1 s_0 = 0 \Leftrightarrow s_0 = \frac{c_1}{1+c_1}$$

Por tanto, en la primera integral s como mucho vale s_0 . Luego $1-s \geq 1-s_0 = 1 - \frac{c_1}{1+c_1} = \frac{1}{1+c_1}$.

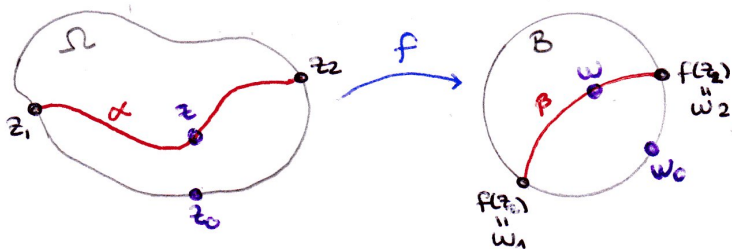
$$\int_0^\infty \frac{ds}{|1-w(s)|^2} \leq \int_0^{s_0} (1+c_1)^2 ds + \int_{s_0}^\infty \left(\frac{c_1}{s}\right)^2 ds = (1+c_1)^2 s_0 + \frac{c_1}{s_0} = 2c_1(1+c_1)$$

✓ Hemos conseguido $a = 2c_1(1+c_1)$

PASO III: ¿Qué valor de b verifica la segunda propiedad?

Como Ω es acotado, veíamos al inicio de la prueba que existe $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que lleva Ω a \mathbb{D} conformemente con $f(\infty) = \infty$.

Se fija $z \in \alpha$ y se elige $z_0 \in \partial\Omega$ con $|z - z_0| = \text{dist}(z, \partial\Omega)$. Se considera w_1, w_2, w, w_0 las imágenes de z_1, z_2, z, z_0 bajo f .



Como β es línea hiperbólica en B ,

$$\min_{i=1,2} |w - w_i| \leq \star 2d(w, \partial B) \leq 2|w - w_0|$$

★ Como mucho se puede tomar w_1 y w_2 como dos puntos diametrales y $w = w_i$.

Recurriendo al **Corolario 1.4.5.1** tomando $z_0 = w$, $z_1 = w_0$, $z_2 = w_j$ para $j = 1, 2$ y considerando $f^{-1}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que es K -cuasiconforme (por **Prop 2**) tenemos

$$\min_{i=1,2} |z - z_i| \leq (2c)^2 |z - z_0| = 4c^2 d(z, \partial\Omega) \quad \text{con } c = e^{8K}$$

Además tenemos α_i es una componente de $\alpha \setminus \{z\}$ que tiene a z_i como punto final y cumple la primera propiedad, es decir, $\ell(\alpha_i) \leq a|z_i - z|$.

Por tanto

$$\min_{i=1,2} \ell(\alpha_i) \leq \min_{i=1,2} a|z_i - z| \leq 4ac^2 d(z, \partial\Omega)$$

✓ Hemos conseguido $b = 4ac^2 = 8c_1(1 + c_1)e^{8K}$ ■

2.2 Propiedad Segmento Hiperbólico \Rightarrow Dominio Uniforme.

La primera propiedad nos produce automáticamente la condición de uniformidad. Basta con fijar $z_1, z_2 \in \Omega$ y entonces existe un único segmento hiperbólico en Ω con la condición requerida.

2.3 Dominio Uniforme \Rightarrow Lineal Localmente conexo.

Teorema 2.3.1. *Si Ω es dominio uniforme entonces Ω es lineal localmente conexo con $c = 2 \max\{a, b\} + 1$.*

Demostración. Fijado un $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ y $0 < r < \infty$ hay que ver cuál es el valor de c que verifica:

(H.1) Existe un arco $\alpha \in \Omega \cap \overline{B}(z_0, cr)$ que une cada par de puntos de $\Omega \cap \overline{B}(z_0, r)$.

(H.2) Existe un arco $\beta \in \Omega \setminus B(z_0, r/c)$ que une cada par de puntos de $\Omega \setminus B(z_0, r)$.

Vamos a realizarlo en varios pasos:

PASO I: ¿Qué valor de c cumple la propiedad (H.1)?

Supongamos que $z_1, z_2 \in \Omega \cap \overline{B}(z_0, r)$.

Si z_1, z_2 pertenecen a la misma componente conexa de $\Omega \cap \overline{B}(z_0, r)$ entonces por ser un dominio uniforme, el arco α que los une está contenido $\overline{B}(z_0, r)$. Luego, tomaríamos $c = 1$. (Un caso poco interesante)

Veamos qué ocurre si suponemos que z_1, z_2 pertenecen a distinta componente conexa de $\Omega \cap \overline{B}(z_0, r)$.

Como Ω es uniforme, existe un arco α en Ω que une z_1 y z_2 con longitud

$$\ell(\alpha) \leq a|z_1 - z_2| \leq a(|z_1 - z_0| + |z_0 - z_2|) \leq 2ar$$

Ahora buscamos un c tal que $\forall z \in \alpha, z \in B(z_0, cr)$. En particular si tomamos z como el punto más alejado de z_1 (es decir, z que verifica $\max\{\text{dia}(\alpha)\}$) entonces $\alpha \subset B(z_0, cr)$.

Así

$$|z - z_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| \leq \ell(\alpha) + r \leq_{\star} 2ar + r = r(2a + 1) \leq cr$$

★ Ω es uniforme.

$$\checkmark c \geq a + 1$$

PASO II: ¿Para qué valor de c se cumple la propiedad (H.1)?

Supongamos ahora que $z_1, z_2 \in \Omega \setminus B(z_0, r)$.

Con un razonamiento similar al anterior, si z_1, z_2 están en la misma componente conexa de $\Omega \setminus B(z_0, r)$, con tomar $c=1$ bastaría.

Por ello, supongamos que z_1, z_2 están en distinta componente conexa de $\Omega \setminus B(z_0, r)$.

Como Ω es uniforme, z_1 y z_2 puede unirse mediante un arco $\beta \in \Omega$ tal que $\min_{j=1,2} \ell(\beta_j) \leq bd(z, \partial\Omega)$ para cada $z \in \beta$.

Supongamos que β no une z_1 y z_2 en $B\left(z_0, \frac{r}{c}\right)$. Entonces existe un punto $z \in \beta$ con

$$|z - z_0| < \frac{r}{c} \leq \frac{r}{2b + 1}$$

y que para $j=1,2$

$$\ell(\beta_i) \geq |z_i - z| \geq |z_i - z_0| - |z_0 - z| \geq r - \frac{r}{c} = r - \frac{r}{2b + 1} = \frac{2br}{2b + 1}$$

Por tanto,

$$\text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \frac{z}{b} \min_{j=1,2}(\ell(\beta_j)) \geq \frac{2}{2b + 1}r > \frac{2r}{c} \geq |z - z_0| + \frac{r}{c}$$

$$\Rightarrow B\left(z_0, \frac{r}{c}\right) \subset \Omega.$$

Esto implica que $\Omega \setminus B\left(z_0, \frac{r}{c}\right)$ es conexo y, por tanto, z_1 y z_2 se unen mediante β .

$$\checkmark c \geq b + 1$$

Por tanto, $c = 2 \max\{a, b\} + 1$ como queríamos probar. ■

2.4 Lineal Localmente conexo \Rightarrow Propiedad de los tres puntos.

Teorema 2.4.1. *Si Ω es lineal localmente conexo, entonces satisface la propiedad de los tres puntos con $d = c^2$.*

Demostración. Continuamos con la estrategia de separar nuestro razonamiento en varios pasos:

PASO I: ¿Qué nos aporta la hipótesis?

Recordamos que un conjunto $\Omega \in \overline{\mathbb{C}}$ es linealmente local conexo si existe una constante c tal que $\forall z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ y $0 < r < \infty$,

(H.1) Existe un arco $\alpha \in \Omega \cap \overline{B}(z_0, cr)$ que une cada par de puntos de $\Omega \cap \overline{B}(z_0, r)$.

(H.2) Existe un arco $\beta \in \Omega \setminus B(z_0, r/c)$ que une cada par de puntos de $\Omega \setminus B(z_0, r)$.

PASO II: ¿Qué queremos conseguir?

1. ¿ Ω es un dominio de Jordan?
2. Si para cada par $z_1, z_2 \in \partial\Omega$, $\min_{j=1,2} \text{dia}(\gamma_j) \leq d|z_1 - z_2|$ donde γ_1, γ_2 son las componentes de $\partial\Omega \setminus \{z_1, z_2\}$. ¿Cuál es el valor de d ?

1. $\partial\Omega$ es localmente conexo pues si $z_0 \in \mathbb{C}$ de $\partial\Omega$, sabemos que dado un entorno $V_{z_0} = \overline{B}(z_0, r)$ por (H.1) podemos encontrar $\overline{B}(z_0, cr) \subset U_{z_0}$ siendo U_{z_0} otro entorno de z_0 . En el caso en que $z_0 = \infty$, por (H.2) sabemos que dado $V_{z_0} = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r)$ podemos tomar $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r/c) \subset U_{z_0}$. En ambas opciones, $V_{z_0} \cap \Omega \subset U_{z_0} \cap \Omega$ (def. de conexión local).

Además (H.2) nos garantiza que $\partial\Omega$ no tiene autointersecciones, es decir, es una curva simple. Por tanto, no tiene puntos de corte. Gracias al **teorema 1.4.4**, obtenemos que $\partial\Omega$ es una curva de Jordan y, en consecuencia, Ω es un dominio de Jordan. Como queríamos ver.

2. A continuación se presenta la idea de la prueba:

Para ello, consideramos d como una constante cuyo valor especificaremos al final de la prueba.

Si fijamos dos puntos de la frontera z_1, z_2 y tomamos

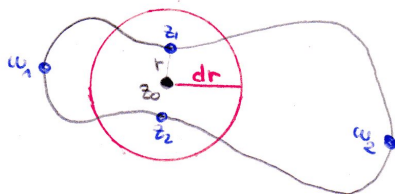
$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad y \quad r = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$$

Queremos ver que $B(z_0, dr)$ contiene al arco de frontera con menor diámetro.

Por reducción al absurdo, supongamos que no se verifica para llegar a contradicción.

Luego, debe existir dos puntos w_1, w_2 tal que

$$w_j \in \gamma_j \setminus B(z_0, dr) \quad j = 1, 2$$



Por ser linealmente local conexo (H.2), existe un arco β que une w_1 y w_2 y que $\beta \in \Omega \setminus B(z_0, \frac{dr}{c})$. Además, como $z_1, z_2 \in B(z_0, r)$ por construcción, nuestra (H.1) nos asegura que existe un arco $\alpha \in B(z_0, cr)$ que une z_1 y z_2 .

De modo que

$$\alpha \cap \beta = B(z_0, cr) \setminus B\left(z_0, \frac{dr}{c}\right)$$

Si $d = c^2$ obtenemos $\alpha \cap \beta = \emptyset$ lo que nos conduce a contradicción pues Ω es conexo y se puede encontrar un arco $\beta \in \partial\Omega$ que une w_1 con w_2 y otro arco $\alpha \in \partial\Omega$ que une z_1 y z_2 tales que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

Por tanto, si $d = c^2$, el dominio Ω satisface la propiedad de los tres puntos.

Pero...¡ATENCIÓN! En esta idea hay una pequeña trampa pues $z_1, z_2 \notin B(z_0, r)$, tal cual se han definido. Para remediarlo, tenemos que jugar con bolas centradas en z_0 y de radio t y s siendo $r < s < t$, con lo que la prueba se hace mucho más técnica. Apelamos a [1 p.56] para más detalles. ■

2.5 Propiedad de los tres puntos \Rightarrow Cuasidisco.

Nos servirá de gran ayuda ver primero el siguiente lema que nos proporciona una estimación del módulo de una familia de curvas.

Lema 2.5.1. *Sea Ω dominio que satisface la propiedad de los tres puntos y sean α_1 y α_2 arcos disjuntos de $\partial\Omega$. Supongamos que Γ y Γ^* son familias de curvas que unen α_1 y α_2 en Ω y Ω^* respectivamente.*

Si $\text{mod}(\Gamma) = 1$ entonces $\text{mod}(\Gamma^) \leq c$, siendo $c = \pi(2d^2e^{2\pi} + 1)^2$*

Nota: Para mantener una extensión adecuada en este trabajo, no presentamos la prueba que puede verse en [1 p.57]. La idea se relaciona con el **Ejemplo 3** donde estimábamos el módulo de una familia de curvas en un anillo.

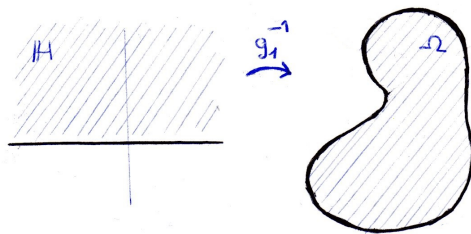
Y ahora nos enfocaremos en la siguiente prueba (la más bonita de este trabajo) donde, en primer lugar, construiremos una función auxiliar que será cuasisimétrica y, a continuación, se probará que tiene una extensión cuasiconforme.

Teorema 2.5.2. *Si Ω satisface la propiedad de los tres puntos, entonces Ω es un K -cuasidisco con $K=K(d)$.*

Demostración. Necesitamos ver que existe una función f K -cuasiconforme de $\overline{\mathbb{C}}$ en sí mismo que lleve Ω al semiplano \mathbb{H} .

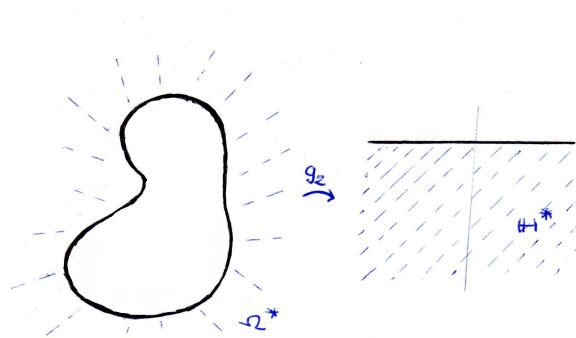
PASO I: Construcción de una función auxiliar

Por **teorema 1.4.1: App. Riemann** sabemos que existe una aplicación que lleva Ω a \mathbb{D} y si componemos con una transformación de Möbius, obtenemos $g_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$.



Además, por la **Prop.3** de las funciones K -cuasiconformes, dicha función puede extenderse de $\overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$

Con la misma argumentación, podemos considerar $g_2 : \overline{\Omega}^* \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^*$.



Definimos:

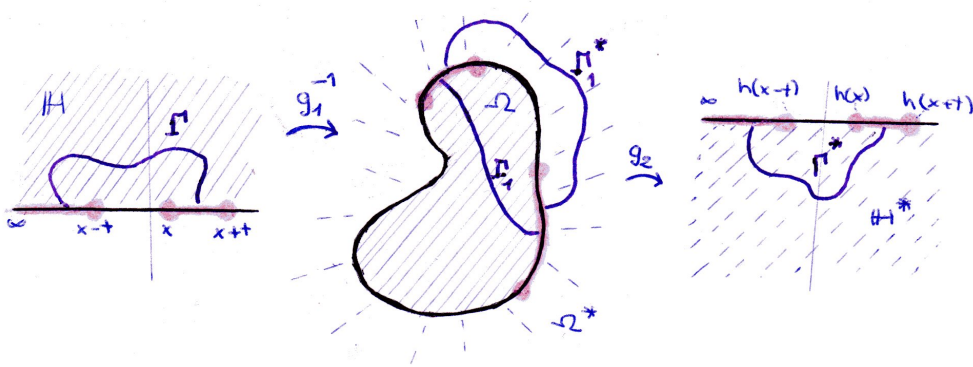
$$h(x) = (g_2 \circ g_1^{-1})(x) \quad x \in \partial\Omega$$

NOTA: Por ser composición de aplicaciones de Riemann, $h(x)$ es una función creciente y $h(\infty) = \infty$.

PASO II: Condición de cuasisimetría

Fijado un punto $x \in \partial\Omega$, $c > 0$ y $t \in \partial\Omega$ tal que $x < t$, tomamos el intervalo $(-\infty, x - t) \cup (x, x + t) \in \partial\mathbb{H}$.

Consideramos Γ la familia de curvas en \mathbb{H} que une el intervalo $(-\infty, x - t) \cup (x, x + t)$ y Γ^* la familia de curvas en \mathbb{H}^* que unen el intervalo $(-\infty, h(x - t)) \cup (h(x), h(x + t))$, como se ilustra en la siguiente imagen:



siendo $\Gamma_1 = g_1^{-1}(\Gamma)$ y $\Gamma_1^* = g_2^{-1}(\Gamma^*)$.

Ahora bien, como vimos en el **ejemplo 2** del cálculo de los módulos de ciertas familias de curvas, esta vez tomando $x_1 = x - t$, $x_2 = x$ y $x_3 = x + t$, sabemos que existe $m(t)$ función de \mathbb{R} a \mathbb{R} creciente con $m(1) = 1$ y tal que:

$$\text{mod}(\Gamma) = m\left(\frac{x + t - x}{x - x + t}\right) = m(1) = 1$$

Puesto que el módulo es invariante conforme, $\text{mod}(\Gamma_1) = \text{mod}(\Gamma) = 1$.

Además, como Ω cumple la propiedad de los tres puntos, podemos aplicar el **lema 2.5.1** a la familia Γ_1 con $\alpha_1 = g^{-1}((\infty, x - t))$, $\alpha_2 = g^{-1}((x, x + t))$ y obtener que:

$$\text{mod}(\Gamma_1^*) \leq c$$

De nuevo por invarianza conforme (g_2 es app de Riemman):

$$\begin{aligned} \text{mod}(\Gamma_1^*) &= \text{mod}(\Gamma^*) \leq c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{mod}(\Gamma^*) &= m \left(\frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \right) \leq c \end{aligned}$$

Por ser $m(t)$ función creciente, podemos considerar su inversa y conseguir la siguiente cota:

$$\Rightarrow \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq m^{-1}(c) = b$$

Ahora bien, si intercambiamos los papeles de los intervalos por $(\infty, x-t) \cup (x, x+t)$ $(x-t, x) \cup (x+t, \infty)$, obtenemos la condición de cuasiisometría:

$$\frac{1}{b} \leq \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leq b \quad (2.6)$$

PASO III: Extensión K-cuasiconforme

Definimos

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{2} (\alpha(z) + \beta(z)) + \frac{i}{2} (\alpha(z) - \beta(z)), \quad z \in \mathbb{H} - \{\infty\} \\ G(\infty) &= \infty \end{aligned}$$

$$\text{siendo } \alpha = \int_0^1 h(x+ty)dt \text{ y } \beta(z) = \int_0^1 h(x+ty)dt$$

Pero...¿de verdad $G(z)$ es una extesión K-cuasiconforme de $h(x)$?. Para verlo nos preguntamos:

- Paso III. (a) : ¿ $G(z)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$?
- Paso III.(b): ¿Cuál es la constante K que acota $D_{G(z)}$?

Vamos allá:

Paso III.(a): Citando el siguiente lema [**3, p.16**]:

"Toda función inyectiva y continua de un abierto del plano a otro conjunto del plano es un homeomorfismo."

Nuestra función $G(z)$ es continua pues $h(z)$ es confome y, además, la continuidad bajo integrales se mantiene.

Pasamos a comprobar la inyectividad de dicha función, es decir,

¿dados $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ tales que $G(z_1) = G(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$?

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(z_1) + \beta(z_1) = \alpha(z_2) + \beta(z_2) \\ \alpha(z_1) - \beta(z_1) = \alpha(z_2) - \beta(z_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(z_1) = \alpha(z_2) \\ \beta(z_1) = \beta(z_2) \end{array} \right\}$$

Haciendo un cambio de variables:

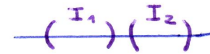
$$\alpha(z_1) = \frac{1}{y_1} \int_{x_1}^{x_1+y_1} h(\xi) d\xi = \frac{1}{y_2} \int_{x_2}^{x_2+y_2} h(\xi) d\xi = \alpha(z_2)$$

$$\beta(z_1) = \frac{1}{y_1} \int_{x_1-y_1}^{x_1} h(\xi) d\xi = \frac{1}{y_2} \int_{x_2-y_2}^{x_2} h(\xi) d\xi = \beta(z_2)$$

Para comprobar que ambas igualdades son ciertas sólo si $z_1 = z_2$, procederemos de la siguiente manera:

Denotamos $I_1 = [x_1, x_1 + y_1]$ y $I_2 = [x_2, x_2 + y_2]$.

Supongamos que $x_1 \leq x_2$.



• $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

En este caso, como h es creciente tenemos que

$$\alpha(z_1) = \frac{1}{y_1} \int_{I_1} h(\xi) d\xi < \frac{1}{y_2} \int_{I_2} h(\xi) d\xi = \alpha(z_2)$$

ya que el teorema del valor medio para integrales nos garantiza que $\exists c_1, c_2$ tal que $c_1 \in I_1$, $c_2 \in I_2$ y $\alpha(z_1) = h(c_1) < h(c_2) = \alpha(z_2)$.

Obs: Hay convexidad en las medias de funciones crecientes, es decir, $\exists t \in [0, 1]$ tal que

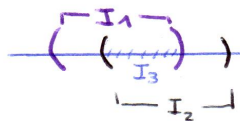
$$\frac{1}{y_1 + y_2} \int_I h(\xi) d\xi = t \cdot \frac{1}{y_1} \int_{I_1} h(\xi) d\xi + (1 - t) \cdot \frac{1}{y_2} \int_{I_2} h(\xi) d\xi$$

siendo $I = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Comprobación: Por ser intervalos disjuntos $|I_1 + I_2| = |I_1| + |I_2|$,

$$\frac{1}{|I_1 + I_2|} \int_I h(\xi) d\xi = \frac{|I_1|}{|I_1 + I_2|} \int_{I_1} h(\xi) d\xi + \frac{|I_2|}{|I_1 + I_2|} \int_{I_2} h(\xi) d\xi \Rightarrow t = \frac{|I_1|}{|I_1 + I_2|} \quad \square$$

• $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Consideramos $I_3 = I_1 \cap I_2$.



Para estar en el caso anterior podemos tomar:

$$I_1 = I_3 \cup (I_1 \setminus I_3) \longrightarrow \frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} h(\xi) d\xi = t \cdot \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi + (1-t) \cdot \frac{1}{|I_1 \setminus I_3|} \int_{I_1 \setminus I_3} h(\xi) d\xi$$

$$I_2 = I_2 \cup (I_2 \setminus I_3) \longrightarrow \frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} h(\xi) d\xi = s \cdot \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi + (1-s) \cdot \frac{1}{|I_2 \setminus I_3|} \int_{I_2 \setminus I_3} h(\xi) d\xi$$

De esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} h(\xi) d\xi &= t \cdot \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi + (1-t) \cdot \frac{1}{|I_1 \setminus I_3|} \int_{I_1 \setminus I_3} h(\xi) d\xi < \star \\ &< \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi = s \cdot \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi + (1-s) \cdot \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi < \star \\ &< s \cdot \frac{1}{|I_3|} \int_{I_3} h(\xi) d\xi + (1-s) \cdot \frac{1}{|I_2 \setminus I_3|} \int_{I_2 \setminus I_3} h(\xi) d\xi = \frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} h(\xi) d\xi \end{aligned}$$

★ caso anterior con intervalos disjuntos.

Por tanto,

$$\frac{1}{|I_1|} \int_{I_1} h(\xi) d\xi < \frac{1}{|I_2|} \int_{I_2} h(\xi) d\xi$$

De esta manera, la igualdad entre las medias sólo se da cuando $I_2 \subset I_1$.

Razonando de la misma manera para $\beta(z_1) = \beta(z_2)$ y tomando

$I'_1 = [x_1 - y_1, x_1]$ y $I'_2 = [x_2 - y_2, x_2]$ con $x_1 \leq x_2$, se obtiene que $I'_1 \subset I'_2$.

De modo que si $x_1 \leq x_2$, entonces $x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1$ y $x_2 - y_2 \leq x_1 - y_1$.

$\Rightarrow z_1 = z_2$

☑ $G(z)$ es inyectiva.

Paso III.(b) Queremos calcular una cota para $D_{G(z)}$.

Recordemos,

$$D = D_{G(z)} = \frac{1+d}{1-d} \quad , \quad d = \left| \frac{G_{\bar{z}}}{G_z} \right| < 1$$

Para simplificar las cuentas reescribiremos $G(z) = u + iv$ siendo

$$u(x, y) = \frac{1}{2y} \int_{x-y}^{x+y} h(\xi) d\xi$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2y} \left[\int_x^{x+y} h(\xi) d\xi - \int_{x-y}^x h(\xi) d\xi \right]$$

Derivamos

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2y} [h(x+y) - h(x-y)] \\
u_y &= \frac{1}{2y} [h(x+y) + h(x-y)] - \frac{u(x,y)}{y} \\
v_x &= \frac{1}{2y} [[h(x+y) + -2h(x) + h(x-y)] \\
v_y &= \frac{1}{2y} [h(x+y) - h(x-y)] - \frac{v(x,y)}{y}
\end{aligned}$$

Sabemos que la b-condición de cuasiisometría no varía bajo traslación y dilatación, por tanto, podemos reemplazar $h(\xi)$ por $h_1(t) = h(at + b)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. De esta manera, simplificamos las derivadas.

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2}(1 - h(-1)) \\
u_y &= \frac{1}{2}(1 + h(-1)) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(t) dt \\
v_x &= \frac{1}{2}(1 - h(-1)) \\
v_y &= \frac{1}{2}(1 - h(-1)) - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 h(t) dt - \int_{-1}^0 h(t) dt \right]
\end{aligned}$$

Si denotamos

$$\gamma = -h(-1) \quad \delta = 1 - \int_0^1 h(t) dt \quad \eta = -h(-1) + \int_{-1}^0 h(t) dt$$

tenemos

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2}(1 + \gamma) & v_x &= \frac{1}{2}(1 - \gamma) \\
u_y &= \frac{1}{2}(\delta - \eta\gamma) & v_y &= \frac{1}{2}(\delta + \eta\gamma)
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$d = \frac{|(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)|}{|(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)|} = \frac{|1 + \gamma - \delta - \eta\gamma + i(1 - \gamma + \delta - \eta\gamma)|}{|1 + \gamma + \delta + \eta\gamma + i(1 - \gamma - \delta + \eta\gamma)|}$$

$$d^2 = \frac{(1 + \gamma - \delta - \eta\gamma)^2 + (1 - \gamma + \delta - \eta\gamma)^2}{(1 + \gamma + \delta + \eta\gamma)^2 + (1 - \gamma - \delta + \eta\gamma)^2} = \frac{1 - 2\gamma(\eta + \delta) + \gamma^2(1 + \eta^2) + \delta^2}{1 + 2\gamma(\eta + \delta) + \gamma^2(1 + \eta^2) + \delta^2}$$

$$\frac{1+d^2}{1-d^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1+\delta^2}{\eta+\delta} + \gamma \cdot \frac{1+\eta^2}{\eta+\delta} \right]$$

Acotamos por:

$$\frac{1}{b} \leq \gamma \leq b \quad , \quad \frac{1}{b+1} \leq \delta \leq \frac{b}{b+1} \quad , \quad \frac{1}{b+1} \leq \eta \leq \frac{b}{b+1} \quad (\clubsuit)$$

(La comprobación de estas estimaciones aparecen al final de la prueba.)

Entonces

$$\frac{1}{\gamma} \leq b, \quad 1+\delta^2 \leq \frac{(b+1)^2 + b^2}{(b+1)^2} \leq \frac{2(b+1)^2}{(b+1)^2} = 2, \quad \eta+\delta \geq \frac{2}{b+1}, \quad 1+\eta^2 \leq 2$$

$$\frac{1+d^2}{1-d^2} \leq b(b+1)$$

Como

$$\frac{1+d}{1-d} = \frac{1+d^2}{1-d^2} \cdot \frac{(1+d)^2}{1+d^2} = \frac{1+d^2}{1-d^2} \left[1 + \frac{2d}{1+d^2} \right] <_{\star} 2 \frac{1+d^2}{1-d^2}$$

$\star \quad d < 1$

Entonces

$$D = \frac{1+d}{1-d} < 2 \cdot \frac{1+d^2}{1-d^2} < 2b(b+1)$$

$$\checkmark K = 2b(b+1).$$

PASO IV: Función K-cuasiconforme que buscamos.

Hasta el momento, hemos encontrado una función $G(z)$ cuasiconforme con factor $K=2b(b+1)$ en \mathbb{H} cuya restricción sobre la frontera de \mathbb{H} es justamente la función cuasisimétrica $h(x)$. Además $G \circ g_1(z) = h \circ g_1(z) = g_2(z)$ para $z \in \partial\mathbb{H}$. De modo que

$$f(z) = \begin{cases} G \circ g_1 & z \in \overline{\Omega} \\ g_2 & z \in \Omega^* \end{cases}$$

\checkmark Es una función K-cuasiconforme de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ que lleva Ω a \mathbb{H}

$\Rightarrow \Omega$ es un cuasidisco.

↔ Para finalizar comprobaremos las estimaciones (♣):

- $\frac{1}{b} \leq \gamma \leq b$ con $\gamma = -h(-1)$.

Clave: b-cuasiisometría de $h(t)$ y $h(0) = 0, h(1) = 1$.

$$\frac{1}{b} \leq \frac{h(1)}{-h(-1)} \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{-h(-1)} \leq b$$

- Tanto para $\frac{1}{b+1} \leq \delta \leq \frac{b}{b+1}$ como para $\frac{1}{b+1} \leq \eta \leq \frac{b}{b+1}$ la clave es

$$\frac{1}{b+1} \leq \int_0^1 h(t) dt \leq \frac{b}{b+1}$$

Esta desigualdad aparece detallada en [Alfhors] tal como sigue:

Sea $F(x) = \sup h(x)$ donde $h(x) \in H_0(b)$, es decir, $h(x)$ es b-cuasiisométrica y además $h(0) = 0, h(1) = 1$.

Basta encontrar una cota para

$$\int_0^1 F(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 F\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[F\left(\frac{t}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) \right] dt$$

Consideramos $\frac{h(tx)}{h(x)} \in H_0(b)$,

$$\frac{h(tx)}{h(t)} \leq \sup \frac{h(tx)}{h(t)} = F(x)$$

En particular, para $x = \frac{1}{2}$,

$$\frac{h\left(\frac{t}{2}\right)}{h(t)} \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tomando supremos

$$\frac{F\left(\frac{t}{2}\right)}{F(t)} \leq F\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow F\left(\frac{t}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) F(t)$$

De la manera similar, consideramos $\frac{h((1-t)x+t) - h(t)}{1-h(t)} \in H_0(b)$,

$$\frac{h((1-t)x+t) - h(t)}{1-h(t)} \leq F(x)$$

En particular, para $x = \frac{1}{2}$,

$$\frac{h\left(\frac{1+t}{2}\right) - h(t)}{1 - h(t)} \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tomando supremos

$$\frac{\sup\{h\left(\frac{1+t}{2}\right) - h(t)\}}{\sup\{1 - h(t)\}} \leq F\left(\frac{1}{2}\right)$$

Despejando

$$\sup\left\{h\left(\frac{1+t}{2}\right)\right\} \leq F\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sup\{1 - h(t)\} + \sup\{h(t)\}$$

Es decir,

$$F\left(\frac{1+t}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1 - F\left(\frac{1}{2}\right)\right) F(t)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1+t}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right) + F(t)$$

Por tanto,

$$\int_0^1 F(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 F\left(\frac{1}{2}\right) + F(t) dt \Leftrightarrow \int_0^1 F(t) dt \leq F\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \triangleright$$

Como $h(x) \in H_0(b)$ se verifica,

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1 - h(1/2)}{h(1/2) - 0} \leq b \longrightarrow \frac{1}{b+1} \leq h(1/2) \leq \frac{b}{b+1}$$

$$\triangleright \Leftrightarrow \int_0^1 h(t) dt \leq \int_0^1 F(t) dt \leq h(1/2) \leq \frac{b}{b+1}$$

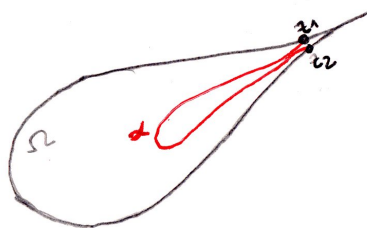
La desigualdad opuesta se consigue aplicando el resultado a $1-h(1-t)$ ■

Capítulo 3

¿Qué conjunto es (o no es) un cuasidisco?

Para fijar ideas, he aquí algunos ejemplos (y no ejemplos) de cuasidiscos.

Ejemplo I

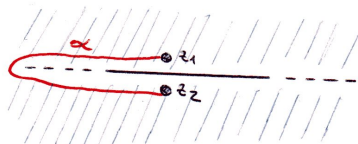


Este tipo de dominios acotados **no** nos interesa pues no cumple la propiedad de uniformidad:

Para dos puntos muy próximos al lado picudo, $|z_1 - z_2| \approx 0$ luego para cualquier segmento hiperbólico no se satisface

$$\ell(\alpha) \leq a|z_1 - z_2|$$

Ejemplo II



El dominio $\Omega = \mathbb{H} \setminus \{Im(z) = 0\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ tampoco nos interesa de la misma manera que el ejemplo anterior, **no** cumple la propiedad del segmento hiperbólico o uniformidad:

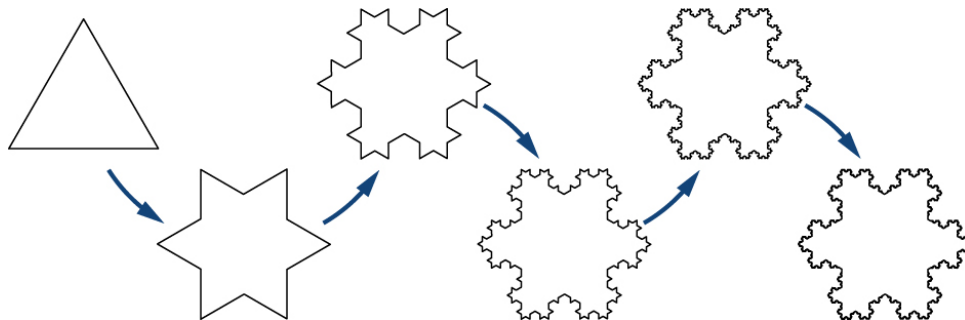
Para dos puntos muy próximos a la frontera, $d(z_i, \partial\Omega) \approx 0$ y, sin embargo, $\ell(\alpha) \gg 0$.

Sin embargo, un dominio tan curioso como es el *Copo de Nieve de Koch* sí es un cuasidisco.

Ejemplo III

Primero veamos cómo se construye dicho dominio.

1. Se toma un triángulo equilátero cuyos lados miden 1.
2. Cada arista del triángulo se divide en tres partes iguales.
3. Se reemplaza la parte central de cada partición por otro triángulo equilátero, es decir, por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de 60 grados.
4. Y volvemos al paso 2, comenzando así la siguiente iteración.



Lo sorprendente de este dominio es que verifica la propiedad de los tres puntos, y por tanto, es un cuasidisco.

Recordemos que queremos encontrar una constante d tal que para cada par de puntos $z_1, z_2 \in \partial\Omega$,

$$\min_{j=1,2} \text{dia}(\gamma_j) \leq d|z_1 - z_2|$$

donde γ_1, γ_2 son las componentes de $\partial\Omega \setminus \{z_1, z_2\}$.

Como vimos en **Ejemplo I** de esta sección, los dominios puntiagudos no nos interesan, por ello, veamos que ocurre con dos puntos z_1 y z_2 muy próximos a un vértice. Entonces $|z_1 - z_2| \simeq 0$. Y nuestra inquietud será... ¿existirá d tal que $\min_{j=1,2} \text{dia}(\gamma_j) \leq d|z_1 - z_2|$?

Este dominio es iterativo, por tanto, para cualquier par de puntos z_1 y z_2 de cualquier generación tales que $|z_1 - z_2| \simeq 0$ siempre pertenecerán a un triángulo semejante al siguiente:

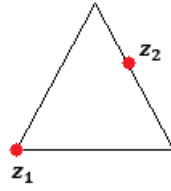


Figure 3.1: Triángulo con puntos z_1 y z_2 aleatorios

Suponiendo que z_1 y z_2 pertenecen a la primera iteración, es posible conseguir la constante d que buscamos.

Ahora bien, si z_1 y z_2 pertenecen a la segunda iteración, el triángulo que los incluye posee lados menores a $\frac{1}{3}$. Por tanto, obtendremos la constante $\frac{d}{3}$ para que se satisfaga la propiedad de los tres puntos. Y como $d > \frac{d}{3}$, podemos considerar la constante d que encontramos inicialmente.

De la misma manera, si consideramos z_1 y z_2 en la n -ésima iteración, ambos puntos se encuentran en un triángulo cuyos lados son menores que $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ y, como $d > \frac{d}{3^{n-1}}$, la constante d que obtuvimos inicialmente nos servirá para este caso y el resto de la recurrencia.

Capítulo A

Diferencial de una aplicación cuasiconforme

En este apéndice nos centraremos en comprobar la *observación de la p.3*:

"Una función K-cuasiconforme manda infinitesimalmente círculos a elipses cuya excentricidad viene controlada por el factor K."

Para ello, estudiaremos el comportamiento de la diferencial de una aplicación K-cuasiconforme.

Como ya sabemos, habitualmente expresamos un número complejo $z = x + iy$ con $i^2 = -1$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Las funciones complejas pueden interpretarse como $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy \end{aligned}$$

$\Rightarrow Df = f_x dx + f_y dy$ donde $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$

Otra manera más interesante es interpretar $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$

\mathbb{R}^2 . De modo que la diferencial puede verse como:

$Df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$Df \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Es más, cualquier matriz $M^{2 \times 2}$ puede expresarse como suma directa de una cierta matriz conforme y otra anticonforme. Es decir,

$$M^{2 \times 2} = CO_+(2) \oplus CO_-(2)$$

donde:

$$CO_+(2) = \left\{ A \in M^{2 \times 2} : A = \rho \cdot R \quad \text{tq} \quad R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2) \right\}$$

y

$$CO_+(2) = \left\{ A \in M^{2 \times 2} : A = \rho \cdot R \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

En particular, $Df \in M^{2 \times 2}$, es decir, $Df = (f_z, f_{\bar{z}})$:

Aplicando la diferencial a un vector unitario dz , obtenemos la siguiente expresión:

$$Df(dz) = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} = \rho_1 \cdot R \cdot dz + \rho_2 \cdot R \cdot d\bar{z}$$

De esta manera, una función $f(x,y)$ pasamos a expresarla como $f(z, \bar{z})$.

Otra manera más clásica de relacionar la notación compleja con la habitual es la siguiente:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \longrightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

Usando la regla de la cadena:

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

Esto nos da:

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J$$

donde J es el Jacobiano. Además, sabemos que si el Jacobiano es positivo, se preserva la orientación y si es negativo, se invierte. En estos momentos, nos interesará que el Jacobiano sea positivo. ¿Por qué?

Las funciones K-cuasiconformes son una generalización de las conformes y sabemos que $f(z)$ conforme es holomorfa, es decir, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o equivalentemente, $f_{\bar{z}} = 0$. De modo que si $f(z)$ es conforme,

$$Df(dz) = f_z dz = (f_z, 0) = \rho_1 \cdot R \cdot dz$$

De esta expresión podemos sacar dos conclusiones:

- $J = |f_z|^2 > 0$
- Una función conforme envía círculos infinitesimales a círculos infinitesimales.

Para una $f(z)$ cuasiconforme:

$$Df(dz) = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \quad (\text{A.1})$$

Afirmamos lo siguiente:

- $J = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0 \rightarrow |f_z| > |f_{\bar{z}}|$
- Una función conforme envía círculos infinitesimales a elipses con excentricidad acotada por una constante K . Por eso, frecuentemente se habla de funciones K -cuasiconformes. Veámoslo con detalle:

Antes de nada, vamos a aclarar que z pertenecen al plano dz mientras que $w = f(z)$ pertenecen al plano dw .

De (A.1) junto con desigualdad triangular, obtenemos:

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |Df(dz)| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz|$$

¿Cuándo se alcanza el límite superior?

$$\begin{aligned} |Df(dz)| = (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz| &\Leftrightarrow f_z \text{ y } f_{\bar{z}} \text{ son colineales y tienen el mismo sentido} \\ \Leftrightarrow \frac{f_{\bar{z}} d\bar{z}}{f_z dz} > 0 \end{aligned}$$

Del mismo modo, ¿Cuándo se alcanza el límite inferior?

$$\begin{aligned} |Df(dz)| = (|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| &\Leftrightarrow f_z \text{ y } f_{\bar{z}} \text{ son colineales y tienen sentidos opuestos} \\ \Leftrightarrow \frac{f_{\bar{z}} d\bar{z}}{f_z dz} < 0 \end{aligned}$$

Pero, exactamente, ¿qué vector unitario del plano dz será enviado a cada semieje de la elipse?

Para responderlo, definimos el concepto de **primera dilatación compleja**:

$$\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$$

¿Para qué ángulo se alcanza el semieje mayor?

Como acabamos de ver, el módulo máximo se alcanza cuando

$$\frac{f_{\bar{z}} d\bar{z}}{f_z dz} = \mu_f \frac{d\bar{z}}{dz} > 0$$

Sea $\mu_f = |\mu_f| e^{i \text{Arg}(\mu_f)}$ y $dz = e^{i\alpha}$ entonces $|\mu_f| e^{i \text{Arg}(\mu_f)} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (e^{i\alpha})^{-1} > 0$, es decir, ¿Cuándo este número es real?

$$\Rightarrow \text{Arg}(\mu_f) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{Arg}(\mu_f)$$

¿Para qué ángulo se alcanza el semieje menor?

Usamos que $e^{i\pi} = -1$

$$e^{i\pi} (|\mu_f| e^{i \text{Arg}(\mu_f)} \cdot e^{-i\alpha} \cdot (e^{i\alpha})^{-1}) = \mu_f \frac{d\bar{z}}{dz} < 0$$

$$\Rightarrow \pi + \text{Arg}(\mu_f) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\text{Arg}(\mu_f) + \frac{\pi}{2}$$

¿Y en el plano dw ?

Veámos la inclinación que tendrá la elipse.

$$\text{Reescribimos } Df = f_z = f_z \left(1 + \frac{f_{\bar{z}}d\bar{z}}{f_z dz} \right)$$

El semieje mayor de la elipse se alcanzará en un ángulo β tal que:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Arg}(f_z) + \text{Arg}(dz) = \\ &= \text{Arg}(f_z) + \frac{1}{2}\text{Arg}(\mu_f) = \frac{1}{2}(2\text{Arg}(f_z) + \text{Arg}(\mu_f)) = \\ &= \frac{1}{2}(\text{Arg}(f_z^2 \cdot \mu_f)) = \frac{1}{2} \left(\text{Arg} \left(\left(\frac{f_z}{|f_z|} \right)^2 \cdot \mu_f \right) \right) \end{aligned}$$

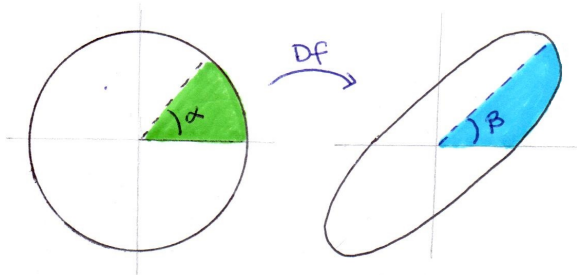
Este último término $\gamma = \left(\frac{f_z}{|f_z|} \right)^2 \cdot \mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ se conoce como la **segunda dilatación compleja** de una función $f(z)$.

Así que,

$$\beta = \frac{1}{2}\text{Arg}(\gamma)$$

De igual forma, el semieje de la elipse se alcanzará en un β' tal que:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Arg}(f_z) + \text{Arg}(dz) = \\ &= \text{Arg}(f_z) + \frac{1}{2}\text{Arg}(\mu_f) + \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\text{Arg}(\gamma) + \frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Para concluir este apartado definimos dos cantidades muy significativas para el tipo de funciones que estamos estudiando:

- $D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$ es la proporción de los semiejes de la elipse.
- $d_f = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|}$ el módulo de μ_f .

Y ambas cantidades se relacionan de la siguiente manera:

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f} \quad , \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}$$

Con todos estos detalles, queda más claro la definición que vimos al inicio del trabajo.

La función f se dice que es K -cuasiconforme si D_f está acotado, es decir, si $D_f \leq K$, o, equivalentemente $d_f \leq k = \frac{K - 1}{K + 1}$.

Cabe destacar que:

Una función f conforme $\Leftrightarrow f_{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow D_f = 1$ y $d_f = 0 \Leftrightarrow f$ es 1-cuasiconforme.

Por tanto, las funciones conformes pueden considerarse un caso muy particular de las cuasiconformes.

Bibliografía

- [1] *GEHRING, F.V., "Characteristic properties of quasidisks", Les presses de l'université de Montréal*
- [2] *ALHFORS, L.V., "Lectures on Quasiconformal Mappings", American Mathematical Society, University Lecture Serie, Vol 38.*
- [3] *LETHO, O., VIRTANEN, K.I., "Quasiconformal Mapping in the Plane", Springer-Verlag, New York.*
- [4] *POMMERENKE, C., "Univalent Functions", Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.*
- [5] *ASTALA, K., IWANIEC, T., MARTIN, T., "Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane" Princeton University Press.*