Sistemas de EDOs
1. Introducción

Madrid, Marzo 2020

Introducción

A partir de ahora estudiaremos modelos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los sistemas pueden ser muy complicados con lo que nos centraremos en el caso de dimensión dos.

El caso arquetípico es estudiar la evolución de dos o más poblaciones simultáneas. Se conoce la tasa de variación infinitesimal de cada una de las poblaciones en función de las otras.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

Llamamos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Estas funciones son, en general, no lineales.

Repaso de sistemas de E.D.O autónomos bidimensionales

Las siguientes transparencias constituyen un breve resumen. Para más información, Capítulo 11 de:

(Sim98) G.F. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales, con aplicaciones y notas históricas*. Segunda edición. McGraw-Hill, 1998.

Conceptos a recordar:

- Análisis de los puntos críticos y su establidad.
- Teorema de linearización de Lyapunov-Poincarè.
- Ecuación de las trayectorias: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}$
- Regiones positivamente invariantes.
- Orbitas cerradas. Teorema de Poincare-Bendixon.
- Integrales primeras y funciones de Liapunov.

Caso lineal: Motivación

Clasificación de puntos críticos para un sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A matriz 2×2 de coeficientes reales y constantes tal que $\det(A) \neq 0$. Así, el origen es el único punto crítico. La sección 60 de (Sim98) lo discute con detalle calculando las trayectorias.
Recordamos dos caso motivadores:
Caso 1: Dos autovalores reales: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$

La solución es $x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0$, $y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0$ cuyo comportamiento es fácil de clasificar en términos del signo de λ_1 y λ_2.

Caso lineal:Clasificación

Caso 2: Autovalores complejos: $\lambda = a\cos(\varphi) + ia\sin(\varphi)$ y $\bar{\lambda}$

$$A = aR_\varphi \quad \text{donde } R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

φ es el ángulo de rotación. La solución es $(x(t), y(t)) = e^{at}R_{\varphi t}(x_0, y_0)$ que es un centro o foco.

Casos Principales.

- Autovalores reales y distintas y del mismo signo (nodo)
- Autovalores reales distintas y de signos opuestos (punto silla)
- Autovalores complejos conjugados pero no imaginarias puras, $a \neq 0$ (nodo)

Casos Frontera.

- Autovalores reales e iguales (nodo).
- Autovalores imaginarios, $a = 0$ (centro).

Estabilidad

Las definiciones de estable, asintóticamente estable e inestable son análogas al caso de dimensión uno, vease (Sim98) página 477 últimos dos párrafos de la sección 59.

- El punto crítico es estable si, y solo si ambos autovalores tienen partes reales no positivas.
- Es asintoticamente estable si, y solo si ambos autovalores tienen partes reales negativas.
- Es asintóticamente estable si:

$$p = -(a_1 + b_2) > 0$$
$$q = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$$

Caso no lineal:Teorema de Liapunov-Poincaré

Si $F(x_\infty, y_\infty) = 0$, entonces se llama a $(x_\infty, y_\infty) = P_\infty$ punto crítico.
En muchas ocasiones su comportamiento local se puede clasificar como en el caso lineal segun los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz

$$A = DF(x_\infty, y_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\infty, y_\infty) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_\infty, y_\infty) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_\infty, y_\infty) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_\infty, y_\infty) \end{pmatrix}.$$

Decimos que P_∞ es un punto crítico simple si $det(A) \neq 0$.
Notemos que

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_\infty, y_\infty)}_{=0} + A(x,y)^t.$$

Theorem (Teorema de Liapunov-Poincaré)

- P_∞ *es asintóticamente estable si, y solo si* $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$
- P_∞ *es inestable si, y solo si existe* i *tal que* $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

Observaciones:

- Como es intuitivo cuando $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, no podemos transferir información del sistema lineal al no lineal.
- Poincaré probo que no solo la estabilidad se transfiere del sistema lineal al no lineal tambien la naturaleza (nodos, centros, puntos silla, focos)

En el caso de sistemas no lineales existen comportamientos distintos no predecidos por el lineal que son la existencia de orbitas periódicas.

Trayectorias periódicas

Una trayectoria $(x(t), y(t))_{t\geq t_0}$ es la solución de (??) con dato inicial $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$

- Una trayectoria que permanece en una curva cerrada se conoce como trayectoria cerrada.
- Una trayectoria se llama periódica si no es constante y existe $T > 0$ tal que

$$x(t+T) = x(t), \qquad y(t+T) = y(t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Un caso prototípico es el sistema en polares

$$\dot{r} = r(1-r^2),$$
$$\dot{\theta} = 1,$$

cuyas trayectorias vienen dadas por (Resolverlo)

$$z(t) = z_0 e^{it}(r_0^2 + (1-r_0^2)e^{-2t})^{-\frac{1}{2}},$$

convergen a la trayectoria periódica $r \equiv 1$.

Este comportamiento viene modelado por

Theorem (Teorema de Poincare-Bendixon)

Supongamos que una trayectoria permanece en una región acotada en la que no hay puntos críticos entonces converge a una trayectoria periódica límite.

Theorem

Una trayectoria cerrada de (??) *rodea necesariamente un punto crítico del sistema.*

El Teorema de Poincare-Bendixon se complementa con el siguiente corolario del teorema de la divergencia:

Theorem (Criterio de Bendixon)

Si en una region $div(F) \neq 0$*, entonces el sistema* $\dot{x} = F(x)$ *no tiene trayectorias cerradas.*

Integrales Primeras

Consideremos un sistema no lineal autónomo bidimensional (??).

- Una función $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (no constante) es una integral primera del sistema si $E(x(t), y(t))$ es constante, es decir,

$$\frac{dE(x(t), y(t))}{dt} = 0.$$

Típicamente ocurre en sistemas conservativos y a menudo se asocia a la energía que se preserva a lo largo de la trayectoria.

- Si un sistema admite una integral primera, las trayectorias viven en los conjuntos de nivel.
- Si los conjuntos de nivel son cerrados, las órbitas son cerradas y el punto crítico mínimo de la energia es un centro no lineal.
- La integral primera puede admitir conjuntos de nivel cerrados y otros no. Ejemplo: péndulo sin amortiguamento, Simons página 509 y su figura 86.

Funciones de Liapunov

Sea $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y sus primeras derivadas parciales son continuas. Supongamos que se anula en origen.

- Es definida positiva si $E(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq 0$.
- Es definida negativa si $E(x, y) < 0$ para $(x, y) \neq 0$.
- Es semidefinida positiva si $E(x, y) \geq 0$ para $(x, y) \neq 0$.
- Es semidefinida negativa si $E(x, y) \leq 0$ para $(x, y) \neq 0$.

Dada $E(t) = E(x(t), y(t))$, y

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} f + \frac{\partial E}{\partial y} g,$$

$E'(t) \leq 0$, es semidefinida negativa, entonces E se llama función de Liapunov. Son una generalización de la energía para sistemas no conservativos, que no la conservan sino la disipan.

E es una función de Liapunov para un punto crítico P_∞ del sistema de ecuaciones (??) si para toda trayectoria con dato próximo a P_∞ si

- E es definida positiva,
- $E(P_\infty) = 0$,
- $\tilde{E}(t) = \dfrac{dE(x(t), y(t))}{dt} \leq 0$.

Theorem

- *Si P_∞ admite función de Liapunov es estable.*
- *Si además $\tilde{E}$ es definida negativa es asintóticamente estable.*

Resto del Capítulo

Continuaremos tratando con detalle, tres modelos muy importantes que a su vez nos dan la importancia de investigar casuísticas que no están del todo contenida en el análisis anterior.

- Modelos Predador-Presa. El sistema presenta órbitas cerradas. Se puede hallar una integral primera y una función de Liapunov y también tratar directamente.
- Principio de exclusión competitiva. Se basa en el análisis de puntos críticos explicado. Para predecir el comportamiento a largo plazo se investigará la región de atracción de estos puntos críticos mediante la noción de órbitas positivamente invariantes.
- Epidemiologia. Los módelos conducen a una situación en que los puntos críticos no son aislados, por lo que se trabaja directamente sobre las trayectorias. El teorema del Umbral nos da condiciones para que brote la epidemía y las trayectorias nos dicen la evolución.