

Sistemas Dinámicos. Caos

D.Faraco y R.Orive

Madrid, Abril 2020

Los puntos de equilibrio se analizan de forma análoga al caso $n = 2$ aunque se suceden más cosas (caso lineal, Capítulo 4 de [FVV]), Capítulo 6.1 de [HSD].

- **Puntos silla.**

Índice de inestabilidad, la dimensión de su subespacio inestable. Hay variedades estables e inestables locales e incluso globales (**Teorema de Hartman-Grobman**).

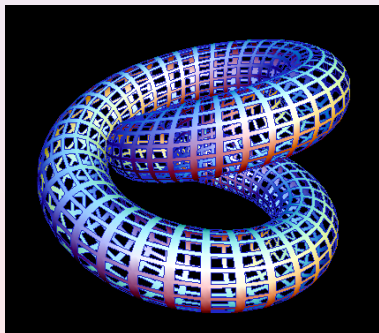
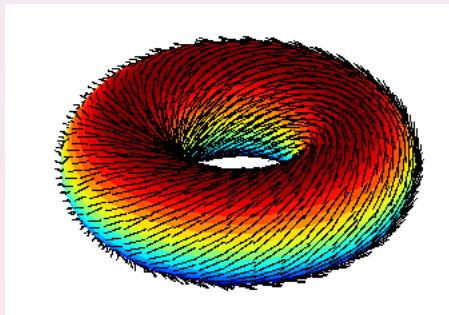
- **Puntos hipérbolicos**, que mantienen su robustez frente a perturbaciones de la ecuación.

- **Órbitas periódicas**, con comportamientos asimilables a los de dimensión 2.

La gran diferencia, **recurrencia**. Decimos una órbita $\gamma(x_0)$ es **recurrente** si en todo entorno de x_0 existen infinitos puntos de órbita. **Órbitas cuasiperiódicas**.

Recurrencia: Toros invariantes

Hay sistemas en \mathbb{R}^3 (sistemas lineales en \mathbb{R}^4) poseen **toros invariantes** sobre los que se desplazan trayectorias.



Recurrencia. Osciladores armónicos

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}x_1'' &= -\omega_1^2 x_1, \\x_2'' &= -\omega_2^2 x_2.\end{aligned}$$

Introduciendo unas nuevas variables $y_1 = x_1'$ e $y_2 = x_2'$, la solución general viene dada por:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t), \\y_1(t) &= a_2 \cos(\omega_1 t) + b_2 \sin(\omega_1 t), \\x_2(t) &= a_3 \cos(\omega_2 t) + b_3 \sin(\omega_2 t), \\y_2(t) &= a_4 \cos(\omega_2 t) + b_4 \sin(\omega_2 t)\end{aligned}$$

(Si los consideramos individualmente, tendríamos un centro en el plano (x_1, y_1) y otro centro en el plano (x_2, y_2)).

- ω_1/ω_2 racional: trayectoria periódica.
- ω_1/ω_2 irracional: trayectoria que recorre el toro sin reencontrarse en ningún punto

Órbitas periódicas

Efectivamente $(x_j(t), y_j(t))$ son periódica de periodo $\frac{2\pi}{\omega_j}$, para $j = 1, 2$. Pero si $\omega_1/\omega_2 = \frac{n}{m}$, se sigue que $\frac{n}{\omega_1} = \frac{m}{\omega_2}$ y por tanto

$$\frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{2\pi m}{\omega_2} = \tau.$$

Por tanto $\omega_1\tau = 2\pi n, \omega_2\tau = 2\pi m$ y se sigue que

$$x_i(t + \tau) = x_i(t), y_i(t + \tau) = y_i(t)$$

la solución es periódica con periodo τ .

Escribimos el sistema de forma canónica

$$x'_j = \omega_j y_j, \quad y'_j = -\omega_j x_j, \quad j = 1, 2,$$

considerando las coordenadas polares (r_j, θ_j) tal que

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 \quad \text{y} \quad \tan(\theta_j) = \frac{y_j}{x_j}.$$

Diferenciando estas fórmulas, se obtienen las ecuaciones:

$$r'_j = 0, \quad \theta'_j = -\omega_j.$$

- r_1 y r_2 permanecen constantes, 1 en particular.
- θ_1 y θ_2 son periódicas de periodo 2π .
- Las trayectorias recorren un toro de \mathbb{R}^4 .

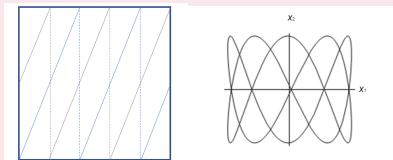
Pensar en θ_1 y θ_2 como variables en un cuadrado de longitud lateral 2π donde pegamos los lados opuestos $\theta_j = 0$ y $\theta_j = 2\pi$ para hacer el toro \mathbb{T} .

En \mathbb{T} nuestro campo vectorial ahora tiene pendiente constante

$$\frac{\theta'_2}{\theta'_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \theta_2(\theta_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1}\theta_1 + c_0$$

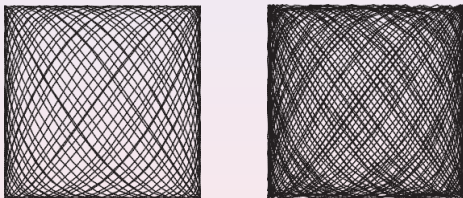
Por lo tanto, las soluciones se encuentran a lo largo de líneas rectas con pendiente ω_2/ω_1 en este cuadrado.

- Si $\omega_2/\omega_1 = n/m$, entonces la solución comenzando en $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ pasará horizontalmente a través del toro exactamente m veces y verticalmente n veces antes de volver a su punto de partida. Ejemplo $n/m = 5/2$, con \mathbb{T} y el plano x_1x_2



ω_2/ω_1 , irracional

En el caso irracional, ocurre algo bastante diferente. Vease el plano x_1x_2 después de avanzar $t = 50\pi$ y 100π para $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}$



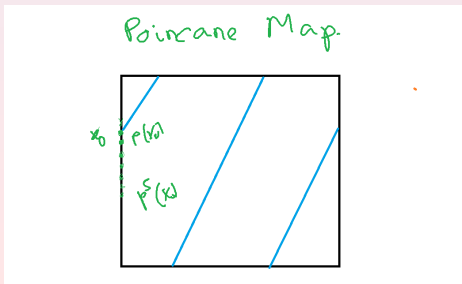
Para entender este suceso vamos a recurrir a [la función de Poincaré \$P\$ \(Poincaré map\)](#) en la circunferencia. Esto es otra idea genial de Poincaré. Para entender órbitas periódicas de sistemas continuos, lo que hacemos es generar un sistema discreto, definido por la intersección de la variedad con un plano o superficie.

ω_2/ω_1 , irracional

- $\theta_1 = 0$, el borde izquierdo de \mathbb{T} (círculo), Un punto inicial en este circunferencia, $\theta_2 = x_0$.
- Se continua la trayectoria hasta llegar a $\theta_1 = 2\pi$ en tiempo $\tau = 2\pi/\omega_1 \Rightarrow \theta_2 = x_0 + 2\pi\omega_2/\omega_1$

dado $x_0 \in (0, 2\pi)$ $x_1 = P(x_0) = x_0 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$ módulo 2π .

El conjunto de puntos $x_0, x_1 = P(x_0), \dots, x_n = P^n(x_0)$ es la órbita de x_0 bajo la iteración de P



Theorem

Suponiendo ω_2/ω_1 irracional. Entonces la órbita de P para cualquier dato inicial x_0 en la circunferencia es densa en ella.

La demostración no es difícil, pero la omitimos. [HSD] sección 6.2. Estas órbitas que no son periódicas pero casi pues se retorna a puntos muy cercanos al original, se le llaman cuasiperiódicas.

En 1884, el rey de Suecia decide entregar un premio "a un descubrimiento importante en el ámbito del análisis matemático superior". Mittag Leffler preside el tribunal (junto a Cayley, Chebisev, Hermite y Weierstrass) y los trabajos serían publicados en Acta Mathematica (fundada en 1882).

Henri Poincaré (1854-1912) eligió un problema contenido en la pregunta de si el Sistema Solar es estable para siempre, el "problema restringido de los tres cuerpos". Analizando el conjunto de las trayectorias llega a resultados sorprendentes:

- La existencia de soluciones periódicas
- De soluciones asintóticas
- Teorema de recurrencia
- Teoría de los exponentes característicos
- La **estabilidad**

En enero de 1889, ML notifica a Poincaré que ha obtenido el galardón y entrega a Phragmén el manuscrito (250 páginas) para su edición. Este se cartea con Poincaré para la mejora de su redacción. Poincaré mejora los puntos que le señala pero uno le hace ver que la **estabilidad es FALSA**. Hay trayectorias que se cruzan una infinidad de veces. "Estas intersecciones forman una especie de malla, de tejido, de red con mallas infinitamente apretadas". "Nos asombraríamos de la complejidad de esta figura, que ni siquiera intento trazar." (**Atractor caótico**)

Hace una nueva versión sin la estabilidad y se la envía en noviembre. Llega tarde, el número se ha publicado. Poincaré logra retirar su distribución, y publica el número de sus propios fondos. Poincaré aprovecho y desarrollo todas las consecuencias en *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1893).

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n con flujo ϕ_t . La teoría del caos tiene tres ingredientes:

- 1 **Movimiento oscilante.** Órbita periódica u órbita cuasiperiódica cuando $t \rightarrow \infty$.
- 2 **Determinismo.** El comportamiento irregular, en dimensión finita, surge de la no linealidad no del azar (estocástico).
- 3 **Sensibilidad a las condiciones.** Condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos diferentes pasado un tiempo suficientemente largo (**efecto mariposa**).

Los sistemas caóticos se caracterizan por ser modelizables mediante un sistema dinámico que posee un **atractor** Λ . Se caracteriza:

- 1 Λ es un cjto de \mathbb{R}^n compacto e invariante
- 2 \exists abierto $U \supseteq \Lambda$ tq $\forall x \in U, \phi_t(x) \in U$ y $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_t(U)} = \Lambda$.
- 3 **Transitividad.** Dados $y_1, y_2 \in \Lambda$ y U_j entornos de y_j , hay una solución que empieza en U_1 y luego pasa por U_2

Atractor extraño

Dentro de los atractores se define como **atractor extraño** cuando el atractor exhibe dependencia sensible de las condiciones iniciales.

La más famoso de todas las ecuaciones diferenciales caóticas es el sistema formulado en 1963 por **Lorenz** como un simplificado enormemente modelo de convección atmosférica.

Lorenz consideró una celda de fluido bidimensional que se calienta desde abajo y se enfría desde arriba. Después de una fuerte simplificación se queda con tres variables:

- la tasa de "vuelco" convectivo x
- la variación de temperatura horizontal y vertical, y y z respectivamente.

El movimiento resultante condujo a un sistema 3D de ecuaciones diferenciales. que involucraba tres parámetros: el número de Prandtl $\sigma > 0$, el de Rayleigh $r > 0$, y otro parámetro $b > 0$ ($\sigma > b + 1$) que está relacionado con el tamaño físico.

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

Los tres puntos de equilibrio son:

$$(0, 0, 0), \quad Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

Origen. Los autovalores de su ecuación linealizada son $-b$ y

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right)$$

- El origen es un pozo si $0 \leq r < 1$
- $r = 1$ es un punto de bifurcación
- El origen es punto silla para $r > 1$

Puntos Q_{\pm} . La matriz linealizada es:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -Q_{\pm} \\ Q_{\pm} & Q_{\pm} & -b \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

- Como $\sigma > b + 1$, Q_{\pm} son sumideros para

$$1 < r < r^* = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

- r^* es una birfucación.

- Cuando $r > 1$, todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas a un conjunto dentro del elipsoide:

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = \nu^*,$$

para un cierto valor ν^* .

- Sea Λ el conjunto de todos los puntos cuyas soluciones permanecen para siempre (hacia adelante y hacia atrás) en este elipsoide.
- El conjunto de ω -límites de cualquier solución del sistema Lorenz debe estar en Λ .
- Cuando $1 < r < r^*$, $\Lambda = \{Q_{\pm}\}$
- Para $r \geq r^*$, ¿quién es?

$$|\Lambda| = 0$$

Theorem (Teorema de Liouville)

Sea D una región de \mathbb{R}^3 con frontera suave y sea $D(t) = \phi_t(D)$ dado por un campo autónomo $F(X)$. Sea $v(t)$ el volumen de $D(t)$. Entonces

$$\frac{dv}{dt} = \int_{V(t)} \operatorname{div}(F) dX$$

Aplicando este teorema al sistema de Lorenz:

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V$$

Por tanto $V(t) = e^{(-\sigma+1+b)t} V(0)$, que converge exponencialmente a cero. Como todas las trayectoria que empiezan en una región D convergen finalmente a Λ , el atractor extraño concluimos que el volumen de Λ es 0.

$$|\Lambda| = 0$$

Theorem (Teorema de Liouville)

Sea D una región de \mathbb{R}^3 con frontera suave y sea $D(t) = \phi_t(D)$ dado por un campo autónomo $F(X)$. Sea $v(t)$ el volumen de $D(t)$. Entonces

$$\frac{dv}{dt} = \int_{V(t)} \operatorname{div}(F) dX$$

Aplicando este teorema al sistema de Lorenz:

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V$$

Por tanto $V(t) = e^{(-\sigma+1+b)t} V(0)$, que converge exponencialmente a cero. Como todas las trayectoria que empiezan en una región D convergen finalmente a Λ , el atractor extraño concluimos que el volumen de Λ es 0.

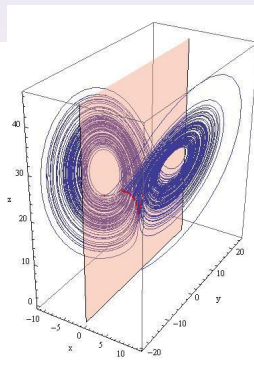
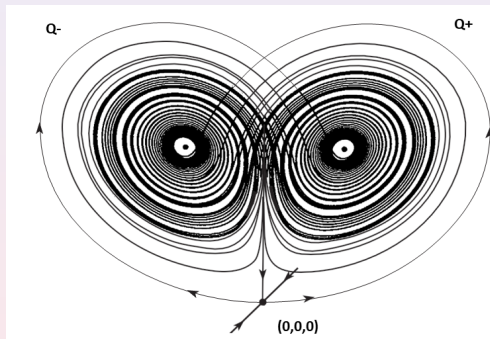
Atractor de Lorenz

Sistema de Lorenz donde los parámetros están dados por $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$:

$$\begin{cases} x' = 10(y - x) \\ y' = 28x - y - xz \\ z' = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

- Puntos de equilibrio: 0 y $Q_{\pm} = (\pm\sqrt{72}, \pm\sqrt{72}, 27)$
- Autovalores en 0 : $\lambda_1 = -8/3$ y $\lambda_{\pm} = (-11 \pm \sqrt{1201})/2$.
- Autovalores en Q_{\pm} : un único valor propio negativo real y un par de autovalores conjugados complejos con partes reales positivas.
- La simetría en el sistema obliga a las rotaciones sobre Q_+ y Q_- a tener orientaciones opuestas.

Atractor de Lorenz



Las curvas cruzan repetidas veces una porción del plano $z = 27$ que contiene Q_{\pm} . Esto sugiere

- Construir un Poincaré map Φ (muy difícil).
- Construir un modelo simplificado que imite el comportamiento que encontramos en el sistema de Lorenz. **Ejercicio**