

Modelos Discretos Unidimensionales No Lineales

Madrid, Abril 2020

En esta sección estudiamos modelos unidimensionales discretos no lineales. Los modelos discretos repiten mucho de la manera de pensar de los modelos continuos, y se repiten conceptos como puntos críticos, bifurcación etc. Sin embargo, los modelos discretos no lineales son mucho más inestables y aparecen comportamientos caóticos.

- El ejemplo canónico: La logística discreta
- Terminología de sistemas dinámicos.
- Linearización.
- Bifurcación.
- Caos: Infinitas órbitas periódicas. Teorema de Li-Yorke.

Discreto versus continuos

En este tema se estudian modelos discretos unidimensionales del tipo

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (1)$$

donde $x(n) \in \mathbb{R}$ representa el valor de la variable x en la etapa n . La relación anterior nos dice que el valor en la etapa $n+1$ viene dado por una ley que depende solo de la etapa n . Esta ley va a ser **no lineal**. Para relacionar (??) con los sistemas continuos se define

$$f(x(n)) = x(n) + \tilde{f}(x(n)) = (Id + \tilde{f})(x(n))$$

de modo que,

$$x(n+1) = x(n) + \tilde{f}(x(n)).$$

Observamos que si reescalamos a un paso h y pasamos al límite

$$x(t+h) - x(t) = h\tilde{f}(x(t)) \Rightarrow \dot{x} = \tilde{f}(x).$$

Ocurre que hay procesos, que son genuinamente discretos: la tasa de cambio ocurre cada día, cada año, por lo que al hacer el paso al límite se puede perder información.

El ejemplo canónico no lineal es la **ecuación logística discreta**:

$$y(n+1) - y(n) = ay(n) \left(1 - \frac{y(n)}{K}\right)$$
$$\Rightarrow y(n+1) = (1+a)y(n) - \frac{a}{K}(y(n))^2$$

Haciendo el cambio de escala

$$x(n) = \frac{ay(n)}{K(1+a)},$$

se tiene que

$$x(n+1) = (1+a)x(n)(1-x(n))$$

la **ecuación logística normalizada**.

Notación para sistemas dinámicos

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces:

- $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, f compuesto n veces.
- $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$. Al conjunto

$$\gamma(x_0) = \{x_n, n \in \mathbb{N} : x_n = f^n(x_0)\} = \bigcup_{k \geq 0} f^k(x_0),$$

se le llama la **órbita** de x_0 y a x_0 la **semilla** de la órbita.

- **Puntos fijos**, $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Dan lugar a órbitas constantes y a equilibrios.
- **Puntos periódicos**. Una semilla es **n -periódica** si $f^n(x_0) = x_0$ y $f^k(x_0) \neq x_0$ para $k < n$.

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(x_0) \quad \text{es un } n\text{-ciclo.}$$

$h(x) = (2 - x)(3x + 1)/2$ tiene un 3-ciclo $\{0, 1, 2\}$

Los n -ciclos son los "nuevos" puntos fijos de la función $g = f^n$

Definición de puntos de equilibrio

Correspondencia entre sistemas discretos y continuos:

$$f = Id + \tilde{f},$$

f no linealidad discreta y \tilde{f} no linealidad edo. Así, el punto crítico ocurría cuando $\tilde{f} = 0$, ahora ocurre en $f = Id$.

Análogo al caso continuo se define punto estable, asintóticamente estable e inestable.

- \bar{x} es atractor (sumidero) si existe un entorno $U(\bar{x})$ tal que para todo $x \in U(\bar{x})$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x}$
- \bar{x} es repulsor (fuente) si existe un entorno $U(\bar{x})$ tal que para todo $x \in U(\bar{x})$ existe un n_0 tal que si $n > n_0$, $f^n(x) \notin U - \{\bar{x}\}$

Theorem (Teorema de Linearización)

Si $|f'(\bar{x})| < 1$, \bar{x} es atractor.

Si $|f'(\bar{x})| > 1$, \bar{x} es repulsor.

Demostración Linearización

Demostración del caso $|f'(\bar{x})| < 1$.

- Por continuidad de f' existe un entorno $U(\bar{x})$ donde

$$\max_{U(\bar{x})} |f'| = \nu < 1.$$

- Por el teorema del valor medio, para todo $x, x' \in U(\bar{x})$
 $|f(x) - f(x')| \leq \nu|x - x'|$,
- En particular, $|f(x) - \bar{x}| = |f(x) - f(\bar{x})| \leq \nu|x - \bar{x}|$
y se tiene $f(x) \in U(\bar{x})$.
- Dado $x_0 \in U(\bar{x})$, iterando $f^n(x_0) \in U(\bar{x})$, y toda la órbita pertenece a $\gamma(x_0) \subset U(\bar{x})$.
- Como $f(\bar{x}) = \bar{x}$,
 $|f^n(x) - \bar{x}| = |f^n(x) - f(\bar{x})| \leq \nu|f^{n-1}(x) - \bar{x}|$, iterando
 $|f^n(x) - \bar{x}| \leq \nu^n|x - \bar{x}| \rightarrow 0$, si n tiende a infinito.

Demostración del caso $|f'(\bar{x})| > 1$.

- Existe $\nu < 1$ tal que $|f'(\bar{x})| > 1/\nu$
- Sea $U(\bar{x})$ el entorno de \bar{x} tal que

$$\min_{U(\bar{x})} |f'| = \frac{1}{\nu} > 1$$

- Sea $V(\bar{x}) = f(U(\bar{x}))$
- Sea g la función inversa de f en $V(\bar{x})$
- Como $g \circ f = Id$ en $V(\bar{x})$,

$$\max_{y \in V(\bar{x})} |g'(y)| = \nu < 1$$

- $g(\bar{x}) = \bar{x}$, \bar{x} es un atractor de g

Dado $x_0 \in U(\bar{x})$ ($x_0 \neq \bar{x}$) y supongamos que existe una sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $y = f^{n_k}(x_0) \in V(\bar{x})$ ($y \neq \bar{x}$). Entonces,

$$|x_0 - \bar{x}| = |g^{n_k}(y) - \bar{x}| \leq \nu^{n_k} |y - \bar{x}| = \nu^{n_k} |f^{n_k}(x_0) - \bar{x}|$$

Es decir

$$|f^{n_k}(x_0) - \bar{x}| \geq \frac{1}{\nu^{n_k}} |x_0 - \bar{x}|$$

que es contradicción para n_k suficientemente grande (dependiendo de x_0) a estar dentro de $U(\bar{x})$. Entonces, solo puede ocurrir:

- Que para un cierto k_0 , $f^{k_0}(x_0) = \bar{x}$
- Que para un cierto k_0 , $\forall n \geq k_0$ $f^n(x_0) \notin V(\bar{x})$.

Observación. El caso $|f'(x)| = 1$ no nos dice nada. Existen criterios basados en derivadas de mayor orden.

- $f(x) = x + x^3$, 0 es una fuente.
- $f(x) = x - x^3$, 0 es un pozo.
- $f(x) = x + x^2$, 0 es semiestable: inestable a la derecha, estable a la izquierda.

Diagrama de Pasos

Si disponemos de la gráfica de la figura, es fácil trazar la órbita de un punto concreto mediante el diagrama de pasos.

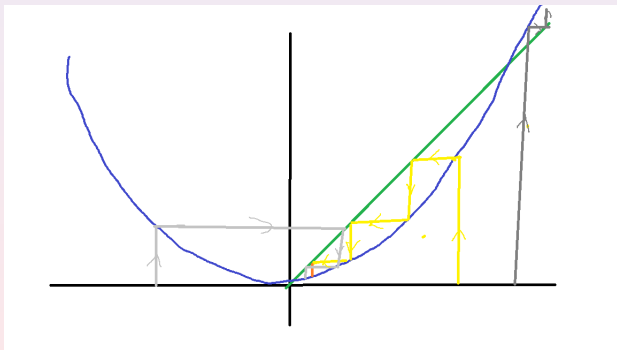


Figura: Diagrama de pasos para $f(x) = x^2$

Clasificación de puntos periódicos Sabemos, que los elementos de una órbita n -periódica son puntos fijos de la función $g = f^n$.

- $|g'(\bar{x})| < 1$ es un pozo
- $|g'(\bar{x})| > 1$ es una fuente.
- $|g'(\bar{x})| = 1$ no sabemos.

Ejemplo: $f(x) = -x^3$:

- f tiene un único punto de equilibrio $x_0 = 0$ (atractor).
- $g(x) = f^2(x) = x^9$, tres puntos de $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
- $\{-1, 1\}$ es una órbita periódica de f (periodo 2).
- $\{-1, 1\}$ es repulsor

Clasificación de puntos periódicos Sabemos, que los elementos de una órbita n -periódica son puntos fijos de la función $g = f^n$.

- $|g'(\bar{x})| < 1$ es un pozo
- $|g'(\bar{x})| > 1$ es una fuente.
- $|g'(\bar{x})| = 1$ no sabemos.

Ejemplo: $f(x) = -x^3$:

- f tiene un único punto de equilibrio $x_0 = 0$ (atractor).
- $g(x) = f^2(x) = x^9$, tres puntos de $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
- $\{-1, 1\}$ es una órbita periódica de f (periodo 2).
- $\{-1, 1\}$ es repulsor

Como en los sistemas dinámicos continuos es relevante analizar cómo el comportamiento depende de los parámetros

$$x(n+1) = f(\lambda, x(n)) = f_\lambda(x(n))$$

El parámetro (variable exógena) se le interpreta como una variable lenta. Aunque pequeños en los parámetros pueden tener grandes efectos en los comportamientos de las soluciones.

Theorem (Estabilidad)

Sea $\bar{x}_\lambda = f_\lambda(\bar{x}_\lambda)$ tal que $|f'_\lambda(\bar{x}_\lambda)| \neq 1$. Entonces existen intervalos $I = I(\bar{x}_\lambda)$, $J = J(\lambda)$, y una función regular $p : J \rightarrow I$ tal que $p(\lambda) = \bar{x}_\lambda$ donde $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$.

Demostración: La prueba del teorema es aplicar el teorema de la función implícita a $G(\lambda, x) = f_\lambda(x) - x$, pues $G(\lambda, \bar{x}_\lambda) = 0$ y $\partial_x G = f'_\lambda - 1 \neq 0$.

Bifurcación

Es decir, si variamos el parámetro λ cada función f_λ da lugar a un nuevo punto crítico cercano a \bar{x}_λ . Además, este punto crítico mantiene su carácter (atractor o repulsor)

¿Y si $|f'_\lambda(\bar{x}_\lambda)| = 1$? El carácter del punto crítico puede cambiar

- pueden emerger nuevos puntos críticos
- pueden aparecer nuevos puntos periódicos

Esta riqueza de comportamientos aparece ya en la ecuación logística:

$$x(n+1) = f_\mu(x(n)) = \mu x(n)(1 - x(n))$$

Tiene distinto comportamiento de acuerdo a los parámetros de μ . Dos puntos fijos. De $x = \mu x(1 - x)$ resultan:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

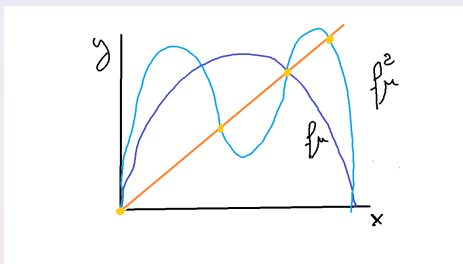


Figura: Gráficas de Id , f , f^2

Ejercicio.

- Comprobar que x_1 cambia de atractor a repulsor en $\mu = 1$.
- Comprobar que x_2 es atractor para $1 < \mu < 3$.
- Dibujar el diagrama de bifurcación: *bifurcación transcítica*.
- Demostrar que para $\mu > 3$ existen dos puntos 2-periódicos.

Puntos fijos de $g = f^2$. Además de x_1 y x_2

$$x_3(\mu) = \frac{1 + \mu - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu},$$

$$x_4(\mu) = \frac{1 + \mu + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}$$

Como

$$g_x(\mu, x_3) = g_x(\mu, x_4) = -\mu^2 + 2\mu + 4,$$

la órbita $\{x_3, x_4\}$ es atractora para $\mu \in (3, 1 + \sqrt{6})$. En el punto se produce la emergencia de una órbita de período dos, **flip bifurcation**. En la ecuación logística existe una sucesión μ_n de bifurcaciones tal que cada μ_n aparecen orbitas periódicas de periodo 2^n . $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$, y

$$\lim_n \mu_n = 3.57 = \mu_\infty.$$

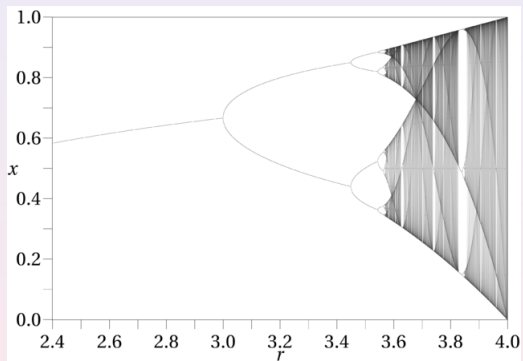


Figura: Diagrama de Bifurcación

- Cascada de Bifurcaciones.
- El comportamiento es complejo.
- ¿Qué ocurre a partir de μ_{∞} ? El caos.....

Infinitas órbitas periódicas para la logística $\mu = 4$

Observación: Si $I_0 \subset [0, 1] = I$ tal que $f(I_0) = I$ y f monótona en I_0 , por el teorema del valor intermedio f tiene un punto fijo en I_0 .

- $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(1/2) = 1$. Por tanto, f manda dos subintervalos al $[0, 1] = I$: $f[0, 1/2] = [0, 1] = f[1/2, 1]$. f tiene dos puntos fijos.
- Existe $y_1 \in [0, 1/2]$, $y_2 \in [1/2, 1]$, tq $f(y_1) = 1/2 = f(y_2)$. Por tanto $f^2[0, y_1] = f[0, 1/2] = [0, 1]$ y análogo $f^2[y_1, 1/2] = [0, 1] = f^2[1/2, y_2] = f^2[y_2, 1]$. f^2 tiene cuatro puntos fijos y f una órbita periódica de periodo 2.
- Del punto anterior $I = I_1^{(2)} \cup I_2^{(2)} \cup I_3^{(2)} \cup I_4^{(2)}$ tq $f^2(I_j^{(2)}) = I$. Entonces, existe $y_j^{(2)} \in I_j^{(2)} = [a, b]$ tq $f^2(y_j^{(2)}) = 1/2$, así $I_j^{(2)} = [a, y_j] \cup [y_j, b]$ y por lo tanto

$$I = \bigcup_{j=1}^{2^3} I_j^{(3)} \quad \text{tal que } f^3(I_j^{(3)}) = I,$$

Infinitas órbitas periódicas para la logística $\mu = 4$

- Así, como f^3 es monótona en cada $I_j^{(3)}$, existen 2^3 puntos fijos de f^3 , 2 puntos fijos de f y 2 3-ciclos.
- Argumentando por inducción tenemos que

$$I = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j^{(n)} \quad \text{tal que } f^n(I_j^{(n)}) = I,$$

con f^n monótona y tenemos 2^n puntos fijos de f^n .

- Supongamos que todo los anteriores puntos fijos lo son también de f^n (que no lo pueden ser todos para $n > 2$ y que muchos se repiten), entonces serían:

$$2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 2 < 2^n,$$

por lo tanto, tiene que existir algún n -ciclo.

Existen orbitas periódicas de cualquier orden

- DSDI (Dependencia sensible respecto a los datos iniciales).
Dado x_0 y su orbita $\gamma(x_0)$. Para todo δ existe x, n, d
 $|x - x_0| \leq \delta$ tal que $|f^n(x) - f^n(x_0)| \geq d$.
El conocido efecto **Alas de mariposa**
- Órbitas acotadas: Acotadas, no periódicas y con DSDI se llaman orbitas caóticas.

Theorem (Teorema de Li-Yorke)

Todo función continua con un punto periódico de orden tres, implica la existencia de puntos periódicos de cualquier período y la existencia de un conjunto J no numerable de órbitas caóticas (un atractor extraño).

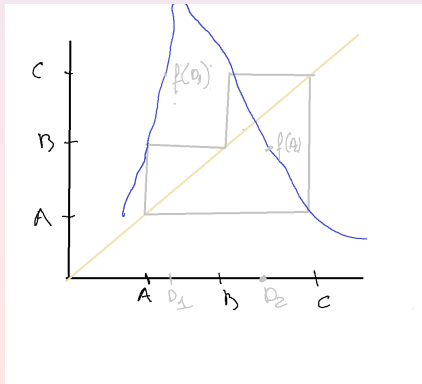
Idea de la Prueba del Teorema de Li-Yorke (Órbitas caóticas)

Sabemos que Existe una orbita de orden tres,

$f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$. Sin perdida de generalidad podemos suponer $A < B < C$ y f monotona entre B y C .

Por tanto $f([B, C]) = [C, A] = [A, C]$, y existe $A < D_1 < B$

$B < D_2 < C$ tal que $f[A, D_1] = [BC] = f[B, D_2], f[D_2, C] = [A, B]$



Intervalos

Vamos a crear una sucesión de generaciones de intervalos anidadas las unas dentro de las otras de manera inductiva. Las dos primeras generaciones ya las tenemos.

- Generación 1. $L = [A, B]$, $R = [B, C]$.
- Generación 2. $LR = [A, D_1]$, $RL = [D_2, C]$, $RR = [B, D_2]$.
 $f(LR) = R$, $f(RL) = L$, $f(RR) = R$

Los subintervalos van a ser representados por **palabras** donde las únicas **letras** son $\{L, R\}$. $I = LRRL$, $I = RRRL$, $I = LLLRRLR$, etc. LLamaremos I_n a los intervalos que describimos con n letras.



Descripción simbólica de los intervalos

Esta terminología se usa en estudios avanzados de fractales pero la propiedad que necesitamos para la dependencia continua de parámetros es la siguiente:

Propiedad clave

- Si la última letra es R, L , $f^{n-1}(I) = R, L$ respectivamente.
- Si las últimas dos letras son LR, RR, RL .
 $f^{n-2}(I) = LR, RR, RL$ respectivamente.

Consideramos dos casos.

El intervalo acaba en R: . Entonces como $R = RL \cup RR$, y $f^{n-1}(I) = R$ podemos descomponer I en dos subintervalos

$$I = I_{n-1}RR \cup I_{n-1}RL$$

Donde definimos,

$$I_{n-1}RR = I_{n-1}R \cap (f^{n-1})^{-1}(RR), I_{n-1}RL = IR \cap (f^{n-1})^{-1}(RL).$$

La propiedad clave

El intervalo acaba en L. En este caso no nos quedamos con todo el intervalo sino sólo con un subconjunto suyo.

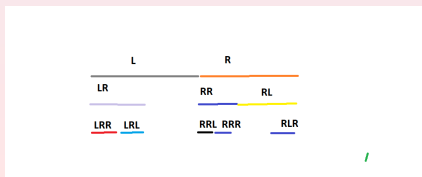
$$I_{n-1}L \supset I_{n-1}LR$$

donde definimos, $I_{n-1}R = I_{n-1} \cap (f^{n-1})^{-1}(LR)$

Ahora, notese que el intervalo $I_{n-1}RL$ tiene $m = n + 1$ palabras, así que $m - 1 = n$, $m - 2 = n - 1$, por tanto:

- $f^{n-1}(I_{n-1}RL) = RL$ por tanto $f^n(I_{n-1}RL) = f(RL) = L$
- $f^{n-1}(I_{n-1}RR) = RR$ por tanto $f^n(I_{n-1}RR) = f(RR) = R$
- $f^{n-1}(I_{n-1}LR) = LR$ por tanto $f^n(I_{n-1}LR) = f(LR) = R$

que es exactamente la propiedad que necesitaremos para DDS.



El conjunto de Cantor

Generación 3.

Así que tenemos 5 intervalos en la generación 3 que llamamos $\{I_i^3\}_{i=1}^5$: $I_1^3 = LRL$, $I_2^3 = LRR$, $I_3^3 = RRL$, $I_4^3 = RRR$, $I_5^3 = RLR$. En la generación 4 tenemos 8 $LRLR$, $LRRR$, $LRRL$, $RRLR$, $RRRR$, $RRRL$, $RLRR$, $RLRR$. Así tenemos para cada generación k $N(k)$ intervalos I_i^k . Seguimos hasta el infinito para obtener

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{N(k)} I_i^k \right)$$

que es un conjunto cerrado, compacto no numerable y sobretodo caótico. Notese la analogía estructural con el conjunto de Cantor.

Se pueden decir muchas cosas pero nos conformamos con ver que tiene *DSDI*. Dados dos puntos x, y

Dada la generación n . Si $I = S_1 S_i \dots S_n$ donde $S_i \in \{L, R\}$

$IR = IRL \cup IRR$, $IL \supset ILR$ y $f^i(I) \subset S_i \dots S_n$. En concreto si

$IR \supset IRLR \cup IRRL \cup IRRR$, $f^n(IRLR) = LR$, $f^n(IRRL) = RL$ y

como $dist(LR, RL) \geq \delta$ existen puntos arbitrariamente cercanos que la orbita los separa.

En el caso de que el intervalo acabara en L , $I = I_{n-1}L$ contiene un hijo que acaba en R , llamado $I_{n-1}LR$, al que podemos aplicar el intervalo anterior.

Existen órbitas caóticas que van recorriendo de manera enloquecida el conjunto tipo Cantor que es el atractor extraño del sistema. El conjunto tiene "dimensión fractal", cuyo valor exacto depende de los valores D_1, D_2 . En la siguiente transparencia nos asomamos al concepto de dimensión.

Dimensión fractal

Su dimensión es fractal. Que quiere decir esto? Existen muchas nociones de dimensión fractal. Unas más útiles desde el punto de vista teórico y otras desde el punto de vista práctico. La más sencilla es la llamada dimensión "box counting" o dimensión de Minkowski.

Sea $\epsilon > 0$ y $N(\epsilon)$ el número de segmentos (cubos) de longitud ϵ necesarios para cubrir el conjunto E . En el caso de que exista el límite definimos:

$$\dim_B(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)}$$

Si no hay versiones con límite superior e inferior.

Veamos que al menos funciona bien, para dimensiones enteras: En el cubo de dimensión n $N(\epsilon) \approx \epsilon^{-n}$

$$\frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)} \approx n$$

En el clásico conjunto de Cantor en cada generación tenemos 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$

$$C\left(\frac{1}{3}\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{2^k} I_i^k\right)$$

donde $|I_i^k| = \frac{1}{3^k}$. así que

$$N\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = 2^k \Rightarrow \frac{\log(N\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right))}{-\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)} = \frac{k \log(2)}{-k \log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log(2)}{\log(3)}$$

Nota: La dimensión de Minkowski del conjunto de Cantor es $\frac{\log(2)}{\log(3)}$
(La prueba de arriba se puede hacer rigurosa).