- Sistemas discretos.
- Matrices de Leslie.
- Cadenas de Markov:Intro
- Cadenas de Markov absorbentes.
- Cadenas de Markov a largo plazo.

Modelos unidimesionales

Estudiamos la población de elefantes hembra por año en Bostwana. Supongamos que en media el 30 por cientos de las hembras tiene otra hembra y el 90 de las hembras sobreviven. Describir la población por año si inicialmente habia 15 hembras.

$$N(k+1) = (0,9 + 0,3)N(k)$$

$$N(k) = (1,2)^k 15$$

Se extinguirá o crecera la población?
Nota: Hemos resuelto una ecuación en diferencias. Existe una teoría de ecuaciones en diferencias del tipo

$$xk + 1 = a(k)x(k) + b(k)$$

que se trata de manera similar a las e.d.o Ver [FernandezVazquedVegas]

C.Darwin 1872 "The elephant is reckoed to be the slowest breeder of all known animals and I have some pain to estimate its probable minimum rate of natural increase. It will be safest to assume that it begins breeding when 30 years old and goes on breedinn till 90 years old, bringing forth six young in the interval and surviving till one hundred year old. If this so then in a period there will be after 750 19 millones de habitantes"
Darwin hizo un modelo lineal unidimensional. Los modelos matriciales han demostrado ser mucho mas precisos

Modelos matriciales discretos

Tema 1: Modelos Matriciales discretos.

Ejemplo 1.1. La evolución de la mariposa monarca.

- Cada semana el 30 por ciento de las crisalidas de la mariposa monarca madura y se transforma en mariposa
- Cada semana por cada mariposa adulta, una oruga se transforma en crisálida.
- El porcentaje de supervivencia semanal de las mariposas adultas es del 60 por ciento.

Dada la evolucion de una población en varios estados $(x_1(n), x_(n))$ sea $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ donde n representa el numero de dias.

Definición

Decimos que $x(n)$ sigue un sistema dinámico discreto con matriz de transición A.

$$x_{n+1} = Ax(n)$$

$x_{n+1} = 0,7x_n + 1y_n, y_{n+1} = 0,3x_n + 0,6y_n$
Preguntas:

- Describe matemáticamente las ecuaciones que rigen la evolución de las poblaciones de crisálidas y mariposas.
- Se comienza con 1000 crisalidas y 1000 mariposas. Cuantas mariposas habrá dentro de dos semanas.
- Calcula la tasa de variación de la población de mariposas con el paso del tiempo.
- Cual debería ser el porcentanje de supervivencia semanal de las mariposas para que la tasa de crecimiento de su población a largo plazo fuera 1.1?

Como son solo dos semanas lo podemos calcular directamente.
$(x(2), y(2)) = A^2(x(0), y(0)) = A(1700, 900) = (2090, 1050)$ En general
$(x(n), y(n)) = A^n(x(0), y(0))$.
Herramienta clave: Autovalores.
Estrategia canónica para S.Discretos.
Supongamos que A diagonaliza en una base de dos autovectores u_1, u_2 con autovalores $\lambda_1 > |\lambda_2|$
base de autovectores. Escribimos la condición inicial
$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2$. Entonces

$$\vec{x}(n) = c_1 \lambda_1^n \vec{u_1} + c_2 \lambda_2^n \vec{u_2} = \lambda_1^n [c_1 u_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n \vec{u_2} \approx \lambda_1^n c_1 \vec{u_1}$$

Donde hemos usado que como $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}) < 1$ el último termino es muy pequeño si n es grande.

Caso de la mariposa monarca.

$$det(A-\lambda I) = (0,7-\lambda)(0,6-\lambda) - 0,3 = \lambda^2 - 1,3\lambda + 0,12 = 0$$

$$\lambda = 1,2, 0,1$$

El autovalor dominantes es $\lambda_1 = 1,2$

La población mariposas crece y su tasa de variación aumenta un 20 por

Que información tiene el autovector $u_1 = (a,b)$

$(x(n), y(n)) \approx \lambda_1^n c_1 \vec{u_1}$ asi pues

$(\frac{x(n)}{x(n)+y(n)}, \frac{y(n)}{(x(n)+y(n)}) = (\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b})$ En nuestro caso

$u_1 = (\frac{1}{1.5}, \frac{0.5}{1.5}) = (0,66, 0.33)$

A largo plazo 2/3 de las mariposas son crisálidas y 1/3 son adultas

Ultima pregunta

Sea α el nuevo porcentaje de supervivencia de las mariposas.$p(\lambda) = (0,7-\lambda)(a-\lambda) - 0,3, p(1.1) = (0,7-1.1)(a-1.1) - 0.3 = (-0,4)(a-1.1) - 0.3 = 0$ despejando $a = 0.35$.

Definición

Decimos que λ_1 es un autovalor dominante si es simple y $\lambda_1 > |\lambda_i|$ para todo $i \neq 1$.

Theorem

Sea $\vec{n}(k) = (n^j(k))_{j=1}^n$ sistema discreto. Sea $\vec{n}(k) = P\vec{n}(k-1)$ con P con un autovalor dominante λ_1, y autovector $\vec{u_1} = (u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^n), u_1^j \geq 0$ Entonces,

$$\frac{\sum_{j=1}^n n_j(k+1)}{\sum_{j=1}^n n_j(k)} \approx \lambda_1, \frac{N(k)}{\sum_{j=1}^n n_j(k)} \approx \frac{\vec{u_1}}{\sum_{j=1}^n u_1^j}$$ *siempre que* $N(0) = \sum c_i u_i$ *con* $c_1 \neq 0$.

Si los autovalores son reales, la prueba es inmediata. Si no investigamos el caso $n = 3$. Sean autovalores λ_1 $\lambda_2 = \rho e^{i\theta}$. Usamos la expresión de A en cajas. Sea $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ y sean $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ tales que $A(c_1\vec{u}_2 + c_2\vec{u}_3) = \rho(\vec{u}_2, \vec{u}_3)R_\theta(c_2, c_3))$ donde $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ es la matriz con columnas $\vec{u}_2, \vec{u}_3$. Iterando

$$A^(\sum c_i u_i) = \lambda_1^n (c_1 u_1 + \frac{|\lambda_2|^n}{\lambda_1^n}(\vec{u}_2, \vec{u}_3)R_{n\theta}(c_2, c_3))$$

y como el vector $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)R_{n\theta}(c_2, c_3))$ tiene modulo acotado argumentamos como en el caso real.

Nota: En aplicaciones el dato $N(0)$ tiene que ser positivo lo que suele forzar $c_1 \neq 0$ (e.g si la matriz A es regular por el Teorema de Frobenius que se verá en el curso.).

Fibonacci

Un ejemplo de como una ecuación en recurrencias famosa se transforma en un sistema lineal Fuente[FVV] Leonardo Fibonacci en su liber abaci (1202) "Un hombre pone una pareja de conejos en un lugar cercado por todos los lados. Cuantos conejos tendrá al cabo de un año si supone que cada pareja engendra cada mes una nueva pareja que a su vez es fertil a partir del segundo mes de vida?"

Sea F_k el numero de parejas.

$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 1 + 1, F_3 = F_2 + F_1,\ F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ o

$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ Sucesión de Fibonacci

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

Una recurrencia siempre se puede poner como un sistema discreto:

$\vec{x}(n) = (a(n), a(n+1))$

$$\vec{x}(n+1) = (a(n+1), a(n+2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(n)$$

Resolución Fibonacci

Hallamos el polinomio característico

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$ $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

asi pues el autovalor dominante es $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, la razón dorada.

Recordemos que entonces

$\vec{x}(n) = \lambda_1^n c_1 v_1 + \lambda_2^n c_2 v_2 = (\lambda_1^n b_1 + \lambda_2^n b_2, \lambda_1^n b_3 + \lambda_2^n b_4)$ para ciertos coeficientes b_1, b_2, b_3, b_4. Por lo que $a(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

Imponiendo las condiciones $a(0) = 1, a(1) = 1$ las constantes son $b_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\lambda_1, b_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2$ de lo que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1})$$

Nota 1: la sucesión de Fibonacci describe todo tipo de procesos curiosos como el ángulo de divergencia de las hojas en el tallo de las hojas (Ver sucesión de Schimper-Braun).
Numerador; Numero de vueltas para encontrar una hoja que está sobre la hoja de partida. Si a_n es la sucesión de Fibonacci
Denominador: Numero de hojas

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{a_n}{a_{n+2}} \approx \frac{1}{\lambda_1^2} = 1 + \lambda_2$$

que al ser un número irracional hace que ninguna hoja este exactamente sobre la anterior.
Nota 2:La razón aurea aparece en todo tipo de obras artísticas como símbolo de la proporción perfecta: La parte pequeña es a la grande como la grande al todo. Segmento APB

$$\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$$

Matrices de Leslie

Las matrices de Leslie, abundan en la idea que vimos con la mariposa Monarca. Estratificar la población en grupos de individuos de edades $1, 2, n$. De maneraque en cada paso temporal se pasa del grupo i al $i+1$.
La evolución viene dada por un vector $\vec{n}(k) = (n^1(k), n_2(k), n_n(k))$.
Información clave: Tasas Vitales

- s_i tasa de supervivencia del grupo de edad i. Probabilidad de que un individuo de la edad i sobreviva y pasa a la edad $i+1$.
- f_i tasa de fertilidad del grupo de edad i. Numero medio de crias de un individuo en la edad i.

Por tanto las matrices de Leslie tienen la estructura:

$$L = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_k \\ s_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_i & 0 \end{pmatrix}$$

Objetivos/Terminología

Determinar (exacta o aproximadamente)

- La población total a tiempo k $N_T = N(k) = \sum_{i=1}^{n} n^i(k)$
- El vector de proporciones $p(k) = \frac{n(k)}{N(k)}$
- El crecimiento a tiempo t. $\lambda(k) = \frac{N_T(k)}{N_T(k-1)}$

Situación que buscamos: Existencia de un autovalor dominante λ_1 con autovector u_1. En tal caso $p(k) = u_1(t)$ si $n(0) = \sum c_i u_i$
$n(k) \approx c_1 \lambda_1^t u_1$, $\lambda(k) \approx \lambda_1$

No existe siempre autovalor dominante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. A veces no nos dan las tasas se supervivencia y fertilidad. Sino que vienen codificadas de otra manera. Tabla de vida. Organismo que vive cuatro años Nos dan la siguiente información.

- Sea $b(x)$ numero medio de hembras nacidas por hembra anualmente en cada clase.
  $b(0) = 0, b(1) = 2, b(2) = 3, b(3) = 1, b(4) = 0$
- Sea $S(x)$ numero de individuos que han sobrevivido
  $S(0) = 500, S(1) = 400, S(2) = 200, S(3) = 50, S(4) = 0$

Modelar la población de este tipo de individuos haciendo la matriz de Leslie.

- Probabilidad de sobrevivir el año x $l(x) = \dfrac{S(x)}{S(0)}$
- Probabilidad de pasar el año x al $x+1$ $s_i = \dfrac{l(x+1)}{l(x)}$
- Tasa de fertilidad $f_i = b(i)s_i$

En nuestro caso concreto:

$$\vec{N}(k+1) = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \vec{N}(k)$$

$\lambda_1 \approx 2.11, \vec{u_1} = (0.935, 0.353, 0.016), p = (0.72, 0.28, 0.01)$

Theorem

Una matriz de Leslie tiene un único autovalor positivo λ_1. Tiene multiplicidad uno y un autovalor $\vec{u}_1$ de componentes todas positivas.

Discutimos el caso de una matriz de orden 3

$$\det\begin{pmatrix} f_1-\lambda_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda \end{pmatrix} = (f_1-\lambda)(\lambda^2) - s_1(-\lambda f_2 - f_3 s_2)$$

$$= -\lambda^3 + f_1\lambda^2 + \lambda(f_2 s_1) + f_3 s_1 s_2$$

Asi pues los autovalores resuelven

$$-\lambda^3 + f_1\lambda^2 + \lambda(f_2 s_1) + f_3 s_1 s_2 = 0$$

Dividiendo por λ^3 llegamos a

$$1 = \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2 s_1}{\lambda^2} + \frac{f_3 f_1 s_2}{\lambda^3}$$

Ahora estudiamos la función

$$q(\lambda) = \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2 s_1}{\lambda^2} + \frac{f_3 f_1 s_2}{\lambda^3}$$

Es decreciente como suma de tres funciones de crecientes, $\lim_{\lambda \to 0} q(\lambda) = +\infty$, $\lim_{\lambda \to \infty} q(\lambda) = 0$. Asi pues por el teorema del valor intermedio toma el valor 1 una única vez. Llamamos λ_1 a la solución única $q(\lambda_1) = 1$.

Comprobamos que el autovector correspondiente a λ_1,es $\vec{u_1} = (1, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_1^2})$. Efectivamente

$$\frac{1}{\lambda_1} L u_1 = (\underbrace{\frac{b_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 s_1}{\lambda_1^2} + \frac{b_3 s_1 s_2}{\lambda_1^3}}_{q(\lambda_1)=1}, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_1 s_2}{\lambda_1^2})$$

El caso general sigue la misma idea. (Ejercicio).

Theorem

Todo autovalor de una matriz de Leslie satisface $|\lambda_i| \leq \lambda_1$

Supongamos que $\lambda_i = re^{i\theta}$ es un autovalor complejo. Entonces

$$\frac{f_1 e^{-i\theta}}{r} + \frac{f_2 s_1 e^{-i2\theta}}{r^2} + \frac{f_3 s_1 s_2 e^{-i3\theta}}{r^3} = 1$$

Tomando la parte real

$$\frac{f_1 \cos\theta}{r} + \frac{f_2 s_1 \cos 2\theta}{r^2} + \frac{f_3 s_1 s_2 \cos 3\theta}{r^3} = 1$$

Ahora si $r \geq \lambda_1$ $1 = q_\theta(r) \leq q(r) \leq q(\lambda) = 1$. Por lo tanto $q_\theta(r) = q(r)$ que solo ocurre si $\theta = 0$. Por tanto necesariamete $r \leq \lambda_1$.

Definición

Decimos que una matriz A es primitiva o Frobenius si existe una potencia n tal que $A^n > 0$ es decir todas las entradas son estrictamente positivas.

Theorem

Si A es primitiva, existe un autovalor λ_1 dominante tal que su correspondiente autovector u_1 es el unico con todas las entradas positivas.

Theorem

Si las tasas de supervivencia $s_i \neq 0$ y para dos tasas de fertilidad consecutivas f_i, f_{i+1} son distintas de cero el autovalor es siempre dominante.

Idea de la prueba

Se puede probar que A es primitiva. El autovalor es dominante. Primero, suponemos que todas las tasas de supervivencia son positivas. Consideramos la existencia de autovalor dominante λ_1 supongamos que existe otros dos autovalores complejos $\lambda_{\pm\theta} = \lambda_1 e^{\pm\theta}$. Por tanto $q(\lambda_1) = q(\lambda_{\pm\theta}) = 1$ Asi pues $q(\lambda_{+\theta} + q(\lambda_{-\theta}) - 2q(\lambda_1) = 0$. Si $q(\lambda) = \sum A_k \lambda^{-k}$. Deducimos que

$$\begin{aligned}\sum A_k \lambda_1^{-k}(e^{k\theta} + e^{-k\theta} - 2) &= \sum A_k 2(\cos(k\theta) - 1) \\ &= -4 \sum A_k \sin^2(\frac{k}{2}\theta) = 0\end{aligned}$$

Por hipótesis existe k tal que $A_k \neq 0 \neq A_{k+1}$ asi que,

$$\cos(k\theta) = 1 = \cos((k+1)\theta)$$

Por tanto $k\theta = m_1 2\pi, (k+1)\theta) = m_2 2\pi$ donde $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. De lo que $\theta = (m_1 - m_2)2\pi$ y por tanto $\lambda_{\pm\theta} = \lambda_1$.

Tasa neta de reproducción

Sabemos que $p(\lambda) = 0$ es la unica raiz real. Como $p(\lambda)$ es creciente si $p(1) < 0$ implica que $p(\lambda) = 0$ implica que $1 < \lambda)$ y $p(1) > 0 = p(\lambda)$ implica $1 > \lambda$. Por tanto

$$R = 1 - p(1) = f_1 + f_2 s_1 + f_3 s_1 s_2 + f_4 s_1 s_2 s_3 < 1, \lambda < 1, R > 1 \iff \lambda > 1$$

Numero medio de crias que tiene cada hembra por esperanza de vida. Es decir si empiezo con N crias en media generaran RN crias. Acabamos probando que no existen mas autovectores con todas las coordenadas positivas.

Theorem

Sea $Au = \lambda e^{i\theta} u, A = (a_{ij})$ con $a_{ij} \geq 0$. Sea $u = v + iw$ con $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n$ con $v^i \geq 0$. Se sigue que $w = 0$.

Podemos suponer $\lambda = 1$. Entonces $Av = \cos\theta v - \sin\theta w, Aw = \sin\theta v + \cos\theta w$. Se sigue que $(Av)_i \geq 0$. Supongamos que $\cos\theta < 0 \sin\theta$ $(\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$ Entonces

$$0 \leq \cos\theta v_i - \sin\theta w_i \Rightarrow w_i \leq \frac{\cos\theta}{\sin\theta} v_i \leq 0$$

porque $v_i \geq 0$ y $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} < 0$. Por tanto $w_i < 0$. Ahora bien como A es una matriz positiva Aw tiene coordenadas negativas. De lo que deducimos

$$0 \geq \sin\theta v_i + \cos\theta w_i \Rightarrow w_i \geq \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} v_i \geq 0$$

Por tanto $w_i = 0$. Para tratar el caso de un θ general observamos que si A es positiva A^n es positiva y tiene autovalor $e^{in\theta}$ para el mismo autovector $u = v + iw$ por lo que deducimos la contradicción.

Finalmente damos la idea de si A es positiva (diagonalizable) el espacio vectorial formado por sus autovectores correspondientes a autovalores negativos o complejos no puede intersecar el cuadrante positivo.

Supongamos que fuera asi para un vector ξ. Entonces para todo n, $A^n(\xi) \geq 0$. Pero $A^n(\xi) \approx \lambda_2^n c_2 v_2$ que como v_2 tiene entradas positivas y negativas no puede tener signo. Directamente: como λ_2 es negativo cambia de signo. Autovalores complejos: Si $\xi = c_2 v + c_3 w$ entonces suponiendo que el autovalor tiene módulo uno por simplicidad,

$A^n(\xi) = (c_1 \cos n\theta - c_2 \sin n\theta) v + (c_1 \sin n\theta + c_2 \cos n\theta) w$

$(A^n(\xi))^1 = \cos(n\theta) \underbrace{c_1 v^1 + c_2 w^1}_{\geq 0} + \sin n\theta(-c_2 v^1 + c_1 w^1)$ Ahora pueden ocurrir dos cosas o $(c_2 v^1 - c_1 w^1) \geq 0$ o es menor que cero. Para todo θ existen n_1, n_2 tal que $cos(n_1\theta), \cos(n_2\theta), \sin(n_1\theta) < 0 < \sin(n_2\theta)$. El primer termino es negativo para n_1 y n_2 y el segundo para alguno de los dos.

Existen muchos otros modelos por compartimentos que se analizan con matrices. Lo mas aconsejable es intentar encontrar el autovalor correspondiente y probar que es dominante. Tortugas de mar (Estudio de 1987-2001) divididas en clases no homogeneas, de modo que pueden permanecer en algunas de las clases.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 127 & 4 & 80 \\ 0.67 & 0.73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.66 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.014 & 0.69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0518 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.891 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.891 & 0.889 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 0,945, \lambda_1^{25} \approx 0.25$. Las tortugas se extinguiran y en 25 años la población se reduce al 25%.