Objetivos

- Cambios de escala
- Puntos fijos.
- Trayectorias y planos de fases.
- Concepto de Bifurcación.
- Formula general Bernoulli equations.
- Linearización. Comportamiento cerca de los equilibrios.

Modelos

- Dinámica de Poblaciones.
- Malthus versus Verhulst.
- Harvesting. Esfuerzo Constante.
- Plagas de Polillas de abetos en Canada

El primer dia estudiamos poblaciones que crecen respecto a una ley $N(k+1) = aN(k)$. En este tema vamos a suponer que la tasa de cambio es mucho más rápida y estudiamos modelos continuos. De hecho en parte debido a la complejidad matemática estudiaremos

- Modelos discretos lineales multidimensionales.
- Modelos continuos unidimensionales lineales y no lineales.
- Modelos continuos bidimensionales lineales y no dimensionales.
- Modelos discretos no lineales.

La razón es que modelos continuous 3d y discretos 1d hay caos (1d podemos decir algo).
Contribución de los modelos matemáticos: De información en pequeños intervalos de tiempo, deducir el comportamiento a largo plazo. Los datos experimentales y técnicas estadísticas ayudan a averiguar los parámetros de los modelos.

Malthus

1798: Malthus (An essay of the principle of Population)
Cuantas personas puede mantener la tierra? Principios básicos que dan lugar a varios modelos.

- Si la población se reproduce a ritmo constante aumenta hasta el infinito,
- El ambiente es dinámico (control de nacimiento, cambios de hábitos en la sociedad)
- En algunos periodos históricos ha habido bajas importantes (peste negra, migraciones)
- La capacidad de soporte depende del numero de individuos

Tema 1.1

La tasa de cambio de la población se determina en funcion de β la tasa de nacimiento y μ la tasa de defunciones. Se supone que la población es cerrada.

- $x(t+h) = x(t) + (\beta - \mu)hx(t)$
- $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = (\beta - \mu)x; x(t=0) = x_0$
- $r = \beta - \mu$

Solución $x(t) = e^{rt}x_0$. Interpretación. Si $r > 0$ crecimiento exponencial si $r = 0$ la población no cambia. Si $r < 0$ la población se extingue. $R_0 = \frac{\beta}{\mu}$ el **basic Reproductive number** captura esta bifurcación y no depende de las unidades.

Preguntas para el lector:

- Determinar el tiempo necesario para doblar el tamaño inicial (Doubling life) si $r > 0$ o el necesario para reducirla a la mitad.
- Y si la tasa de cambio es una función del tiempo $r = r(t)$?

Sabana Santa de Turin:Nature 1989

Información:Se sabe que la proporcion del isotopo decarbono catorce en cualquier tejido orgánico se deteriora siguiendo una ley exponencial. Se sabe que se reduce ritmo exponencial y se reduce la mitad aproximadadamente a los 5730 años.
Por tanto la concentración $x(t)$ sigue el modelo,

$$\dot{x} = -ax, x(-t_0) = A \tag{1}$$

y $a = \frac{ln2}{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{ln2}{5700} = 1,216 \times 10^{-4}$. Para datar la sabana santa de Turin en 1988 se midió una concentracion del 92 por ciento (es decir $X(0) = 0.92A$)

- $x(t) = Ae^{-a(t+t_0)}$
- $0.92A = x(0) = Ae^{-at_0} \Rightarrow t_0 = -\frac{\ln(0.92)}{a} = 5700\frac{-\ln(0.92)}{ln2} = 685,68$
- Por tanto en $1988 - 685,68 = 1302,32$

Modelo logístico

En los siguientes modelos utilizaremos ecuaciones autónomas. La tasa de crecimiento solo depende del tamaño de la población.
El crecimiento exponencial falla si por ejemplo observamos microorganismos en una probeta. En 1838 Verhulst introdujo la famosa ecuación logística. Consideramos K la máxima capacidad biologica del ecosistema donde la tasa de Cambio $r(x) = b(K - x)$ decrece cuando x se acerca al nivel de saturación hasta que se hace cero.

$$\dot{x} = bx(K - x) = \underbrace{r}_{bK} x(1 - \frac{x}{K})$$

- Si $x \approx 0, K - x \approx K$ la ecuación se parece a $\dot{x} = rKx$, $x \approx e^{Krt}$
- Si $x \approx K, \dot{x} = r(K - x)$; $(\dot{K - x}) = -r(K - x)$ ie $K - x \approx e^{-rt}$

- La ecuación logistica es descriptiva, no se deriva de ninguna observación sobre la tasa de cambio. En contraposición con Malthus que $a = \beta - \mu$ (parámetros determinables sin la ecuación).
- Podemos realizar un análisis dimensional básico para elegir las escalas óptimas (p_0 población inicial).
  $[x] = L_1, [t] = L_2, [r] = L_1 {L_2}^{-1}, [K] = L_1, [p_0] = L_1$. Vemos que como r tiene unidades de tiempo. Definimos un nuevo tiempo $\tau = rt$ y elegimos $\tilde{P} = \dfrac{P}{K}$.

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tau} = \frac{1}{K}\frac{dP}{dt}\frac{dt}{d\tau} = r\frac{1}{r}\frac{P}{K}(1 - \frac{P}{K}) = \tilde{P}(1 - \tilde{P})$$

La condicion inicial $\tilde{P}(0) = \dfrac{P}{K} = \dfrac{p_0}{K}$

Resolución explicita de la logistica

La logistica la podemos resolver explicitamente integrando $\frac{1}{x(K-x)}$. Alternativamente la tratamos como una ecuación de Bernoulli (con término cuadrático).

- $v = \frac{1}{x} \Rightarrow \dot{v} = r(\frac{-\dot{x}}{x^2}) = r(-\frac{x(1-\frac{x}{K})}{x^2}) = r(\frac{1}{K} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{=v}) = r(\frac{1}{K} - v)$
- $z = \frac{1}{K} - v$; $\dot{z} = -rz \Rightarrow z = Ce^{-rt}$
- $v = \frac{1}{K} - Ce^{-rt}$ $x = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}$
- Si introducimos las condiciones iniciales tenemos que $x = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$

Se habla de $\dot{x} \equiv$ la tasa instantanea de crecimiento. $\dot{x}x \equiv$ tasa neta de crecimiento. Calcular la tasa instantanea de crecimiento máxima y para que valor de la población se alcanza. Un ejemplo muy interesante es si la población $N = S + I$. $x =$ Susceptibles. $I = infectados$

$$\dot{x} = cx(1-x), \dot{x} = cx(1-x) - rx$$

En el primer modelo c es la probabilidad de contagiarse susceptibles de infectados. En el segundo modelo suponemos que cierto tanto por ciento r población se recupera. Investiga las ecuaciones con la teoría que viene despues..Lo que diferencia unas enfermedades de otras es este parámetro c, r. En el siguiente tema veremo modelos un poco más complejos que conducen al Teorema del Umbral del que hablan los periódicos.

Analisis cualitativo

$\dot{x} = f(x) x(t_0) = x_0$ Herramientas principales de E.D.O.

- Teorema de Picard. Si f es Lipschitz (por ejemplo con derivada continua) existe una solución y es única Consecuencia importantísima: Las distintas trayectorias no pueden cortarse.
- LLamamos $x(t; t_0, x_0)$ a esta solución unica.
- Puntos de equilibrio $f(x_0) = 0$ son trayectorias constantes que actuan de barreras.
- El Diagrama de fases se dibuja sobre el eje real y viene totalmente determinado por el signo de f.
- Diagrama de Trayectorias Se pueden dibujar las gráficas de todas las trayectorias porque no intersecán.

Aviso: No todo proceso viene descrito por funciones Lipschitz. Ejemplo modelo de von Bertalanffy del crecimiento de un pez

$$\dot{x} = a x^{\frac{2}{3}} - x$$

Observamos que que sean autonomas nos da varias observaciones

1. Si $x(t)$ es solución de $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x}(t_0) = 0$ entonces $x(t) = x(t_0)$ para todo t.
2. Toda solución de una ecuación autónoma es o estrictamente monótona o constante.
3. Si $x(t)$ es solución también lo es $x(t + t_0)$. Simplificamos la notación: $x(t; t_0, x_0) = x(t; x_0)$
4. Si $\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi \Rightarrow f(\xi) = 0$
5. Resumen Práctico.
   - Si x_0 está entre dos ceros consecutivos de $f : x_1 < x_0 < x_2$, $x(t; x_0)$ esta definida para todo $\mathbb{R}$ y crece o decrece de x_1 a x_2.
   - Si f no tiene ceros a la derecha(izquierda). Entonces no está acotada en su intervalo de definición (α, β) Es decir $\{x(t; t_0, x_0); t \in [t_0, \beta)\} = [x_0, \infty)$ si $f(x_0) > 0$; $\{x(t; t_0, x_0); t \in (\alpha, t_0)\} = [x_0, \infty)$ si $f(x_0) < 0$.
   - Si f no se anula nunca entonces toda solución toma todo los valores reales.

1. - $f(x(t_0)) = 0$.
   - La función $u(t) \equiv x(t_0)$ es solución.
   - Aplicar el teorema de unicidad para la ecuación $\dot{x} = f(x), x(t_0) = x(t_0)$
2. Corolario.
3. Consecuencia directa de que la ecuación es autónoma.
4. La intuición nos dice: Si converge su velocidad tenderá a cero asi que tenderá a un punto crtíco de f. Rigurosamente. Como $x(t)$ converge es una sucesión de Cauchy. Sea t_n tal que si $t \geq t_n$ $|x(t) - x(t_n)| \leq \frac{1}{n}$. Escogiendo $t = t_n + 1$, y aplicando el teorema del valor medio, deducimos la existencia de $t_n < \tau_n \leq t_n + 1$ tal que

$$|f(x_{\tau_n})| = |\dot{x}(\tau)| = |x(t_n + 1) - x(t_n)| \leq \frac{1}{n}$$

Por tanto $\lim_{n \to \infty} |f(x_{\tau_n})| = 0 = f(\xi)$ por continuidad de f.

Definición de puntos de equilibrio

Sea x_0 un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

- x_0 es **estable** si para todo ϵ existe δ tal que $|x_0 - z| \leq \delta$ implica que $x(t; z)$ está definida y verifica que $|x(t; z)| \leq \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Si no estable es **inestable**.
- x_0 es **atractor** local si existe un ρ tal que para todo z que verifique $|z - x_0| \leq \rho$ se cumple que $\lim_{t \to \infty} x(t; z) = x_0$. La región de atracción de x_0 es el conjunto de $z \in \mathbb{R}$ tal que $x(t; z) \to x_0$. Se designa por $A(x_0)$. Tambien se llama sumidero.
- x_0 es **asintoticamente estable** si es estable y atractor.
- x_0 es **repulsor** si existe un $\rho > 0$ tal que para todo z con $|z - x_0| \leq \rho$ se tien que $x(t; z) \to x_0$ cuando t tiende a $-\infty$.

Clasificación de puntos de equilibrio

- Si $f\chi_{[x_0-\delta,x_0)} \geq 0; f\chi_{(x_0,x_0+\delta)} \leq 0$ el punto es estable.
- Sea $z < x_0 (z > x_0)$, se cumple que $z \in A(x_0)$ si $f(\xi) > 0 (f(\xi) < 0$ para todo $\xi \in (z, x_0)(\xi \in (x_0, z)$
- x_0 es asintoticamente estable si $f\chi_{[x_0-\delta,x_0)} > 0; f\chi_{(x_0,x_0+\delta)} < 0$ (Desigualdades estrictas).

Ejercicio: Decidir las condiciones para punto repulsor y punto inestable.

Estabilidad mediante la primera aproximación

Decimos que un punto crítico x_0 es **hiperbólico** si $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) \neq 0$.

Proposición

Sea x_0 un punto hiperbólico. Es atractor si $f'(x) < 0$ y es repulsor si $f'(x) > 0$. Si $f'(x) = 0$ no podemos decidirlo.

Ejercicio: Discute razonadamente la naturaleza de los puntos críticos en los siguientes casos

- $f(x) = x^2$. Inestable.
- la ecuación logistica. 0 es inestable y K es atractor.
- $x^3 sen(\dfrac{1}{x})$ es estable pero no asintóticamente estable. Sin embargo no se cumple la condición sobre el signo de f.

Que ocurre cerca de los puntos de equilibrio

Consideramos $u(t) = x(t) - x_\infty$

$$\dot{u} = f(x) = f(x_\infty + u(t)) \approx \underbrace{f(x_\infty)}_{=0} + f'(x_\infty)u + Cu^2$$

Es una Bernoulli como veremos luego pero como $u(t)$ es muy pequeña

$$(x(t) - x_\infty) = e^{f'(x_\infty)t}(x_0 - x_\infty)$$

Asi que la solución converge o diverge de manera exponencial.