Harvesting

Nuevo factor: Harvesting. Cosechar, recolectar sobre nuestra ley $\dot{(x)} = f(x)$

$$\dot{x} = f(x) - h$$

En principio h puede depender de t e incluso de x. Analicemos el caso h constante para la logística:

$$\dot{x} = \underbrace{x(1-x) - h}_{f_h}$$

$x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4h}}{2}$ son los ceros de f_h. Ejercicio Discutir el número y naturaleza de los puntos críticos en términos del valor h.
Bifurcación: Cambio en el caracter y/0 cantidad de puntos críticos segun varia el parámetro. Ejercicio: Demostrar que se produce bifurcación para $h = \dfrac{1}{4}$.

Interpretación biologica. Cerca de la bifurcación impredicibilidad

- Si la tasa de cosecha es menor que $\frac{1}{4}$ y la población inicial es mayor que x_0 la poblacion sobrevive. Si la tasa de cosecha es menor que $\frac{1}{4}$ la especie se extingue en poco tiempo.
- Si los parametros están cerca de la bifurcación es un desastre para el modelo y la prediccíónes incierta. Los parametros nunca se saben con exactitud. En la mayoría de los casos se obtienen ajustando los parámetros de algunas mediciones de manera similar a como se obtienen los coeficientes en la recta de regresión en estadistica. Por tanto hay un intervalo de confianza. Cerca del nivel de bifurcación pequeñas fluctuaciones pueden dar lugar a distintas predicciones. Si hay un pequeño error podemos pronosticar crecimiento exponencial y hay extinción.

Scheefer Model. Cosecha con esfuerzo constante

Suponemos que el crecimiento de una población sigue un modelo logistico. Se ejerce un control de caza o pesca limitado por el numero de individuos (elefantes en un parque nacional). E es un parametro con unidades de caza.
Suposición: El número de peces pescado es proporcional esfuerzo.
Analizamos la ecuación:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - Ex$$

Cambio de variables: $y = \frac{x}{K}$ $\tau = rt$ $h = \frac{E}{r}$ obtenemos otra logistica.

$$\dot{y} = y(1 - y) - hy$$

Puntos críticos y bifurcación

- $h = \dfrac{E}{r} > 1$ $\dot{y} = (1-h)y - y^2 < 0$ La población se extingue en tiempo finito.
- $h = 1$ se produce la bifurcación.
- $h < 1$. Dos equilibrios $x_0 = 0, x_\infty = 1 - h$
  - x_∞ es un punto hiperbólico $f'(x_\infty) = -(1-h) < 0 \Rightarrow$ es inestable
  - $x_0 = 0$, $f'(0) = 1 - h > 0 \Rightarrow$ inestable.

Ejercicio Interpreta la naturaleza del punto crítico $h = 1$ recordando el punto crítico. Desde este punto de vista, sugiere cual es el máximo esfuerzo pesquero.

solución explicita: Ecuaciones de Bernoulli

Recordamos solución explicita de la Bernoulli

$$\dot{y} = ay + by^2, z = \frac{1}{y}, \dot{z} = -az - b$$

Si $A(t) = \int_0^t a(s)ds$

$$z(t) = e^{-A(t)}[z(0) - \int_0^t e^{A(s)} b(s)ds$$

Si a y b son constantes

$$z(t) = e^{-at}[z(0) - b\int_0^t e^{as} ds] = e^{-at}[z(0) - \frac{b}{a}[e^{at} - 1] = (z_0 + \frac{b}{a})e^{-at} - \frac{b}{a}$$

$$y(t) = \frac{e^{at}}{\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}(e^{at} - 1)} = \frac{1}{(\frac{1}{y_0} + \frac{b}{a})e^{-at} - \frac{b}{a}}$$

SpruceBudworm/polilla del abeto

Se modela la población como una logística con el efecto de un predador.

$$\dot{N} = r(1 - \frac{N}{K}) - p(N)$$

Donde $p(N) = \dfrac{BN^2}{A^2 + N^2}$ es la tasa de predación. **Propiedades de la tasa de predación**

- Si la población es pequeña la tasa de predación es casi 0 porque los predadores persiguen otras presas.
- Por otro lado la predación no puede muy larga. Hay una cota superior a cuantas polillas pueden ser depredadas.
- $p'(N) = \dfrac{2A^2BN}{(A^2 + N^2)^2} > 0$. La tasa de predación siempre aumenta.
- $p''(N) = \dfrac{2A^2B[A^2 - 3N^2]}{(A^2 + N^2)^2} \Rightarrow N = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$ pasa de aceleración

$B = Pp$ numero de predadores por una estimación del número de presas de un pajaro. A Población de polillas cuando $P(N) = \frac{B}{2}$. r tasa de nacimiento de las polillas. K máxima capacidad de las polillas.

- Escala $u = \frac{N}{A}, \tau = \frac{Bt}{A}, r = \frac{Ar_B}{B}, q = \frac{K_B}{A}$
- $\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{du}\frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = A\frac{B}{A}\frac{du}{d\tau} = B\frac{du}{d\tau}$
- Substituyendo nos queda

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{Ar_B}{B}u(1 - \frac{A}{K}u) - \frac{u^2}{1+u^2}$$

que es una logística con $r = \frac{Ar_B}{B}, q = \frac{K}{A}$

$$\frac{du}{d\tau} = ru(1 - \frac{u}{K}) - \frac{u^2}{1+u^2} = u(r(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u}{1+u^2})$$

$$\underbrace{r(1-\frac{u}{q})}_{L_1}-\underbrace{\frac{u}{1+u^2}}_{L_2}=0 \tag{1}$$

Los equilibrios son las intersecciones de L_1 y L_2 pero nos interesa cuando se produce la bifurcación. Ejercicio Razona porque cuando las curvas son tangentes se va a producir una bifurcación.
Resolvemos en r Derivamos L_1, L_2 respecto a u e igualamos:

$$-\frac{r}{q}=\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}\Rightarrow r=-q\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \tag{2}$$

Resolvemos (??) (??) **en** q, r

$$-q\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}(1-\frac{u}{q}-\frac{u}{1+u^2})\Rightarrow q-u=u\frac{u^2+1}{u^2-1}$$

$$q(u^2-1)=u(u^2-1+u^2+1)=2u^3\Rightarrow q=\frac{2u^3}{u^2-1}$$

Bifurcación variando r

Por tanto podemos parametrizar los puntos de bifurcación:

$$(r,q) = (\frac{2u^3}{1+u^2}, \frac{2^3}{u^2-1})$$

Ejercicio. Dibuja esta curva.
Analisis experimental: Si fijamos $K = 10$ y vamos variando r. El numero de puntos críticos varia mucho.

- $r = 0.3$ dos puntos criticos $u_0 = 0$, $u_1 \approx 0.3$ estable.
- Si $r = 0.383971$ tenemos tres puntos de equilibrio. dos inestables y un estable 0.3
- Si $r = 0.5$ tenemos 4 los estable son 0.6 y 7.3
- $r = 0.55$ teemos tres otra ves. El único estable es 7.724
- $r = 0.645$ tenemos otra vez dos. El único estable es 8.11

plano rq e histéresis

Plano rq Dibujamos la curva parametrizada de los puntos de bifurcación, $t^3/(t^2-1), 2t^3/(t^2+1)^2$. La curva que no es diferenciable en $\sqrt{3}$ nos divide la region en tres regiones donde pasamos de uno a dos (sobre la curva) a tres y a cuatro puntos de equilibrio.

Gráfico de Histéresis

Podemos seguir el gráfico de cual es el valor de la puntuación en el punto de equilibrio estable. Si fijamos un q vemos que segun aumenta la r repentinamente aparece un punto de equilibrio estable mucho mas alto. Además la región de atraccion del punnto menor es cada vez mas pequeña por lo que segun r va aumentado se produce un repentino salto en la población. Ya nos encontramos en la región de atracción del punto plaga. Aunque volvamos a disminuir la r seguimos en la región de atracción del punto plaga. Tenemos que disminuir mucho mas el r para entrar en la región de atracción del punto refugio.

Interpretación

Ejercicio: Investiga sobre el fenómeno de histéresis en la ciencia.

- u_1 el primer punto de equilibrio es el equilibrio refugio.
- u_3 es el equilibro plaga (brote de la plaga).

Logicamente el objetivo es ajustar los parametros para evitar el equilibrio plaga. Existen varias opciones, insecticidas, nuevos predadores, esterilizaciones, modificar el bosque.
Sistemas mas complejos tienen en cuenta mas variables que varian mas despacio. Por ejemplo el espacio para las larvas y las reservas de energía para las polillas.