Temario

- Introducción a la mecánica
- Las ecuaciones de Euler Lagrange para una partícula equivalen a las leyes de Newton.
- El pendulo simple y la maquina de Atwood
- La Energia Total es una integral primera.
- Mecánica Hamiltoniana.
- Ecuaciones de Euler Lagrange para varias variables dependientes.
- Teorema de Noether.
- Fuerzas Centrales
- Leyes de Kepler

Introducción a la mecánica

La mecánica estudia el movimiento de objetos sometidos a distintas fuerzas. Tras el trabajo pionero de Newton $F = m\ddot{x}$, existen varios desarrollos alternativos.

En el marco clásico son equivalentes pero tienen la ventaja de que se pueden extender a situaciones correspondientes a otros campos de la física como el electromagnetismo, a la mecánica estadística o a la mecánica cuantica. Además un problema de la mecánica Newtoniana es que calcular aceleraciones variando las coordenadas es muy dificil. Sin embargo la mecánica Lagrangiana simplifica mucho estos cálculos.

"Los principios Variacionales de la mecánica están enraizados en el gran siglo del liberalismo que empieza con Descartes y contempla la vida de Leibnitz, Spinoza, Goethe y Bach. Es el primer periodo de pensamiento cósmico desde los griegos. " Cornelius Lanzcos

Distintos enfoques a la mecánica

Existen tres enfoques para la mecánica clásica.

- Mecánica Newtoniana $F = m\ddot{x}$.
- Mecanica Lagrangiana basada en el Cálculo de Variaciones.
- Mecánica Hamiltoniana. Dual a la Lagrangiana. Sistemas de primer orden. Es una formidable extensión de los sistemas planares.

Además la mecánica moderna, se divide en estas tres grandes ramas.

- Mecánica Estadística.
- Mecánica Relativista.
- Mecánica cuántica.

La mecánica Lagrangiana:Notación

La mecánica Lagragiana comienza estudiando la evolución de una partícula (cuya posición es $q(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (q_i(t))_{i=1}^3$ sobre la que actua una fuerza conservativa (Es decir derivada de un potencial). En esta situación, recordamos Energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 + \dot{q_3}^2)$ Energía Potencial. Viene dada por $V = V(q_1, q_2, q_3)$[1]. se define el Lagrangiano como

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 + \dot{q_3}^2) - V(q_1, q_2, q_3)$$

Coordenadas Generalizadas: Ligaduras : En una primera aproximación estamos suponiendo que tenemos una única partícula sin ligaduras (restricciones). El siguiente objetivo de la mecanica es describir sistemas formados por N particulas, Ademas puede que las particulas tengan que estar en la esfera o cualquier otra restricción por lo que usamos coordenadas generalizadas(por ejemplo las esféricas).

El principio de Hamilton

Brillantemente, muchos problemas físicos se pueden describir minimizando una función adecuadamente escogida, que llamamos Lagrangiano. En el caso de una unica partícula la relación es especialmente nítida.

Theorem (Principio de Mínima Acción de Hamilton)

Una particula sometida a una fuerza conservativa $F = -\nabla V$ que en el instante t_1 esta en P y en el instante t_2 está en P_2 recorre una trayectoria que hace estacionaria la acción definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

Ventajas del enfoque Lagrangiano(Variacional)

- Independiente de coordenadas.
- Las restricciones (ligaduras) se expresan en terminos de las coordenadas generalizadas.
- Es mas facil tratar con el potencial que con las fuerzas. (Escalar versus vectorial).
- Es más facil de extender a los campos modernos de la mecánica.

Lagrange versus Newton

Recordemos que $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$. En particular L es autónomo. Supongamos que existe una única coordenada (en seguida veremos que en varias variables el proceso es análogo)

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = m\ddot{q}$
- $\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$
- $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \overbrace{m\ddot{q} = F}^{\text{Segunda ley de Newton}}$

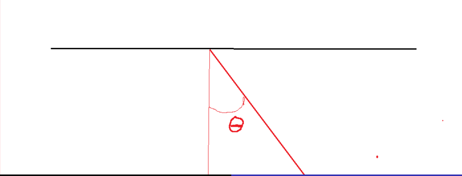
La ecuacion de Euler Lagrange relativa a la acción de Hamilton es la ecuacín de la mecánica Newtoniana

En mecanica $m\dot{q} = p$ se llama el momento

El péndulo simple

Consideramos un péndulo de longitud l, vamos a usar como coordenada geeralizada cuya posición viene dada por el ángulo θ con el eje vertical. Su velocidad se expresa por $v = l\dot{\theta}$. La fuerza es la gravedad así que $V = mgy$.

- El Potencial siempre esta definido modulo una constante, expresamos la coordenada $y = 1 - \cos(\theta)$ para que sea cero en posición de reposo.
- La velocidad es $x(t) = l\sin(\theta), y(t) = -l\cos(\theta), \dot{x} = l\cos(\theta)\dot{\theta}, \dot{y} = l\sin(\theta)\dot{\theta}$. Por tanto $\boxed{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l\dot{\theta}^2}$



Por tanto el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)) = L(\theta, \dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

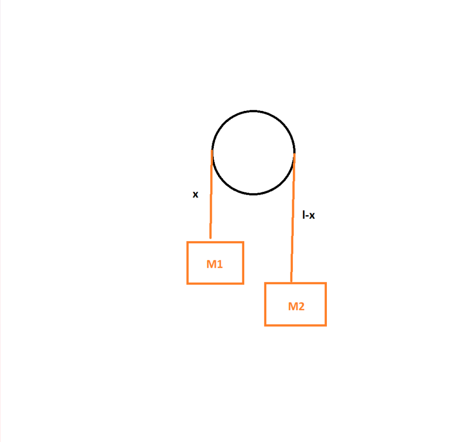
- $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}2ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta}$
- $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial mgl(1 - \cos(\theta))}{\partial \theta} = -mgl\sin(\theta)$

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$ Si θ es pequeño menor que 20 $\sin(\theta) \approx \theta$ la sabemos resolver.... $\theta = \theta_0 \cos(t\sqrt{g}l)$

La maquina de Atwood

Le Energia potencial es la que la gravedad le otorga a las dos masas

$$V = -M_1 g x - M_2 g(l - x),\, T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$$



Por tanto, el lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g(1 - x)$$

Calculamos las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}$$

que nos conduce a

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g$$

La energía es una integral primera

Recordemos que para problemas autónomos $f - y' f_{y'}$ es una integral primera. Si el potencial V no depende del tiempo, el Lagrangiano $L = T - V$ no depende del tiempo, que leido en coordenadas generalizadas quiere decir que $\boxed{L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$ es constante.

Los lagrangianos correspondientes a fuerzas conservativas no dependen de la velocidad por lo que, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$

$$L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) - \dot{q}m\dot{q} == -\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$$

Es decir

Proposición

Los minimizadores de un Lagrangiano $L = T + V$ conservan $E_{Total} = T + V$ la suma de la energía cinética y potencial.

Mecánica Hamiltoniana

En mecánica es tradición escribir las expresiones en términos del momento $m\dot{q} = p$. En esa notación la energia total es un ejemplo de Hamiltoniano y se escribe como

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

En este caso observamos que

$$H_p = \frac{p}{m}, H_q = V'(q) = -F(q), p = m\dot{q}, \dot{p} = m\ddot{q}, \dot{q} = \frac{p}{m}$$

En esta notación, q, p, H las leyes de la mecánica son equivalentes a las famosas ecuaciones canónicas

$$\boxed{\dot{p} = -H_q, \dot{q} = H_p},$$

La mecánica Lagrangiana y la Hamiltoniana son duales mediante la transformada de Legendre $H = \dot{q}L_{\dot{q}} - L$.

Variaciones de Lagrange en funciones de varias variables

Consideramos funcionales que depende de varias funciones $y_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)dx$$

Con las condiciones de contorno $y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib}$. Usamos la notación $\overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_n), \dot{\overrightarrow{y}} = (\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)$. Variaciones: Seguimos la filosofía de Lagrange definiendo variaciones $h_i = \epsilon\varphi_i$ donde $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$ y repetimos la filosofía 1 D.

- Paso 1: derivamos respecto a ϵ
- Paso 2: Integramos por partes.

Variaciones de Lagrange en funciones de varias variables

Consideramos funcionales que depende de varias funciones $y_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y_1}, \ldots, \dot{y_n})dx$$

Con las condiciones de contorno $y_i(a) = y_{ia}, y_i(b) = y_{ib}$. Usamos la notación $\overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_n), \dot{\overrightarrow{y}} = (\dot{y_1}, \ldots, \dot{y_n})$. Variaciones: Seguimos la filosofía de Lagrange definiendo variaciones $h_i = \epsilon\varphi_i$ donde $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$ y repetimos la filosofía 1 D.

- Paso 1: derivamos respecto a ϵ
- Paso 2: Integramos por partes.

Ecuaciones de Euler-Lagrange

Paso 1: Derivamos

$$\delta J[\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\varphi}] = \frac{d}{d\epsilon} J(\overrightarrow{y} + \epsilon \overrightarrow{\varphi}) = \sum_{i=1}^{n} (f_{y_i}\varphi_i + f_{\dot{y}_i}\dot{\varphi}_i)$$

Paso 2: Integramos por partes

$$\delta J[\overrightarrow{y}, \overrightarrow{\varphi}] = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b [f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{\dot{y}_i}]\varphi_i dx$$

Escogemos primero para cada $j \neq i, \varphi_j = 0$ de modo que para cada φ se cumple que

$$\int_a^b [f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{\dot{y}_i}]\varphi dx$$

y usando el lema fundamental del cálculo de variaciones, obtenemos n ecuaciones. Para cada $i = 1, \ldots, n$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}) = 0}$

Lagrange versus Newton

Recordemos que $L = \frac{1}{2} m \sum \dot{q}_i{}^2 - V(q_1, q_2, q_i)$. En particular L es autónomo.

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = m\ddot{q}_i$
- $\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$
- $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \overbrace{m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i}^{\text{Segunda ley de Newton}}$

Las ecuaciones de Euler Lagrange de la acción de Hamilton son las ecuaciones Newton

La energía es una integral primera

Como el Lagrangiano $L = T - V$ no depende del tiempo, tenemos que $\dot{L} = \frac{d}{dt}L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$ Thus

$$\frac{d}{dt}(L - \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \sum \dot{q}_i (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})) = 0$$

En nuesto como hemos asumido que V no depende de la velocidad, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$

$$L - \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} m \sum \dot{q}_i{}^2 - V(q) - \sum \dot{q}_i m \dot{q}_i == -\frac{1}{2} m \sum \dot{q}_i{}^2 - V(q)$$

Es decir

Proposición

Los minimizadores de un Lagrangiano $L = T + V$ conservan $E_{Total} = T + V$ la suma de la energía cinética y potencial.

Teorema de Noether

Invarianza del Lagrangiano respecto a un parametro

Sean q_i las coordenadas generalizadas. Supongamos que las hacemos variar respecto a otro parametro h, $q_i = q_i(h,t)$ de manera que $L(q_i(t,h)) = L(q_i(t,0))$. Entonces

Theorem (Noether)

Si el lagrangiano es invariante respecto a h entonces

$$I_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}(h,t)$$

se conserva para todo h. En particular para $h = 0$.

Demostración

La invarianza de L la leemos como $\frac{\partial L}{\partial h}(t,h) = 0$. Por la regla de la cadena

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial h} \underbrace{=}_{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial q_i}{\partial h})} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\frac{\partial q_i}{\partial h}) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})}\frac{\partial q_i}{\partial h}$$

donde la última igualdad viene de la ecuación de Euler Lagrange. Usando la regla del producto se sigue que

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial h}) = 0$$

Es decir $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial h}(t,h)$ es constante en el tiempo(se conserva).

Conservación del momento lineal

Consideramos que el potencial de la fuerza solo depende de la distancia relativa de las partículas. Entonces podemos escribir el Lagrangiano como

$$L = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x_i}^2 + \dot{y_i}^2 + \dot{z_i}^2) + \sum V(\|(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j\|)$$

(En particular se satisface la tercera ley de Newton). Claramente este Lagrangiano es independiente de las traslaciones $L(q_i, \dot{q}_i) = L(q_i + h, \dot{\overline{q_i + h}})$

$$\frac{\partial L}{\dot{q}_i} = \sum m_i \dot{x}_i, \frac{\partial q_i}{\partial h} = 1$$

asi pues

El vector del momento lineal: $P = \sum_i m_i(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$ se conserva

Coordenadas cíclicas.

Decimos que una coordenada generalizada q_i es cíclica si L no depende de q(aunque pueda depender de $\dot{q}_i$).

Llamamos $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ cantidad de momento generalizada, canónica o conjugada. Es clave en el enfoque Hamiltoniano de la mecánica.

En nuestra busqueda de cantidades conservadas, la aplicación directa de las ecuaciones de Euler Lagrange, nos dice que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Si q_j es cíclica se conserva el correspondiente momento generalizado $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Es decir, el momento generalizado es una integral primera!.

Conservación del momento angular para fuerzas centrales

Supongamos ahora que la fuerza es central es decir el potencial es radial. Entonces $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(r)$ y es por tanto invariante respecto a rotaciones. Consideremos primero rotaciones respecto al eje z $(x(\theta), y(\theta), z(\theta) = (R_\theta(x, y), z) = (e^{i\theta}(x, y), z)$. Aqui

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \partial_\theta R_\theta = \begin{pmatrix} -sin(\theta) & -cos(\theta) \\ cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

o en notación compleja
$R_\theta(x, y) \equiv e^{i\theta}(x + iy), \partial_\theta R_\theta \equiv ie^{i\theta}(x + iy)$. Por tanto para obtener nuestro invariante de Noether, tenemos que

$$\partial_\theta R_{\theta|\theta=0}(x, y) = ie^{i\theta}{}_{|\theta=0}(x + iy) = i(x + iy) = -y + ix \equiv (-y, x)$$

El momento angular es constante

Como, $\dfrac{\partial L}{\dot{q}_i} = m\dot{x}_i$ que la integral de Noether es $I_N(t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dfrac{\partial z}{\partial \theta)} = m(-y\dot{x} + x\dot{y})$ y el teorema de Noether afirma que esta cantidad es invariante respecto al tiempo.

Las variables (x, y, z) son intercambiables en este problema por lo que tambien son constantes Ahora bien, el funcional es invariante respecto a cualquier rotacion por lo que obtenemos que tambien son constantes $m(-y\dot{z} + z\dot{y}), m(-z\dot{x} + x\dot{z})$. Recordemos que el momento angular, o momento cinético se define como

$$P_{\text{ang}} = m[(x, y, z) \times v] = m[(x, y, z) \times (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})]$$

El momento angular se conserva bajo la acción de fuerzas centrales

Los círculos máximos son geodésicas de las esfera

Fuerzas centrales dan movimientos planos

Por tanto, el teorema de Noether nos dice que bajo fuerzas centrales L es un vector constante. La definición de momento angular y producto vectorial implica que el vector de posición r es perpendicular a L. Es decir la particula siempre es ortogonal al vector constante L. Sean (x, y, z) coordenadas cartesianas con z paralelo a L.

Bajo fuerzas centrales el movimiento satisface que $z(t) = 0$.

Coordenadas Polares En coordenadas polares $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), \dot{x} = \dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta), \dot{y} = \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta)$. Por tanto $(\dot{x}, \dot{y}) = R_\theta(\dot{r}, r\dot{\theta})$. Como R_θ es una isometría el Lagrangiano se escribe como

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Es decir θ es una coordenada cíclica (L no depende de θ).

Fuerzas centrales (el problema de los dos cuerpos)

LLamamos fuerzas centrales conservativas a fuerzas $F = -\nabla U$ donde $U(r)$ solo depende de la distancia a un centro de fuerzas fijo.

El problema de los dos cuerpos se reduce al estudio de fuerzas centrales

Idea: Sea la posición del primero $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ y definamos $\mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1 + m_2}$ su centro de masas y $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{r_2}$

Un cálculo directo con la energia cinética nos dice que

$$(m_1\mathbf{r_1}^2 + m_2\mathbf{r_2}^2) = (m_1 + m_2)R^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}^2$$

Por tanto

$L = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2 + \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}^2 - V(r, \dot{r})$

Por tanto, las coordenadas del centro de masas, son cíclicas y su velocidad uniforme. Por lo que podemos asumir que el Lagrangiano es

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{r}^2 - V(r, \dot{r})$$

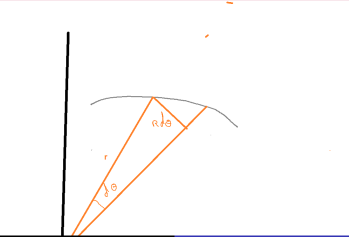
Velocidad Aerolar

Por tanto su correspondiente momento generalizado se conserva:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = P_{\text{ang}} \iff r^2\dot{\theta} = \frac{P_{\text{ang}}}{m}$$

Esta magnitud conservada nos sirve para entender la llamada Velocidad areolar: Area barrida por el vector de posición por unidad de tiempo. Efectivamente aproximando por el triangulo de

$$dA(r,\theta) = \frac{1}{2} rrd\theta = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta}$$



Segunda ley de Kepler

Por tanto, la invarianza del Lagrangiano respecto a fuerzas centrales, nos condujo mediante el teorema de Noether, a describir momentos planos con el momento angular constante. Interpretando esto en términos de la velocidad aerolar obtenemos que para toda fuerza central, $A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2+\delta} dA = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt = \frac{1}{2}\frac{P_{\mathrm{ang}}}{M}\delta$ es decir el area es constante. El movimiento de los planetas alrededor de sol es una fuerza central por lo que,

Theorem (Segunda ley de Kepler)

El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector (vector de posición) es constante

Las leyes de Kepler

Theorem (Primera ley de Kepler)

Todos los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos.

Theorem (Segunda ley de Kepler)

El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector (vector de posición) es constante

Theorem (Tercera ley de Kepler)

El cuadrado del periodo de cada planeta es proporcional al cubo del eje mayor de la elipse de la órbita.