Hoja de problemas VII. Algebra II.

Ejercicio 1. *Sea $E = F(\alpha)$ y supongamos que β es una raíz en E de un polinomio mínimo de α sobre F. Demostrar que existe un único automorfismo $\phi : E \to E$ tal que $\phi(\alpha) = \beta$ y $\phi(c) = c$ para $c \in F$.*

Ejercicio 2. *Consideremos $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ y sea ϕ el $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\xi)$ dado por $\phi(\xi) = \xi^4$. Demostrar que el cuerpo fijo de ϕ es $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.*

Ejercicio 3. *Sea ϕ un automorfismo del cuerpo E con cuerpo fijo el subcuerpo F. Supongamos que $f \in E[x]$ es mónico y se descompone en factores lineales en E. Demostrar que si siempre que $f(\alpha) = 0$ se tiene que $f(\phi(\alpha)) = 0$ para $\alpha \in E$, entonces $f \in F[x]$.*

Ejercicio 4. *Sea E el cuerpo de descomposición en $\mathbb{C}$ del polinomio x^4+1 sobre $\mathbb{Q}$. Demostrar que $|E : \mathbb{Q}| = 4$. Encontrar los automorfismos de E con cuerpos fijos $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(i)$. ¿Existe un automorfismo de E cuyo cuerpo fijo sea $\mathbb{Q}$?*

Ejercicio 5. *Denotamos por E el cuerpo de descomposición en $\mathbb{C}$ de $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Encontrar un grupo de seis automorfismos de E con cuerpo fijo $\mathbb{Q}$ y demostrar que $|E : \mathbb{Q}| = 6$.*

Ejercicio 6. *Sea $E = \mathbb{Q}(\xi)$ donde $\xi = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Demostrar que E es una extensión normal de $\mathbb{Q}$ y determinar su grupo de Galois. Encontrar todos los cuerpos intermedios de la extensión $E/\mathbb{Q}$, los subgrupos de $Gal(E/\mathbb{Q})$ que les corresponden y determinar cuáles de ellas son extensiónes normales de $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 7. *Sea E una extensión normal de F con $Gal(E/F)$ un grupo cíclico de orden n. Demostrar que las siguientes condiciones se cumplen:*

a) Para cada divisor d de n existe exactamente un cuerpo intermedio B con $|E : B| = d$.

b) Si B_1 y B_2 son dos cuerpos intermedios, entonces $B_1 \subseteq B_2$ si y sólo si $|E : B_1|$ divide a $|E : B_2|$.

Ejercicio 8. *Sea E/K una extensión de Galois, F/K una subextensión y $a \in F$. Probar que $F = K(a)$ si y sólo si los únicos elementos de $Gal(E/K)$ que fijan a están en $Gal(E/F)$.*

Utilizando estos resultados probar que

1. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} + \sqrt{5})$;

2. El cuerpo de descomposición de $x^6 - 3x^3 + 2$ es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{-3})$.

Ejercicio 9. *Determinar el grupo de Galois de la extensión $E/\mathbb{Q}$, donde E es el cuerpo de descomposición de $x^4 + x^2 - 6$ sobre $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 10. *Encontrar el grupo de Galois de la menor extensión normal de* $\mathbb{Q}$ *conteniendo a* $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

Ejercicio 11. *Calcular el grupo de Galois de la extensión* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 12. *Hallar el grupo de Galois del polinomio* $x^4 - 2$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *(el grupo de Galois de un polinomio* $p \in K[x]$ *es el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de* p *sobre* K*).*

Ejercicio 13. *Sea* $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. *Calcular el grupo de Galois de* f *sobre* $\mathbb{Q}$ *y los cuerpos fijos por sus subgrupos.*

Ejercicio 14. *Sea* $\alpha = \sqrt{2} + i$ *y sea* f *el polinomio mínimo de* α *sobre* $\mathbb{Q}$. *Calcular el grupo de Galois de* f *sobre* $\mathbb{Q}$. *Calcular los cuerpos fijos por los subgrupos.*

Ejercicio 15. *Calcular el grupo de Galois del polinomio* $x^{12} - 1$ *sobre* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 16. *Calcular el grupo de Galois del polinomio* $(x^3 - 2)(x^2 - 2)$ *sobre* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 17. *Sea* E *el cuerpo de descomposición de* $f(x) = x^p - 2$, *donde* p *es un primo. Demostrar que* $E = \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$ *donde* $\xi^p = 1$, $\xi \neq 1$ *y* $\alpha^p = 2$. *Demostrar que* $|E : \mathbb{Q}| = p(p-1)$. *Si* $p = 5$, *calcular el grupo de Galois y los cuerpos fijos por los subgrupos.*

Ejercicio 18. *Supongamos que* E/K *es Galois con* $\mathrm{Gal}(E/K) \cong C_2 \times C_2$. *Probar que existen* $a, b \in E$ *tales que* $E = K(a, b)$ *con* $a^2, b^2 \in K$.

Ejercicio 19. *Construir extensiónes de* $\mathbb{Q}$ *con los siguientes grupos de Galois:*

$$C_2 \times C_2, C_4, \Sigma_3, D_8, D_{12}, D_{20}.$$

Ejercicio 20. *Sea* E *un cuerpo de descomposición sobre* K *de un polinomio irreducible* f. *Supongamos que el grupo de Galois de* E/K *es isomorfo al grupo quaternio* Q_8. *¿Que se puede decir sobre el grado de* f*?*

Ejercicio 21. *Si* p *es un primo, hallar el grupo de Galois del polinomio* $f(x) = x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 22. *Sea* E/K *una extensión de Galois and* K_1 *and* K_2 *subextensiónes. Pongamos* $G = Gal(E/K)$.

1. Probar que el subgrupo $Gal(E/(K_1 \cap K_2)$ *de* G *es igual al subgrupo generado por* $Gal(E/K_1)$ *y* $Gal(E/K_2)$.

2. Sea K_3 *el ménor subcuerpo que contiene a* K_1 *y* K_2. *Probar que el subgrupo* $Gal(E/K_3$ *de* G *es igual a la intersección de* $Gal(E/K_1)$ *y* $Gal(E/K_2)$.

3. Supongamos que K_1/K *y* K_2/K *es de Galois. Probar que* K_3 *es de Galois. Demostrar que* $Gal(K_3/K_1) \cong Gal(K_2/(K_1 \cap K_2)$.

Ejercicio 23. *(*) 1. (Dedekind) Sea K un cuerpo y sean $\tau_1, \ldots, \tau_n$ automorfismos distintos de K. Entonces $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son K-linealmente independientes.*

2. (Artin) Sea E un cuerpo y sea G un subgrupo finito de $\operatorname{Aut} E$. Si $F = \mathbb{F}(G) = \{a \in E |\ \phi(a) = a\ \forall\ \phi \in G\}$, entonces $|E : F| = |G|$. Deducir que E/F es de Galois.

Ejercicio 24. *Sea E una extensión de $\mathbb{F}_p$ tal que $[E : \mathbb{F}_p] = n$. Como E^* es un grupo cíclico y tiene como generador digamos θ, sabemos que $E = \mathbb{F}_p(\theta)$. Sea $\phi : E \to E$ dada por $\phi(x) = x^p$. Demostrar que $\{1,\ \phi,\ \phi^2, \ldots, \phi^{n-1}\}$ son automorfismos distintos de E dejando $\mathbb{F}_p$ fijo y concluir que E es una extensión de Galois de $\mathbb{F}_p$ con el grupo de Galois $Gal(E/\mathbb{F}_p) = \{1,\ \phi, \ldots, \phi^{n-1}\}$.*

Ejercicio 25. *(*) Sea F/K una extensión de grado n y $G = \mathrm{Gal}(F/K)$ (En este ejercicio* **no** *suponemos que K tiene característica 0).*

1. Demostrar que $|G| \leq n$.

2. Demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

a) F/K es una extensión de Galois;

b) $|G| = n$;

c) $K = \{e \in F |\ \phi(e) = e\ \forall\ \phi \in G\}$;

d) F es el cuerpo de descomposición sobre K de un polinomio irreducible y separable de $K[x]$;

e) F es el cuerpo de descomposición sobre K de un polinomio que es producto de polinomios irreducibles y separables de $K[x]$.

Ejercicio 26. *(*) Sea N una extensión finita sobre K. Entonces,*

(1) Existe un subcuerpo separable M de N tal que contiene a cualquier subcuerpo separable de N.

(2) Existe un subcuerpo L puramente inseparable sobre K ($\equiv$ todo elemento $u \in L$ es tal que para algún k, u^{p^k} pertenece a K), tal que contiene a cualquier subcuerpo de N puramente inseparable sobre K.

(3) $L \cap M = K$,

(4) N es puramente inseparable sobre L,

(5) N es separable sobre M si y sólo si $K(L \cup M) = N$; también N es normal sobre M, L es normal sobre K y $Gal(N/M)$ y $Gal(L/K)$ son grupos isomorfos.