Hoja de problemas VI. Algebra II.

Ejercicio 1. *Encontrar un base de la extensión de cuerpos* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ *sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Ejercicio 2. *Supongamos que* $f \in K[x]$ *se descompone en* $K[x]$ *y supongamos que* $p \in K[x]$ *no es constante y* $p \mid f$. *Probar que* p *se descompone en* $K[x]$.

Ejercicio 3. *Supongamos que* $K \subseteq L \subseteq E$ *son extensiones de cuerpos. Sea* $f \in K[x]$ *no constante. Si* E *es cuerpo de descomposición de* f *sobre* K, *probar que* E *es cuerpo de descomposición de* f *sobre* L. *Por tanto, si* E/K *es normal, entonces* E/L *es normal.*

Ejercicio 4. *Si* $E = K(a_1, \ldots, a_n)$ *y* σ *es un* K*-automorfismo de* E *tal que* $\sigma(a_i) = a_i$ *para todo* i, *probar que* $\sigma = 1_E$.

Ejercicio 5. *Sean* $f(x) = (x^2-3)(x^3+1) \in \mathbb{Q}[x]$ *y* $g(x) = (x^2-2x-2)(x^2+1) \in \mathbb{Q}[x]$. *Probar que* $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ *es cuerpo de descomposición de* f *y* g *sobre* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 6. *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ *es un cuerpo de descomposición de* $x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$ *sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Ejercicio 7. *Construir cuerpos de descomposición sobre* $\mathbb{Q}$ *de los polinomios* $x^3 - 1$, $x^4 + 5x^2 + 5$ *y* $x^6 - 8$.

Ejercicio 8. *Decidir si las siguientes extensiones son normales.*

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}i)/\mathbb{Q}$.

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 9. *Probar que toda extensión de grado* 2 *es normal.*

Ejercicio 10. *Si* E/L *y* L/K *son normales, probar que* E/K *no es necesariamente normal. (AYUDA:* $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.*)*

Ejercicio 11. *Supongamos que* K *es un cuerpo de característica* p *y sea* $a \in K$. *Probar que el polinomio* $p(x) = x^p - x - a$ *se descompone en factores lineales en* $K[x]$ *o es irreducible.*

Ejercicio 12. *Para cada entero positivo* n *probar que existe al menos un polinomio irreducible* $p(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ *de grado* n.

Ejercicio 13. *(*) 1. Supongamos que* E_1/K_1, E_2/K_2 *son extensiones de cuerpos y sea* $\sigma : K_1 \to K_2$ *un isomorfismo. Sea* $p_1 \in K_1[x]$ *irreducible y sea* $p_2 = \sigma(p_1) \in K_2[x]$. *Supongamos que* $a_i \in E_i$ *es una raíz de* p_i *para* $i = 1, 2$. *Entonces* σ *se extiende a un isomorfismo* $\theta : K_1(a_1) \to K_2(a_2)$ *tal que* $\theta(a_1) = a_2$.

2. Supongamos que $\sigma : K_1 \to K_2$ *es un isomorfismo de cuerpos. Sea* $f_1 \in K_1[x]$ *no constante y sea* $\sigma(f_1) = f_2 \in K_2[x]$. *Supongamos que* E_i *es* *cuerpo de descomposición de f_i sobre K_i para $i = 1, 2$. Entonces existe un isomorfismo $\tau : E_1 \to E_2$ que extiende σ. (Ayuda: Demostrar por inducción sobre $|E_1 : K_1|$, usando el apartado anterior)*

3.(Unicidad de los Cuerpos de descomposición).) Sea K un cuerpo y sea $f \in K[x]$ no constante. Si E_1 y E_2 son cuerpos de descomposición de f sobre K, entonces existe $\tau : E_1 \to E_2$ un isomorfismo tal que $\tau(k) = k$, para todo $k \in K$.

4. Sea F/K una extensión de cuerpos finita y normal. Si E es un subcuerpo intermedio, cualquier K-homomorfismo $\phi\colon E \to F$ se extiende a un K-automorfismo $F \to F$.

Ejercicio 14. *Demostrar que $x^2 - 3$ y $x^2 - 2x - 2$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ y tienen el mismo cuerpo de descomposición; de hecho, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.*

Ejercicio 15. *Sea K un cuerpo y $f(x)$ un polinomio de grado n en $K[x]$. Demostrar que si F es el cuerpo de descomposición de f sobre K, el grado de la extensión F/K es menor o igual que el factorial de n.*

Ejercicio 16. *(*) Sea K un cuerpo infinito, $F = K(a, b)$ una extensión separable algebraica y $f = \mathrm{Irr}(a, K)$ y $h = \mathrm{Irr}(b, K)$.*

1. Demostrar que existe $\alpha \in K \setminus \{0\}$ tal que el sistema

$$h(\alpha^{-1}(x - a) + b) = 0, \quad f(x) = 0$$

tiene sólo una solución $x = a$.

2. Sea α del apartado anterior. Pongamos $u = a - \alpha b$ y $g = h(\alpha^{-1}(x-a)+b)$. Demostrar que $(f, g) = (x-a)$. Deducir de aquí que $a \in K(u)$ y $K(u) = K(a, b)$.

3. Sea E/K una extensión finita de característica cero. Probar que existe $u \in E$ tal que $E = K(u)$.

Ejercicio 17. *(*) 1. Supongamos que E/K es una extensión tal que $E = K(a, b)$ para ciertos $a, b \in E$, con K infinito. Si sólo existe un número finito de subcuerpos intermedios $K \subseteq F \subseteq E$, probar que E/K es simple.*

2. Supongamos que E/K es finita. Si K es finito, probar que E/K es simple.

3. Supongamos que E/K es finita. Probar que E/K es simple si y sólo si sólo existe un número finito de subcuerpos entre K y E.