Hoja de problemas V. Algebra II.

Ejercicio 1. *Estudiar cuáles de los siguientes subcuerpos de* $\mathbb{C}$ *coinciden:*

$$\mathbb{Q}(i,\sqrt{2}),\mathbb{Q}(\sqrt{-2}),\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i),\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{1+\sqrt{2}}),\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}}).$$

Ejercicio 2. *1. Demostrar que si* F/K *es una extensión de grado primo, entonces los únicos subcuerpos intermedios* $K \subseteq E \subseteq F$ *son* $E = K$ *y* $E = F$.

2. Demostrar que una extensión de grado primo es simple (está generada por un elemento).

3. Si $K(\alpha)/K$ *es una extensión de grado impar, calcular* $K(\alpha^2)/K$.

4. Suponiendo que el polinomio mínimo de α *es* x^3+x-1*, hallar el polinomio mínimo de* α^2.

Ejercicio 3. *Sea* F/K *una extensión finita y* $f \in K[x]$ *un polinomio irreducible. Demostrar que si* f *tiene una raíz en* F*, entonces el grado de* f *divide a* $|F : K|$.

Ejercicio 4. *Sea* F/K *una extensión de cuerpos y* E_1 *y* E_2 *subcuerpos intermedios tales que* E_1/K *y* E_2/K *son extensiones finitas de grados primos entre sí. Demostrar que* $E_1 \cap E_2 = K$.

Ejercicio 5. *Sea* F/K *una extensión finita de cuerpos y* E *un subcuerpo intermedio. Demostrar que si* $u \in F$*, entonces* $|E(u) : E| \leq |K(u) : K|$.

Ejercicio 6. *Sea* F/K *una extensión de cuerpos y* $u, v \in F$ *dos elementos con* $|K(u) : K| = n$ *y* $|K(v) : K| = m$*. Demostrar que* $|K(u,v) : K| \leq nm$*. Demostrar que si* n *y* m *son coprimos, entonces* $|K(u,v) : K| = nm$.

Ejercicio 7. *Supongamos que* E/K *es una extensión y sean* $a_1, \ldots, a_n$ *elementos de* E*. Sea* $\sigma : E \to L$ *un isomorfismo de cuerpos. Probar que*

$$\sigma(K(a_1,\ldots,a_n)) = \sigma(K)(\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n))\,.$$

Ejercicio 8. *Hallar los polinomios irreducibles en* $\mathbb{Q}[x]$ *de* i, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ *y* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Ejercicio 9. *Hallar los grados de las siguientes extensiones de cuerpos.*

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$.

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},i)/\mathbb{Q}$.

(iv) $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 10. *Hallar el grado y una base de cada una de las siguientes extensiones:*

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Ejercicio 11. *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. *Hallar un polinomio irreducible de* $\mathbb{Q}[x]$ *de grado 4 que tenga una raíz en* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Ejercicio 12. *Sea* α *algebraico sobre el cuerpo* K. *Demostrar que su polinomio mínimo es irreducible en* $K[x]$ *y que divide a cualquier otro polinomio de* $K[x]$ *del que* α *sea una raíz.*

Ejercicio 13. *Calcular el polinomio mínimo de* $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} - 1$.

Ejercicio 14. *Sea* F/K *una extensión de cuerpos y* $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F[x]$ *con los* a_i *elementos algebraicos sobre* K. *Demostrar que si* $u \in F$ *es una raíz de* P, *entonces* u *es algebraico sobre* K. *(Ayuda: considerar el subcuerpo intermedio* $E = K(a_0, \cdots, a_n)$.*)*

Ejercicio 15. *Sea* E_1/K_1 *una extensión finita y sea* $\sigma : E_1 \to E_2$ *un isomorfismo de cuerpos. Si* $\sigma(K_1) = K_2$, *probar que*

$$|E_1 : K_1| = |E_2 : K_2|.$$

Ejercicio 16. *Sea* E/K *una extensión y supongamos que* $a, b \in E$ *son algebraicos sobre* K. *Si existe un isomorfismo de cuerpos* $\theta : K(a) \to K(b)$ *tal que* $\theta(a) = b$ *y* $\theta(k) = k$ *para todo* $k \in K$, *probar que existe un polinomio irreducible* p *en* $K[x]$ *tal que* $p(a) = p(b) = 0$.

Ejercicio 17. *(*) 1. Sea* K *un cuerpo y supongamos que* K *es un subanillo de un dominio de integridad* R. *Demostrar que si* R, *como* K*-espacio vectorial, es de dimensión finita, entonces* R *es un cuerpo.*

2. Sea R *un dominio de integridad conmutativo y con* 1, *y* $P \in R[x]$ *un polinomio de grado* n. *Demostrar que existen como máximo* n *elementos* r *de* R *tales que* $P(r) = 0$.

Ejercicio 18. *(*) Sea* p *un primo y* $n \in N$. *Entonces, salvo isomorfismo, existe un único cuerpo con* p^n *elementos. (Ayuda: usar que si* F *tiene* p^n *elementos entonces* F^* *es un grupo cíclico de orden* $p^n - 1$.*)*

Ejercicio 19. *Sea* K *un cuerpo y* P *un polinomio sobre* K. *Demostrar que existe una extensión de* K *donde* P *tiene al menos una raíz.*

Ejercicio 20. *Sea* K *un cuerpo y* P *un polinomio sobre* K. *Demostrar que existe una extensión de* K *donde* P *se descompone como un producto de polinomios de grado 1.*

Ejercicio 21. *Demostrar que un polinomio* P *sobre* K *no tiene raíces múltiples en* K *si y sólo si el polinomio* $P(x)$ *y su derivada* $P'(x)$ *respecto de* x *son coprimos.*