Hoja de problemas IV. Repaso de las hojas I,II,III. Algebra II.

Ejercicio 1. *Sea* $R = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} | a, b, c \in \mathbb{Z}\}$*. Demostrar que* R *es un subanillo de* $\mathbb{R}$*.*

Ejercicio 2. *Demostrar que el anillo de matrices cuadradas con coeficientes reales,* $M(\mathbb{R})$*, no tiene ideales no triviales aunque no es un anillo de división.*

Ejercicio 3. *Decidir justificadamente si la intersección de dos ideales primos es nuevamente un ideal primo y dar un contraejemplo en caso de no serlo.*

Ejercicio 4. *(a) Demostrar que* $R = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ *es un subanillo de los complejos y que* $M = \{a + bi : \ 3/a, \ 3/b\}$ *es un ideal maximal de* R*.*

(b) Demostrar que R/M *es un cuerpo con nueve elementos.*

Ejercicio 5. *Sea* R *como en el ejercicio anterior. Demostrar que* J *no es un ideal maximal de* R*, donde* $J = \{a + bi : \ 5/a, \ 5/b\}$*.*

Ejercicio 6. *Sea* I *un ideal en un anillo no conmutativo* R *tal que* $ab - ba \in I$ *para todo* $a, b \in R$*. Demostrar que el anillo cociente* R/I *es conmutativo.*

Ejercicio 7. *Sea* $R = \mathbb{Z}[x]$ *y* $I = \{p(x) \in R | p(\sqrt{2}) = 0\}$*. Demostrar que* I *es un ideal de* R *y* $R/I \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*. (Ayuda: usar el primer teorema de isomorfía). Presentar el isomorfismo explícitamente.*

Ejercicio 8. *¿Son isomorfos los anillos* $3\mathbb{Z}$ *y* $2\mathbb{Z}$*?*

Ejercicio 9. *Demostrar que* $\mathbb{Z}_6$ *es isomorfo al producto cartesiano de* $\mathbb{Z}_2$ *y* $\mathbb{Z}_3$*.*

Ejercicio 10. *Encontrar un subanillo del anillo* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *que no sea un ideal de* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*.*

Ejercicio 11. *Calcular las unidades de los siguientes anillos: i)* $\mathbb{Z}[5i]$*, ii)* $\mathbb{Z}_{12}$*, iii)*$\mathbb{Z}_{14}[x]$*, (iv)* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_4)$*.*

Ejercicio 12. *Describir los subcuerpos de* $\mathbb{C}$ *generados por los siguientes conjuntos:*

$$\{-1, 1\}, \ \{0, 1, i\}, \ \mathbb{R}, \ \mathbb{R} \cup \{1 + i\}, \ \{i + 2\}.$$

Ejercicio 13. *Probar que las extensiones* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *y* $\mathbb{Q}(i)$ *son isomorfas como* $\mathbb{Q}$*-espacios vectoriales, pero no como cuerpos.*

Ejercicio 14. *Hallar el cuerpo de cocientes de* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$*. Demostrar que* $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$ *es un cuerpo isomorfo al anterior.*

Ejercicio 15. *Hallar el inverso multiplicativo de 5 en* $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ *usando el algoritmo de Euclides.*

Ejercicio 16. *Decidir si* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *y* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *son dominios de factorización única.*

Ejercicio 17. *Descomponer* 10 *en producto de irreducibles dentro de* $\mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 18. *Demostrar que existen infinitos enteros* k *tales que* $x^9 + 12x^5 - 21x + k$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 19. *Demostrar que* $7x^3 + 6x^2 + 4x + 6$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 20. *Sea* F *un cuerpo y* $f(x) \in F[x]$. *Si* $c \in F$, *probar que* $f(x+c)$ *es irreducible en* $F[x]$ *si y sólo si* $f(x)$ *es irreducible en* $F[x]$. *Demostrar además que* $x^4 + 4x + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 21. *Sea* $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio con coeficientes enteros. Si* p *es un primo tal que* p/a_1, $p/a_2, \ldots, p/a_n$ *pero* p *no divide a* a_0 *ni* p^2 *a* a_n, *demostrar que* $f(x)$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 22. *Obtener el inverso multiplicativo de* $\overline{A}$ *en* $\mathbb{Q}[x]/(B)$, *siendo* $A = x^4 + 13x^2 + 12x + 3$ *y* $B = x^3 + 9x^2 + 8x + 2$.

Ejercicio 23. *Hallar un generador del ideal* $I = (x^4 + 1, x^2 + 1)$ *en* $\mathbb{F}_2[x]$.

Ejercicio 24. *Construir un cuerpo finito con 49 elementos.*

Ejercicio 25. *Dar la tabla de suma y multiplicación de un cuerpo de* 4 *elementos*

Ejercicio 26. *Dar la tabla de suma y multiplicación de un cuerpo de* 8 *elementos. (AYUDA: Factoriza* $x^8 - x$ *sobre* $\mathbb{Z}_2$.*)*

Ejercicio 27. *Sea* R *un dominio euclideo con función euclidea* N. *Si* c *es un divisor propio de* a *(i.e:* a *y* c *no son elementos asociados), entonces demostrar que* $N(c) < N(a)$.