Hoja de problemas III. Algebra II.

Ejercicio 1. *Hallar el cuerpo de cocientes de* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}|a, b \in \mathbb{Z}\}$. *Demostrar que* $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$ *es un cuerpo isomorfo al anterior.*

Ejercicio 2. *Demostrar que el cuerpo de cocientes de* $\mathbb{Z}[i]$ *es* $\mathbb{Q}[i]$.

Ejercicio 3. *Sea* R *un cuerpo. Demostrar que su cuerpo de cocientes es el mismo*

Ejercicio 4. *Sea* R *un dominio de integridad y* K *su cuerpo de cocientes. Demostrar que* $K(x)$ *es cuerpo de cocientes de* $R[x]$.

Ejercicio 5. *Calcular el máximo común divisor en* $\mathbb{Z}[i]$ *de los elementos* $3 - 3i$ *y* $5 + 3i$.

Ejercicio 6. *Demostrar que* a *y* b *estan asociados si y sólo si los ideales generados por* a *y* b *coinciden.*

Ejercicio 7. *Hallar el inverso multiplicativo de 5 en* $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ *usando el algoritmo de Euclides.*

Ejercicio 8. *Decidir si* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ *y* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *son dominios de factorización única.*

Ejercicio 9. *Decidir si* $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ *es un dominio de factorización única.*

Ejercicio 10. *Descomponer* 10 *en producto de irreducibles dentro de* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Ejercicio 11. *Sea* R *un subanillo de* $\mathbb{Q}$ *con* $1 \in R$. *Demostrar que* R *es dominio de ideales principles.*

Ejercicio 12. *(*) Decidir si* $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ *es un dominio de factorización única.*

Ejercicio 13. *(*) 1. Sean* R *un dominio de ideales principales y* $\{I_i|i \in \mathbb{N}\}$ *una familia de ideales de* R. *Suponemos que* $I_i \leq I_{i+1}$ *para todos* $i \in \mathbb{N}$. *Demostrar que existe* $n \in N$ *tal que* $I_k = I_n$ *para todos* $k \geq n$. *(Ayuda: considerar el ideal* $I = \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ *y ver que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $I_n = I$.*)*

2. Usando el resultado anterior demostrar que cualquier dominio de ideales principales es un dominio de factorización única.

Ejercicio 14. *(Teorema de Ruffini) Sean* $P \in K[x]$ *y* $a \in K$. *Entonces* $P(a) = 0$ *si y sólo si* $P \in (x - a)$.

Ejercicio 15. *Decidir si los siguientes polinomios son reducibles en* $\mathbb{Q}$*:*

$$x^4 + 3x + 6,\ x^4 + 1,\ x^3 + 11^{11}x + 13^{13},\ x^4 - x^3 - x - 1.$$

Ejercicio 16. *Encontrar todos los ideales de los siguientes anillos:*

$$\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 1),\ \mathbb{R}[x]/(x^3 - 1),\ \mathbb{C}[x]/(x^3 - 1),\ \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - 1),\ \mathbb{F}_5[x]/(x^3 - 1).$$

Ejercicio 17. *Hallar el máximo común divisor de* $P = x^4+6x^3+13x^2+12x+3$ *y* $Q = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 2$ *escribirlo en la forma* $AP + BQ$.

Ejercicio 18. *Sea* I *un ideal de* $\mathbb{F}_2[x]$ *generado por* $x^3 + x + 1$. *demostrar que* $F = \mathbb{F}_2[x]/I$ *es un cuerpo finito y enumerar sus elementos. Hallar el inverso en* F *del elemento* $x^2 + x + 1 + I$. *Comprobar que el grupo multiplicativo de* F *es cíclico.*

Ejercicio 19. *Consideramos el anillo* $R = \mathbb{Q}[x]/(p(x))$ *con* $p(x) = (x^2+1)(x^4+2x+2)$.

(i) *Describir los ideales en* R.

(ii) *Decidir justificadamente si* $\overline{x}$ *y* $\overline{x+1}$ *son divisores de cero en* R.

(iii) *Decidir si* $\overline{x}$ *y* $\overline{x+1}$ *son elementos invertibles en* R *y, en caso afirmativo, encontrar sus inversos.*

(iv) *Construir un isomorfismo entre los cuerpos* $\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2)$ *y* $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$.

Ejercicio 20. *Consideramos los anillos* $F_1 = \mathbb{Q}[x]/(p(x))$ *y* $F_2 = \mathbb{Q}(i)[x]/(p(x))$, *siendo* $p(x) = x^2 + 4$.

a. Decidir justificadamente si F_1 *y* F_2 *son cuerpos o no.*

b. Decidir si $\overline{x^3 - 5}$ *es un elemento invertible en* F_2 *y, en caso afirmativo, encontrar su inverso.*

Ejercicio 21. *Hallar un generador del ideal* $I = (x^3 + 1, x^2 + 1)$ *en* $\mathbb{F}_2[x]$.

Ejercicio 22. *Hallar un generator del grupo multiplicativo del cuerpo* $F = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$ *y expresar todo elemento de* F^* *como potencia de dicho generador.*

Ejercicio 23. *Construir cuerpos finitos con 8, 9, 25 y 27 elementos.*

Ejercicio 24. *Sea* $K \subseteq \mathbb{C}$ *un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *y* $\sigma\colon K \to \mathbb{C}$ *un homomorfismo de cuerpos. Demostrar que si* $u \in K$ *es raíz de un polinomio* $P \in \mathbb{Q}[x]$, *entonces* $\sigma(u)$ *es raíz del mismo polinomio. Teniendo en cuenta este resultado, hallar todos los automorfismos de* $\mathbb{Q}[i]$ *y* $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Ejercicio 25. *Dado* D *un dominio de ideales principales y* $p \in D$, *demostrar que el ideal* (p) *es maximal si y sólo si* p *es irreducible.*