Hoja de problemas II. Algebra II.

Ejercicio 1. *Sea F un cuerpo y $\{K_i\}$ una familia de subcuerpos de F.*

(i) *Demostrar que la intersección $K = \cap_i K_i$ es un subcuerpo de F.*

(ii) *Sea S un subconjunto de F. Definamos el subcuerpo de F generado por S como la intersección de todos los subcuerpos de F que contienen a S. Lo denotamos por (S). Demostrar que (S) es el menor subcuerpo de F que contiene a S.*

Ejercicio 2. *Calcular las unidades de los siguientes anillos: i) $\mathbb{Z}$, ii) $\mathbb{Z}[i]$, iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, iv) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, v) $\mathbb{Z}_n$, vi) $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.*

Ejercicio 3. *Caracterizar los divisores de cero en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Ejercicio 4. *Demostrar que $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un cuerpo. Demostrar que este cuerpo no es isomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 5. *Sea $f : F_1 \to F_2$ un homomorfismo de cuerpos. Demostrar que f es inyectivo o que transforma todos los elementos de F_1 en cero.*

Ejercicio 6. *Sea R un anillo conmutativo no trivial finito sin divisores de cero. Demostrar que R posee el elemento neutro y que es un cuerpo.*

Ejercicio 7. *Sea A un anillo conmutativo y unitario tal que $x^2 = x$ para cada $x \in A$. Demostrar que:*

- *$x = -x$ para cada $x \in A$.*
- *Si además A es un dominio de integridad demostrar que entonces $A = \{0, 1\}$.*

Ejercicio 8. *Sea A un anillo conmutativo y unitario. Demostrar que todo ideal maximal de A es un ideal primo de A. Dar un ejemplo cuando la implicación inversa no se cumple.*

Ejercicio 9. *Sea A un anillo conmutativo y unitario e I un ideal de A. Se define el* radical *de I como*

$$rad(I) = \{x \in A : \ x^n \in I \ \text{para algún} \ n \geq 1\}.$$

Demostrar que:

- *$I \subset rad(I)$,*
- *$rad(I)$ es un ideal de A, y*
- *$rad(rad(I)) = rad(I)$.*

Ejercicio 10. *Con las mismas condiciones que el ejercicio anterior. Un ideal I se dice radical si I=rad(I). Demostrar que:*

- *Si I es primo entonces I es radical y*
- *I es radical si y solamente si A/I no tiene elementos nilpotentes.*

Ejercicio 11. *Sea p un número primo. Definimos el conjunto*

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} | p \not| s\}$$

1. Demostrar que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un subanillo en $\mathbb{Q}$ y hallar el grupo de las unidades.

2. Demostrar que un ideal no nulo de $\mathbb{Z}_{(p)}$ es generado por un p^k con $k \geq 0$. Deducir que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un dominio de ideales principales.

3. Demostrar que $(p) = p\mathbb{Z}_{(p)}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$. ¿A qué cuerpo es isomorfo al anillo cociente $\mathbb{Z}_{(p)}/(p)$?

Ejercicio 12. *Dado R anillo conmutativo y con unidad. Demostrar que es un dominio de integridad si y sólo si (0) es un ideal primo; y un cuerpo si y sólo si (0) es maximal.*

Ejercicio 13. *Dado un anillo conmutativo y unitario, demostrar que todo ideal maximal es primo.*

Ejercicio 14. *Definimos el producto de dos ideales I y J, $I \cdot J$, de un anillo conmutativo R como el menor ideal de R que contiene a todos los productos de la forma ab donde $a \in I$ y $b \in J$. Demostrar que $(a) \cdot (b) = (ab)$ y que $I \cdot J \subseteq (I \cap J)$.*

Ejercicio 15. *Sea P el conjunto de elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ de la forma $a+b\sqrt{-5}$ con $a \equiv b$ módulo 2. Demostrar que P es un ideal primo maximal de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Demostrar que $P =< 2, 1+\sqrt{-5} >$ y que $P \cdot P =< 2 >$. Demostrar que P no es un ideal principal.*

Ejercicio 16. *Sea K un cuerpo y $\sigma \colon K \to K$ un automorfismo de cuerpos. Demostrar que si P es el subcuerpo primo de K, entonces $\sigma(q) = q$ para cualquier $q \in P$.*

Ejercicio 17. *Demostrar que el orden de un cuerpo finito es igual a una potencia de un primo.*

Ejercicio 18. ** 1. Sea K un cuerpo. Demostrar que para cualquier n existen como máximo n elementos a de K tales que $a^n = 1$.*

2. Utilizando la estructura de grupos abelianos finitos deducir del apartado anterior que si H es un subgrupo finito de K^*, entonces H es cíclico.

3. Demostrar que el grupo multiplicativo F^* de un cuerpo finito F es cíclico. Demostrar que la aplicación $\sigma \colon F \to F$ definida por $\sigma(x) = x^p$ es un atomorfismo de cuerpos (este automorfismo se llama automorfismo de Frobenious *de F). Si el orden de F es p^n,¿qué orden tiene σ?*