

SOLUCIONES

1. (6 puntos) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar las respuestas

- a) Sea G un grupo finito. Entonces para cada divisor d de $|G|$, $d \neq |G|$ hay un elemento $x \in G$ de orden d .

Respuesta: Falso

Solución: $G = C_2 \times C_2 \times C_2$ tiene $|G| = 8$ y todos los elementos de G (salvo el neutro que es de orden 1) son de orden 2. Por tanto este ejemplo no satisface el enunciado para $d = 4$.

- b) Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal de índice m . Entonces para cualquier $x \in G$, $x^m \in H$.

Respuesta: Verdadero

Solución: Como G/H es un grupo y $|G/H| = m$, se deduce del teorema de Lagrange que para cualquier $xH \in G/H$ se tiene $(xH)^m = 1H$. Es decir, $x^m H = H$ lo que equivale a $x^m \in H$.

- c) Existen cuatro grupos no isomorfos, G_1, G_2, G_3, G_4 , tales que para todo grupo abeliano G con $|G| = 180$ existe un i tal que $G \simeq G_i$.

Respuesta: Verdadero

Solución: Observemos que $180 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ y consideremos los grupos

$$G_1 = \mathbb{Z}/2^2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/5 \simeq \mathbb{Z}/180$$

$$G_2 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/5 \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/80$$

$$G_3 = \mathbb{Z}/2^2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 \simeq \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/60$$

$$G_4 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 \simeq \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/30.$$

Si llamamos $m_i := \max\{\text{ord}(x) : x \in G_i\}$ se tiene

$$m_1 = 180, m_2 = 80, m_3 = 60, m_4 = 30.$$

Por tanto son grupos no isomorfos y el Teorema de Clasificación de Grupos Abelianos Finitos nos dice que todo grupo abeliano G con $|G| = 180$ es isomorfo a alguno de estos G_i .

- d) Todo grupo de orden 99 es abeliano.

Respuesta: Verdadero

Solución: Tenemos $|G| = 99 = 3^2 \cdot 11$. Sea ν_3 el número de 3-Sylows de G y ν_{11} el número de 11-Sylows. Sabemos que $\nu_3 \equiv 1 \pmod{3}$ y $\nu_3 | 11$. Por tanto $\nu_3 = 1$ y el único 3-Sylow, lo llamamos A , es normal. Por su parte $\nu_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ y $\nu_{11} | 9$. Por tanto $\nu_{11} = 1$ y el único 11-Sylow, lo llamamos B , es también normal. Además $A \cap B = 1$ ya que $|A \cap B|$ divide a $|A| = 9$ y a $|B| = 11$. Por tanto G es isomorfo al producto directo $A \times B$.

Sabemos que todo grupo de orden p o p^2 , con p primo, es abeliano. En particular A y B son abelianos y, en consecuencia, el producto directo $A \times B$ es también abeliano.

- e) Sea G un grupo, $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y $H \leq G$ un subgrupo. Entonces NH es un subgrupo de G .

Respuesta: Verdadero

Solución: Tenemos $NH \neq \emptyset$ ($1 \in N, H$, y por tanto $1 = 1 \cdot 1 \in NH$), de modo que lo único que hay que demostrar es: $x, y \in NH \Rightarrow x^{-1}y \in NH$.

Sean $x = n_1 h_1, y = n_2 h_2 \in NH$ (con $n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H$). Entonces $x^{-1}y = h_1^{-1} n_1^{-1} n_2 h_2 = h_1^{-1} (n_1^{-1} n_2) h_2 = h_1^{-1} (n_1^{-1} n_2) h_1 h_1^{-1} h_2$. Como $n_1^{-1} n_2 \in N$ por ser N subgrupo, dado que N es normal tenemos $h_1^{-1} (n_1^{-1} n_2) h_1 = n \in N$. Por otra parte $h_1^{-1} h_2 = h \in H$ por ser H subgrupo. Así pues $x^{-1}y = nh \in NH$, como queríamos demostrar.

- f) Todo producto semidirecto $C_6 \rtimes C_2$ es isomorfo bien a $C_6 \times C_2$ bien a D_6 .

Respuesta: Verdadero

Solución: Sabemos que $|Aut(C_n)| = \phi(n)$. En particular $|Aut(C_6)| = \phi(6) = 2$ y los dos únicos automorfismos de $C_6 = \langle g \rangle$ son la identidad, id , y el automorfismo inv definido por $g \mapsto g^{-1}$. Si $C_2 = \langle h \rangle$, como $id^2 = inv^2 = id$, hay dos posibles $\varphi : C_2 \rightarrow Aut(C_6)$, uno definido por $\varphi(h) = id$, que nos da $C_6 \times C_2$, y el otro por $\varphi(h) = inv$.

Sabemos que $C_6 \rtimes C_2$ está generado por g y h con $g^6 = h^2 = 1$ y, si $\varphi(h) = inv$, se tiene $hg = g^{\varphi(h)}h = g^{-1}h$. Es decir, $hgh = g^{-1}$ que, junto a $g^6 = h^2 = 1$, son precisamente las relaciones que definen D_6 .

- g) En un grupo puede haber exactamente 5 elementos de orden 10.

Respuesta: Falso

Solución: Sea $x \in G$ un elemento de orden 10. Entonces en el subgrupo $H = \langle x \rangle$ hay exactamente 4 elementos de orden 10: x, x^3, x^7, x^9 . Si en G hubiese 5 elementos de orden 10 el quinto sería un $y \notin H$. Pero entonces y^{-1} también tendría orden 5 y como $y^{-1} \neq y$, $y^{-1} \notin H$, los elementos de orden 5 serían al menos 6.

- h) Σ_5 tiene 7 clases de conjugación.

Respuesta: Verdadero

Solución: Sabemos que en Σ_5 dos elementos tienen la misma clase de conjugación $\iff$ tienen el mismo tipo de descomposición. Por tanto los elementos

$$id, (12), (123), (1234), (12)(34), (12345), (12)(345)$$

representan todas las clases de conjugación y no son conjugados entre sí.

- i) A_5 tiene exactamente 15 2-subgrupos de Sylow.

Respuesta: Falso

Solución: $|A_5| = 5!/2 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, de modo que los teoremas de Sylow nos dicen que A_5 podría tener 1, 3, 5 o 15 2-Sylows. Vamos a ver que tiene exactamente 5.

Los 2-Sylows de A_5 tienen 4 elementos, de modo que todos sus elementos son de orden 2 o de orden 4. Los elementos de orden 4 en Σ_5 son de la forma $(abcd)$ y no están en A_5 . Los de orden 2 son de la forma (ab) , que tampoco están en A_5 , o de la forma $(ab)(cd)$, que sí están en A_5 . Así pues, en A_5 no hay ningún elemento de orden 4 y hay exactamente 15 elementos de orden 2. Todos los 2-Sylows de A_5 serán por tanto isomorfos a $C_2 \times C_2$ y estarán formados por el elemento neutro y 3 elementos de orden 2 que conmuten entre sí.

Tomemos uno de estos elementos de orden 2, digamos $x = (12)(34)$. Es fácil ver que x no conmuta con ningún elemento de tipo $(ab)(cd)$ que no fije 5. Por tanto el único 2-Sylow al que pertenece x es $H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. El mismo argumento aplicado a cualquier otra elección de $x = (ab)(cd)$ muestra que A_5 tiene exactamente cinco 2-Sylows, cada uno de ellos formado por los elementos de orden 2 de A_5 que fijan, respectivamente, a 1, 2, 3, 4 y 5 (el H que hemos escrito es el de los que fijan el 5; $\{id, (12)(45), (14)(25), (15)(24)\}$ sería el 2-Sylow formado por los elementos de orden 2 que fijan el 3, etc.)

- j) Sea F un cuerpo con 81 elementos. Existe un elemento $a \in F$ tal que $a^{40} = -1$.

Respuesta: Verdadero

Solución: Sabemos que $(F^*, \cdot)$ es un grupo cíclico de orden 80. Sea g un generador. Como $g^{80} = 1$, tenemos $(g^{40})^2 = 1$. En un cuerpo la ecuación $x^2 = 1$ tiene sólo dos soluciones: $x = \pm 1$. Como $g^{40} \neq 1$ porque g es de orden 80, tiene que ser $g^{40} = -1$.

- k) El ideal $(x^2, xy) \subset \mathbb{C}[x, y]$ es principal.

Respuesta: Falso

Solución: Sabemos que $\mathbb{C}[x, y]$ es un DFU. Si fuese $(x^2, xy) = (f)$, sería $f = mcd(x^2, xy) = x$. Como para cualquier mcd , tenemos $(x^2, xy) \subset (x)$. Pero si se diese la igualdad podríamos escribir $x = x^2P + xyQ$ con $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$, y por tanto $1 = xP + yQ$, lo que es imposible porque el polinomio de la derecha se anula en $x = 0, y = 0$ mientras que 1 no se anula nunca.

- l) $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(11)$ es un cuerpo.

Respuesta: Falso

Solución: Vemos que $11 = 2^2 + 7 \cdot 1^2$, y por tanto $11 = (2 + \sqrt{-7}) \cdot (2 - \sqrt{-7})$. Así pues, tomando clases módulo el ideal (11),

$$\overline{2 + \sqrt{-7}} \cdot \overline{2 - \sqrt{-7}} = \bar{0} \quad \text{en } \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(11).$$

Como $2 + \sqrt{-7}$ y $2 - \sqrt{-7}$ no son múltiplos de 11, resulta que $\overline{2 + \sqrt{-7}}, \overline{2 - \sqrt{-7}} \neq \bar{0}$. Luego $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(11)$ tiene divisores de cero, no es dominio, y por tanto no es cuerpo.

[Otra forma de decir lo mismo es que, como $2 + \sqrt{-7}, 2 - \sqrt{-7} \notin (11)$, el ideal (11) no es primo y por tanto $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(11)$ no es ni siquiera un dominio.]

También podríamos haber deducido de $11 = (2 + \sqrt{-7}) \cdot (2 - \sqrt{-7})$, y de que $2 + \sqrt{-7}, 2 - \sqrt{-7}$ no son unidades en $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ (si alguno de ellos lo fuese tendríamos necesariamente $2^2 + 7 \cdot 1^2 = 1$), que tenemos contenidos estrictos de ideales

$$(11) \subsetneq (2 + \sqrt{-7}) \subsetneq \mathbb{Z}[\sqrt{-7}].$$

Por tanto (11) no es un ideal maximal y $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(11)$ no es un cuerpo.

2. (2 puntos) Sea I el ideal de $\mathbb{F}_5[x]$ generado por $\{x^3 + x^2 + 2x + 2, x^3 - x^2 + 2x - 2\}$. Pongamos $A = \mathbb{F}_5[x]/I$.

a) Encontrar un generador de I .

Solución: Como $\mathbb{F}_5[x]$ es DIP, se tiene que $(x^3 + x^2 + 2x + 2, x^3 - x^2 + 2x - 2) = (f) \iff f = \text{mcd}(x^3 + x^2 + 2x + 2, x^3 - x^2 + 2x - 2)$. Como además $\mathbb{F}_5[x]$ es euclídeo, podemos calcular f usando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 2x + 2 &= 1 \cdot (x^3 - x^2 + 2x - 2) + (2x^2 + 4) \\ x^3 - x^2 + 2x - 2 &= (3x + 2) \cdot (2x^2 + 4) + 0 \end{aligned}$$

Luego $\text{mcd}(x^3 + x^2 + 2x + 2, x^3 - x^2 + 2x - 2) = 2x^2 + 4$ o, si se prefiere, $x^2 + 2$, y por tanto $I = (2x^2 + 4)$. También podíamos haber intentado encontrar el mcd factorizando. Es fácil observar que -1 es raíz de $x^3 + x^2 + 2x + 2$, y que 1 es raíz de $x^3 - x^2 + 2x - 2$. Dividiendo entre los correspondientes factores $x + 1$ y $x - 1$ obtenemos $x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x + 1) \cdot (x^2 + 2)$ y $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2)$. Tomando los factores comunes resulta que $f = x^2 + 2$.

b) Demostrar que A es un cuerpo.

Solución: Sabemos que A es cuerpo $\iff I$ es maximal. Por ser $\mathbb{F}_5[x]$ un DIP esto es equivalente a que $x^2 + 2$ sea irreducible en $\mathbb{F}_5[x]$, y lo es por ser de grado 2 y no tener raíces.

c) Sea $a = x^3 - x - 1 + I \in A$. Escribir a de la forma $a = \lambda x + \mu + I$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_5$ y encontrar el inverso de a .

Solución: Dividiendo: $x^3 - x - 1 = x \cdot (x^2 + 2) + (2x - 1)$, de modo que $a = 2x - 1 + I$. Si escribimos $a^{-1} = \alpha x + \beta + I$, multiplicamos y usamos que $x^2 + I = -2 + I$, se tiene $1 + I = (2x - 1 + I) \cdot (\alpha x + \beta + I) = 2\alpha x^2 + (-\alpha + 2\beta)x - \beta + I = (-\alpha + 2\beta)x - (\beta + 4\alpha) + I$. Por tanto necesitamos que $-\alpha + 2\beta = 0$ y $\beta + 4\alpha = -1$, lo que da como solución $\alpha = 2, \beta = 1$. Luego $a^{-1} = 2x + 1 + I$.

También podíamos haber encontrado a^{-1} usando el algoritmo de Euclides.

d) Construir explícitamente un isomorfismo entre A y $\mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 2)$ y demostrar que es un isomorfismo.

Solución: Cualquier homomorfismo de anillos (que envía $1 \mapsto 1$), $f : A \rightarrow \mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 2)$, es inyectivo ya que, por ser A cuerpo, sus únicos ideales son (0) y el propio A . Como además tanto A como $\mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 2)$ son cuerpos con 25 elementos f es también biyectiva. Basta por tanto con encontrar un homomorfismo $f : A \rightarrow \mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 2)$ y será automáticamente isomorfismo.

Dado que $1 \mapsto 1$, para definir f basta con decir quién es $f(y)$, donde $y = x + I \in A$, y, para que esté bien definido, imponer que $f(y^2 + 2) \in (x^2 - 2)$. Pongamos $f(y) = ax + b \pmod{(x^2 - 2)}$ (no hace falta considerar grados mayores). Entonces

$$f(y^2 + 2) = (ax + b)^2 + 2 = a^2x^2 + 2abx + b^2 + 2 = 2abx + 2a^2 + b^2 + 2 \pmod{(x^2 - 2)}.$$

Necesitamos $2ab = 0, 2a^2 + b^2 + 2 = 0$. Si $a = 0$ tendría que ser $b^2 + 2 = 0$, pero esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{F}_5$. Tomamos por tanto $b = 0$ y resolvemos $2a^2 + 2 = 0$, que tiene soluciones $a = \pm 2$. Así pues $f(y) = 2x + (x^2 - 2)$ define un isomorfismo como el que buscamos.

3. (2 puntos) Sea G un grupo de orden 66.

a) Demostrar que G posee un subgrupo normal N de orden 11.

Solución: Como $|G| = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, si ν_{11} denota el número de 11-Sylows de G tiene que ser $\nu_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ y $\nu_{11} \mid 6$. Por tanto $\nu_{11} = 1$ y el único 11-Sylow, N , tiene orden 11 y es normal.

b) Demostrar que G posee un subgrupo normal H de orden 33.

Solución: Sea A un 3-Sylow de G . Como N es normal, $H = NA$ es un subgrupo de G . Además $A \cap N = \{1\}$ porque $|A \cap N|$ divide a $|A| = 3$ y a $|N| = 11$, luego $|NA| = 33$. Entonces H es de índice 2 y por tanto es normal.

c) Demostrar que G es un producto semidirecto de C_{33} por C_2 .

Solución: Sea ahora B un 2-Sylow de G . Por un argumento idéntico al del apartado anterior HB es grupo y $|HB| = 66$. Como HB es subgrupo de G y $|HB| = |G|$, concluimos que $G = HB$, es decir, G es producto semidirecto de H y B .

Como N, A y B tienen orden primo, necesariamente son isomorfos a C_{11}, C_3 y C_2 respectivamente.

Por otra parte $N \trianglelefteq H$, puesto que ya era normal en G . También $A \trianglelefteq H$ porque es un 3-Sylow y el número de 3-Sylows de H debe dividir a 11 y ser $\equiv 1 \pmod{3}$. Por tanto H , tiene un único 3-Sylow, A , que es entonces normal.

Por ser N y A normales, el producto NA es directo de modo que $H = NA \simeq C_{11} \times C_3 \simeq C_{33}$ porque 3 y 11 son primos entre sí.

Uniendo todo o anterior $G = H \rtimes B \simeq C_{33} \rtimes C_2$.