ÁLGEBRA II

Hoja 7. Aplicaciones ortogonales y unitarias

1. Sean $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos endomorfismos cuyas matrices referidas a sendas bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, son:

a) $M(f_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c) $M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Decida de manera razonada si son ortogonales.

2. Considera el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya matriz referida a la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Suponemos el producto escalar usual.

a) Decide de manera razonada si f es una aplicación unitaria.

b) Encuentra una base ortonormal respecto a la que la matriz de f sea diagonal.

3. Las siguientes son matrices de aplicaciones ortogonales referidas a una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$ positivamente orientada. Se pide clasificar cada aplicación dando todos sus elementos geométricos.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4. En este ejercicio trabajamos sobre $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Escribe la matriz de la simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la recta engendrada por el vector $(1, 1, 1)$.

5. En este ejercicio trabajamos sobre $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y con la orientación positiva dada por la base estándar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Escribe la matriz A de la rotación seguida de una simetría respecto al plano cuyo eje invariante está engendrado por $v_1 = (1, 1, 1)$ y que lleva a $v_2 = (2, 1, 0)$ a $v_3 = (-1, 0, -2)$.

6. Consideramos $V = \mathbb{R}^2$ con estructura de espacio euclídeo. Decide de manera razonada el resultado de componer:

- **a)** Dos rotaciones en V;
- **b)** Dos simetrías ortogonales en V;
- **c)** Una rotación con una simetría ortogonal.