ÁLGEBRA II

Hoja 6. Formas cuadráticas

1. Diagonaliza en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$;

b) $Q(x, y) = 2x^2 + 8xy + 2y^2$.

2. Diagonaliza, dando el cambio de base, la forma cuadrática cuya expresión en coordenadas respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^2$ es:

$$Q(x, y, z) = xy + 2xz.$$

3. Considera la forma cuadrática $Q_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión en coordenadas respecto a la base estándar es:

$$Q_\beta(x, y, z) = \beta x^2 + \beta y^2 + (1 - \beta)z^2 + 2xy.$$

Calcula el rango y los índices de inercia de Q_β para los distintos valores de $\beta \in \mathbb{R}$. El rango de una forma cuadrática es el el rango de cualquier matriz que la represente, o equivalentemente, el numero de autovalores distintos de 0, contados según su multiplicidad. Los índices de inercia son los números de autovalores positivos, negativos o 0, siempre contados según su multiplicidad.

4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tres números reales distintos, y sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios de grado menor o igual que 2. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} f : & V & \to & \mathbb{R} \\ & p(x) & \mapsto & p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2. \end{array}$$

a) Demuestra que f es una forma cuadrática. *Sugerencia: observa que la función*

$$\frac{1}{2}\left(f(p(x) + q(x)) - f(p(x)) - f(q(x))\right)$$

es una forma bilineal...;

b) Escribe la matriz de f respecto a la base $\{1, x, x^2\}$;

c) Encuentra una base de V respecto a la cual la matriz de f sea diagonal.

5. Sea $Q_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que respecto a la base estándar tiene como matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & (1-\alpha) & 0 \\ -\alpha & 0 & (1+\alpha) \end{pmatrix}.$$

a) Encuentra una base ortonormal respecto a la que Q_α tenga una forma canónica (forma canónica significa que no aparecen términos cruzados, sólo los cuadrados).

b) Decide de manera razonada para qué valores de α, Q_α es definida y semidefinida.

6. Diagonalizar simultáneamente las siguientes formas cuadráticas:

a) $Q_1(x,y) = x^2 + 26y^2 + 10xy, Q_2(x,y) = x^2 + 56y^2 + 16xy.$

b) $Q_1(x,y) = -4xy, Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2.$

c) $Q_1(x,y,z) = x^2 - 8xy - 4y^2 + 10xz + 4yz + 2z^2, Q_2(x,y,z) = 6x^2 + 8xy + 4y^2 - 2xz - 4yz + 2z^2, (\lambda = -1, 2, 3).$

d) $Q_1(x,y,z) = -2x^2 - 4xy - 2y^2 + 2xz + 2yz - z^2, Q_2(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xz - 2yz + z^2, (\lambda = -1, 0).$