ÁLGEBRA II

Hoja 3. Aplicaciones lineales entre espacios euclídeos y unitarios.

1. Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de $\mathbb{R}^3$, $l = \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$. Usa el producto escalar usual.

2. Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$. Usa el producto escalar usual.

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz en una base $B = \{w_1, w_2, w_3\}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal del vector con coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto a la base B sobre el plano $\{y + z = 0\}$.

4. Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las matrices cuadradas de orden 2. Usando el producto escalar del ejercicio 10 (b) de la hoja 1, encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en una base ortonormal B es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Para $\alpha = b^2/(a^2 + b^2)$ y $\beta = -ab/(a^2 + b^2)$ demuestra que f es una proyección ortogonal sobre la recta $ax + by = 0$.

6. La siguiente lista corresponde a los datos recogidos por un trabajador autónomo. En ella se ilustra la proporción de las ganancias que ha destinado a ampliar su negocio durante los seis últimos años:

Años	1	2	3	4	5	6
Proporción invertida	0,20	0,25	0,20	0,35	0,45	0,40

a) Calcula la ecuación de la recta que mejor se ajusta a estos datos.

b) Estima la proporción esperada para el séptimo año.

7. Considera la nube de puntos dada por la siguiente tabla:

0	2	4	6	8	10
4,7	4,8	4,9	5,7	5,9	6,9

a) Calcula la ecuación de la recta que mejor se ajusta a estos datos; calcula el error cuadrático cometido.

b) Calcula la ecuación de la parábola que mejor se ajusta a estos datos; calcula el error cuadrático cometido.

c) ¿Cuál de las dos gráficas te parece que se ajusta mejor a los datos?

8. Encuentra la aplicación adjunta de:

a) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ con el producto escalar usual.

b) La misma aplicación del apartado (a) con el producto escalar del ejercicio 7 de la hoja 2.

c) Con la notación y el producto escalar del ejercicio 6 de la hoja 2, la aplicación $g : V_2 \to V_2$ dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$.

d) La aplicación $T : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t + A$ con el producto escalar del ejercicio 10 de la hoja 1.

9. Sea V un espacio vectorial euclídeo o unitario y sean $I_V, f, g : V \to V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra que:

a) $\widetilde{I_V} = I_V$;

b) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$;

c) $\widetilde{f + g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$;

d) $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$;

e) Si f es biyectiva, entonces $\widetilde{f^{-1}} = (\widetilde{f})^{-1}$;

f) $(\mathrm{Im}\ f)^{\perp} = \mathrm{Ker}\widetilde{f}$;

g) $(\mathrm{Ker} f)^{\perp} = \mathrm{Im}\ \widetilde{f}$.

10. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$:

a) Encuentra la expresión en coordendas de la simetría ortogonal respecto a la recta $l = \{x - iz = 0, y = 0\}$. ¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

b) Considera la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1 + i)z = 0,\ y = 0\}$ como en el problema 2. ¿Es autoadjunta?

11. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo α. Determina la adjunta de h. ¿Es h ortogonal?

12. Sea l una recta (un subespacio vectorial de dimensión 1) en $\mathbb{R}^2$ donde consideramos el producto escalar usual. Demuestra que la simetría ortogonal respecto a l es una aplicación ortogonal.

13. Sea $W \subset V$ un subespacio no nulo de un vectorial euclídeo o unitario de un espacio V de dimensión $n \geq 1$. Sea $f : V \to V$ la simetría respecto a W con dirección un cierto subespacio W'. Demuestra que f es una aplicación ortogonal (o unitaria) si y sólo si la simetría es ortogonal. (i.e., f es ortogonal -o unitaria- si y sólo si $W' = W^{\perp}$).

14. Si V es euclídeo o unitario, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\ker P$ es ortogonal a $\mathrm{Im}P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con $\mathrm{Im}\ P = W$.

a) Demuestra que las proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

b) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Usa que si P es una proyección entonces $P^2 = P$. Prueba que $(Pu, v) = (Pu, Pv)$.*