

ÁLGEBRA II

Hoja 2. Espacios Euclídeos y Unitarios II. Normas inducidas por productos escalares. Ortogonalidad. Gram-Schmidt. Complementos ortogonales.

1. Sea V un espacio vectorial unitario con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ la norma inducida por φ . Sean $u, v \in V$.

a) Demuestra la **Identidad del paralelogramo**: Para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

b) Demuestra la **Identidad de polarización**: Para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$4\varphi(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$

c) Demuestra que para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$2\varphi(u, v) = \|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - (1 + i)\|u\|^2 - (1 + i)\|v\|^2.$$

d) ¿Cuáles serían las identidades de los apartados anteriores si V fuera un espacio vectorial euclídeo?

2. Sea $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ definida en \mathbb{R}^2 . Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^2 , que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

3. Sea V un espacio vectorial euclídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ la norma inducida por φ . Sean $u, v \in V$. Demuestra que:

a) Los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$. ¿Vale la equivalencia si V es unitario?

b) Los vectores u y v son ortogonales si y sólo si $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (en un espacio vectorial normado dos vectores son *ortogonales en el sentido de Birkhoff* si satisfacen esta condición).

c) ¿Vale la equivalencia anterior en un espacio unitario?

4. Sea V un espacio euclídeo o unitario. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2,$$

si los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son ortogonales dos a dos.

5. Sea V un espacio unitario con producto escalar φ . Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz: para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$|\varphi(u, v)|^2 \leq \varphi(u, u)\varphi(v, v).$$

6. Sea $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. En $V_n \times V_n$ considera la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x .

c) Para $n = 3$ calcula una base ortogonal de V_3 .

d) ¿Cómo definirías el producto escalar análogo en $W_n := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$?

7. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de \mathbb{R}^3 respecto a la que la matriz de ψ sea diagonal.

8. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que φ es un producto escalar.

b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ .

9. Sean $u_1 = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ y $u_3 = (1, -1, 0)$ vectores de \mathbb{R}^3 .

a) Demuestra que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

b) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 .

10. Calcula el complemento ortogonal de la recta

$$L := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

respecto al producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

y respecto al producto escalar usual.

11. En \mathbb{R}^3 encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $x = 0$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único ese producto escalar?