

Para tratar la meningitis bacteriana es vital aplicar con urgencia un tratamiento con antibióticos. Por ello, es importante distinguir lo más rápidamente posible este tipo de meningitis de la meningitis vírica. Con el fin de resolver este problema se ajustó con R un modelo de regresión logística a las siguientes variables medidas en 164 pacientes del *Duke University Medical Center*:

Nombre variable	Descripción
age	Edad en años
bloodgl	Concentración de glucosa en la sangre
gl	Concentración de glucosa en el líquido cefalorraquídeo
pr	Concentración de proteína en el líquido cefalorraquídeo
whites	Leucocitos por mm ³ de líquido cefalorraquídeo
polys	Porcentaje de leucocitos que son leucocitos polimorfonucleares
abm	Tipo de meningitis: bacteriana (abm=1) o vírica (abm=0)

El resultado del ajuste se muestra a continuación (algunos valores se han sustituido por letras):

Call:

```
glm(formula = abm ~ age + bloodgl + gl + pr + whites + polys,
     family = "binomial")
```

Deviance Residuals:

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.6433113 -0.2515780 -0.0426214  0.0009792  3.3999069
```

Coefficients:

```
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -9.7729088  2.4465149 -3.995 6.48e-05 ***
age          -0.0745558  0.0254888 -2.925 0.003444 **
bloodgl      0.0495798  0.0137182  3.614 0.000301 ***
gl          -0.0566176  0.0186024 -3.044 0.002338 **
pr           0.0506505  0.0133574  3.792 0.000149 ***
whites      0.0007971  0.0005108    B  0.118660
polys       0.0453840  0.0145852  3.112 0.001860 **
```

```
Null deviance:  A    on 163 degrees of freedom
Residual deviance: 51.539 on 157 degrees of freedom
AIC: 65.539
```

- Calcula el valor de A en la salida anterior sabiendo que hay 68 pacientes con meningitis bacteriana en la muestra.
- Calcula el valor de B en la salida anterior. A nivel $\alpha = 0.1$, ¿puede afirmarse que al aumentar la cantidad de leucocitos en el líquido cefalorraquídeo disminuye la probabilidad de que la meningitis sea de tipo vírico?
- En un análisis realizado a un paciente de 15 años se han determinado los siguientes valores para el resto de variables:

bloodgl	gl	pr	whites	polys
119	72	53	262	41

¿En cuál de los dos tipos de meningitis debe clasificarse este paciente?

Solución:

a) El valor de **A (Null deviance)** es el valor de la desviación, D_0^2 , en el modelo logístico reducido $\eta_0(\mathbf{x}) = 1/(1 + e^{-\beta_0})$. En cualquier modelo (reducido o completo) la desviación D^2 es -2 veces la log-verosimilitud de ese modelo evaluada en los estimadores de máxima verosimilitud (e.m.v.). Por tanto,

$$D_0^2 = -2 \log L_0(\hat{\beta}_{0,0}),$$

donde L_0 denota la función de verosimilitud en el modelo reducido y $\hat{\beta}_{0,0}$ denota el e.m.v. de β_0 en el modelo reducido (que no necesariamente coincide con el e.m.v. de β_0 en el modelo completo). Para determinar $\hat{\beta}_{0,0}$, calculamos la verosimilitud

$$L_0(\beta_0) = \prod_{i=1}^n \eta_0(\mathbf{x}_i)^{y_i} (1 - \eta_0(\mathbf{x}_i))^{1-y_i},$$

la log-verosimilitud

$$\log L_0(\beta_0) = \sum_{i=1}^n [y_i \beta_0 - \log(1 + e^{\beta_0})] = \beta_0 \sum_{i=1}^n y_i - n \log(1 + e^{\beta_0})$$

y planteamos la ecuación

$$0 = \frac{\partial \log L_0}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{1 + e^{-\beta_0}} \right),$$

de la que despejamos

$$\hat{\beta}_{0,0} = -\log \left(\frac{1}{\bar{y}} - 1 \right).$$

Observando que el valor de Y es 0 (meningitis vírica) o 1 (meningitis bacteriana), tenemos que $\bar{y} = 68/164 = 0.4146341$, la proporción de meningitis bacterianas en la muestra. Por tanto, $\hat{\beta}_{0,0} = -0.3448405$.

Ahora podemos calcular

$$A = D_0^2 = -2 \left(\hat{\beta}_{0,0} \sum_{i=1}^n y_i - n \log(1 + e^{\hat{\beta}_{0,0}}) \right) = 222.5483.$$

b)

$$B = z(\beta_5) = \frac{\hat{\beta}_5}{\text{e.t.}(\hat{\beta}_5)} = 1.56$$

La razón de momios

$$\frac{O(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})}{O(\mathbf{x})} = e^{\beta_5}$$

para $\Delta\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)'$ representa el cambio de la disparidad $O(\mathbf{x})$ cuando x_5 aumenta en una unidad y el resto de regresores permaneces constantes. Por tanto, nos piden hacer el contraste de $H_0 : \beta_5 \leq 0$ frente a $H_1 : \beta_5 > 0$ a nivel $\alpha = 0.1$, cuya región de rechazo es $R = \{z(\beta_5) > z_\alpha\}$. Como $z_{0.1} = 1.28$, rechazamos H_0 a nivel 0.1. Otra posibilidad era observar que el p-valor de este contraste con hipótesis unilaterales es la mitad del p-valor del contraste $H_0 : \beta_5 = 0$, es decir, el p-valor de contraste $H_0 : \beta_5 \leq 0$ es $0.118660/2$, que es menor que 0.1.

c) Como

$$\begin{aligned} &\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_6 x_6 \\ &= -9.7729088 - 0.0745558 \cdot 15 + 0.0495798 \cdot 119 - 0.0566176 \cdot 72 \\ &\quad + 0.0506505 \cdot 53 + 0.0007971 \cdot 262 + 0.0453840 \cdot 41 \\ &= -4.31 \end{aligned}$$

es negativo, asignamos al paciente al grupo 0 (meningitis vírica).