Sean Y_1, Y_2 e Y_3 tres variables aleatorias independientes con distribución normal y varianza σ^2. Supongamos que μ es la media de Y_1, λ es la media de Y_2 y $\lambda+\mu$ es la media de Y_3, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que el vector $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ satisface el modelo de regresión múltiple $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$. Para ello, determina la matriz de diseño $\mathbb{X}$, el vector de parámetros $\boldsymbol{\beta}$ y la distribución de las variables de error $\boldsymbol{\epsilon}$.
b) Calcula los estimadores de máxima verosimilitud (equivalentemente, de mínimos cuadrados) de λ y μ.
c) Calcula la distribución del vector $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})'$, formado por los estimadores calculados en el apartado anterior.

Solución:

a)

$$\mathbf{Y} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ \lambda+\mu \end{pmatrix} = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_3\right) = \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

con

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \sim N_3(\mathbf{0}_3, \sigma_2\mathbf{I}_3).$$

b)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{Y},$$

con

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_2(\mathbf{B}\mathbb{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{B}') = N_2(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1})$$